УДК 519.21


**М.Т. Корнійчук, О.І. Романов,**
**І.К. Совтус, М.О. Шутко**

# СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ ОЦІНЮВАННЯ НАДІЙНОСТІ МЕРЕЖ ЗВ'ЯЗКУ

*Розглянуто моделі оцінювання надійності мереж зв'язку. Оскільки топологія мереж зв'язку є складною, то обгрунтовано оригінальне трактування показника надійності процесу функціонування системи. Наведено формули його розрахунку.*

Мережа зв'язку являє собою одну з найскладніших структурованих систем, процес функціонування якої збурюється випадковими подіями (випадкові моменти викликів, тривалості зв'язку, випадкові похибки вмикання–вимикання–накладання, збої, поломки технічні й алгоритмічні) [1]. Тому адекватні методи описання якості процесу функціонування системи мають належати лише до класу ймовірнісних методів та математико-стохастичних моделей.

Розглянемо процес функціонування мережі зв'язку і побудуємо можливу модель оцінювання його надійності.

Спершу визначимося, що розумітимемо під терміном "надійність мережі зв'язку". Очевидно, що це завдання не є ординарним і залежить від структури мережі, її топології, технології процесу функціонування та структурного використання. Під структурним використанням розуміємо використання системи, а також використання окремих її елементів, допускаючи певну техніко-експлуатаційну технологічну периферійну незалежність (або залежність за детермінованим алгоритмом).

Отже, перше, що ми маємо дослідити (мається на увазі математичний опис та формалізація), – це загальна структура системи. Почнемо з простого. Маємо пункти $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, сполучені лініями зв'язку (рис. 1).

Нехай кількості ліній зв'язку між пунктами $A_i$ та $A_{i+1}$, де $A_{n+1} = A_1$, відповідно дорівнюють $l_i$, $i=\overline{1,n}$. Експлуатаційно-технічна надійність кожної лінії зв'язку, тобто ймовірність безвідмовної роботи протягом деякого часу $T$, може визначатися в залежності від призначення системи мережі зв'язку і тому прийматися як 1) однакові для кожної лінії з ділянки, тобто мати значення $p_{j_i} = p_{c_i}, j_i = \overline{1,l_i}, i = \overline{1,n}$ для кожної ділянки між пунктами $A_i$ та $A_{i+1}$ відповідно; 2) різні для кожної лінії зв'язку, тобто рівні $p_{j_i}, j_i = \overline{1,l_i}, i = \overline{1,n}$.

Кожна з ділянок перебуває в безвідмовному стані (зв'язок забезпечений, тобто процес функціонування – надійний), якщо на кожній з них працює не менше $l_i^*$, $i = \overline{1,n}$ ліній відповідно. Таким чином, маємо дві задачі, причому друга задача є більш загальною і поглинає першу, як окремий випадок. Припустимо, що дослідження першої задачі можна облишити в надії, що з другої моделі одержимо першу. Але в простішій задачі ми можемо досягти більш точних результатів, які в загальному випадку одержати не вдається. Тому дослідження проводилися паралельно для обох задач. Це дало можливість зіставляти результати і таким чином перевіряти їхню істинність.

Отже, система мережі зв'язку належить до складних систем. Навіть окремий її елемент – лінія зв'язку є складною частиною, адже кожна лінія зв'язку є носієм декількох каналів зв'язку. Позначимо кількість каналів зв'язку $j$-ї лінії з $i$-ї ділянки через $k_{ji}$. Знову маємо два випадки:

1) всі канали на кожній лінії зв'язку мають одну й ту саму надійність $p_{r_{ji}} = p_{c_{ji}}$, $r_{j_i} = \overline{1,k_{j_i}}$, $j_i = \overline{1,l_i}$, $i = \overline{1,n}$, яка не залежить від каналу, а лише від $i$ та $j$;

2) всі канали на кожній лінії зв'язку мають різну надійність $p_{r_{j_i}}$, $r_{j_i}=\overline{1,k_{j_i}}$, $j_i=\overline{1,l_i}$, $i=\overline{1,n}$, яка залежить від ступеня дії завад.

Надійність лінії $p_{j_i}$, $j_i=\overline{1,l_i}$, $i=\overline{1,n}$, визначається надійністю каналів $p_{r_{j_i}}$, $r_{j_i}=\overline{1,k_{j_i}}$, $j_i=\overline{1,l_i}$, $i=\overline{1,n}$. При цьому можливі такі ситуації:

1) робота лінії забезпечується лише безумовною роботою всіх її каналів;

2) для надійної роботи лінії достатньо, щоб працювало не менше $k^*_{j_i}$ її каналів.

Обчислимо надійність складної системи. Розрахунки проведемо в кілька етапів.

На першому етапі розрахуємо надійність кожної лінії.

Якщо робота лінії забезпечується лише безумовною роботою всіх її каналів, то надійність лінії $p_{j_i}$, $j_i=\overline{1,l_i}$, $i=\overline{1,n}$ буде дорівнювати добутку надійностей всіх її каналів

$$p_{j_i}=\prod_{r_{j_i}=1}^{k_{j_i}} p_{r_{j_i}} \tag{1}$$

як імовірність подій, що мають відбутися одночасно.

Нехай тепер для надійної роботи лінії достатньо, щоб на ній працювало не менше $k^*_{j_i}$ каналів.

Якщо рівень дії перешкод на різних каналах є незалежним один від одного, то події виходу з ладу каналів є також незалежними подіями, а тому вони вписуються в схему незалежних дослідів, яка може бути описана формулою Бернуллі. Але формула Бернуллі застосовна лише для рівноможливих подій, тобто в ситуації, коли надійності всіх каналів лінії є однаковими: $p_{c_{j_i}}$, $j_i=\overline{1,l_i}$, $i=\overline{1,n}$.

Якщо наявна ця ситуація, то ймовірність того, що працює рівно $s_{j_i}$ каналів, обчислюється за формулою

$$p_{k_{j_i}}\left(s_{j_i}\right)=C_{k_{j_i}}^{s_{j_i}} p_{c_{j_i}}^{s_{j_i}} q_{c_{j_i}}^{k_{j_i}-s_{j_i}}, \qquad s_{j_i}=\overline{k^*_{j_i},k_{j_i}}, \tag{2}$$

де $q_{c_{j_i}}=1-p_{c_{j_i}}$.

Ймовірність безвідмовної роботи лінії

$$p_{j_i}\left(s_{j_i}\ge k^*_{j_i}\right)=\sum_{s_{j_i}=k^*_{j_i}}^{k_{j_i}} C_{k_{j_i}}^{s_{j_i}} p_{c_{j_i}}^{s_{j_i}} q_{c_{j_i}}^{k_{j_i}-s_{j_i}}. \tag{3}$$

Розрахунок надійності ліній $p_{j_i}$, $j_i=\overline{1,l_i}$, $i=\overline{1,n}$ ані за формулою (1), ані за формулою (3) не викликає жодних труднощів.

Поведінка ймовірностей $p_{j_i}\left(s_{j_i}\right)$ кількості працюючих на лінії каналів із зростанням надійності кожного каналу показана на рис. 2 (ламана *1* відповідає більшому значенню надійності канала, ламана *2* – меншому), а зі збільшенням кількості каналів при їх сталій надійності – на рис. 3 (ламана *1* відповідає більшій кількості каналів, а ламана *2* – меншій).

Аналогічно можна прослідкувати зміну надійності каналу $p_{r_{j_i}}$ при варіюванні параметрів формули (3).

Розрахуємо надійність лінії за умови, що всі канали в ній – різнонадійні.

У випадку різнонадійності в схемі незалежних дослідів використовується твірна функція:

$$\varphi(z)=\prod_{s_{j_i}=1}^{k_{j_i}}\left(p_{s_{j_i}} z+q_{s_{j_i}}\right), \tag{4}$$

де $q_{s_{j_i}}=1-p_{s_{j_i}}$.

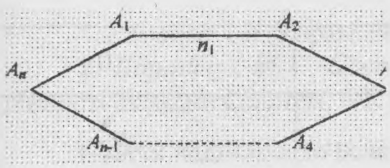

Рис. 1

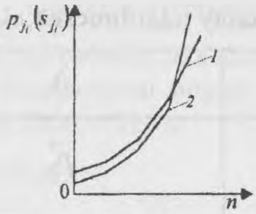

Рис. 2

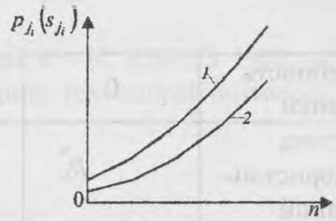

Рис. 3

У формулі (4) ймовірності $p_{k_{j_i}}\left(s_{j_i}\right)$ розташовані при відповідних степенях змінної $z$. Надійності ж ліній $p_{j_i}$ розраховуються сумуванням коефіцієнтів при степенях $z$, починаючи зі степеня $k^*_{j_i}$ і вищих.

Обчислення коефіцієнтів поліному (4) технічно також не викликає труднощів. Поведінка його коефіцієнтів в залежності від кількості працюючих каналів або зміни надійності каналів аналогічна до графіків, зображених на рис. 3 і 2 відповідно.

Отже, надійність ліній розрахована і можемо перейти до другого етапу.

На другому етапі розрахуємо надійність кожної з ділянок. Виконаємо розрахунки для $i$-ї ($i=\overline{1,n}$) ділянки, якщо всі лінії на ній мають однакові надійності $p_{j_i}=p_{c_i}$, $j_i=\overline{1,l_i}$, $i=\overline{1,n}$.

Припустимо, що лінії виходять з ладу незалежно одна від одної. Тоді задача знову вписується в схему незалежних дослідів, і ймовірність того, що на ділянці працює $m_i$ ліній, обчислюється за формулою

$$p_{l_i}(m_i)=C_{l_i}^{m_i}p_{c_i}^{m_i}q_{c_i}^{l_i-m_i},\quad m_i=\overline{l_i*,l_i}, \tag{5}$$

де $q_{c_i}=1-p_{c_i}$.

Зв'язок на $i$-й ділянці забезпечений тоді, коли працює не менше $l_i*$ ліній, тобто ймовірність безвідмовної роботи ділянки подається сумою

$$p_i(m_i\ge l_i*)=\sum_{m_i=l_i*}^{l_i}C_{l_i}^{m_i}p_{c_i}^{m_i}q_{c_i}^{l_i-m_i} \tag{6}$$

Нехай на $i$-й ($i=\overline{1,n}$) ділянці потрібно забезпечити зв'язок з імовірністю не меншою $p_i^*$. Кількість необхідних для цього ліній $l_i^x$ можна обчислити з трансцендентного рівняння

$$p_{l_i^x}\left(l_i^*\right)+p_{l_i^x}\left(l_i^*+1\right)+\ldots+p_{l_i^x}\left(l_i^x\right)=p_i^*, \tag{7}$$

в якому кожна з імовірностей знаходиться за формулою (5).

На відміну від простоти обчислень ймовірностей за формулами (2)–(6) розв'язання рівняння (7) викликає значні труднощі. За невеликих значень $l_i^x$ рівняння (3) можна розв'язувати звичайним підбором, використовуючи застосовні програми. При великих значеннях $l_i^x$ варто скористатись граничними формулами і розподілами, але то вже інша задача.

Різниця $l_i^x-l_i*$ буде виражати кількість запасних ліній при забезпеченні зв'язку з імовірністю $p_i^*$ на $i$-й ($i=\overline{1,n}$) ділянці.

Щоб обчислити надійність ділянки, потрібно врахувати, що на ній можуть працювати від 0 (всі лінії зіпсувались) до $l_i$ ліній ($l_i^x=l_i$ для забезпечення зв'язку з імовірністю $p_i^*$, тобто всі лінії задіяні). Тому надійність ділянки є випадковою величиною, що дискретно змінює свої значення від 0, коли працює менше $l_i*$ ліній, до значення $p_{l_i^*}+p_{l_i^*+1}+\ldots+p_{l_i}$, коли підключені всі $l_i$ ліній [2]. Якщо відомі частоти використання кількості ліній на ділянці $p_1^*$, $p_2^*$, … , $p_{l_i}^*$, то можна описати стани ділянки за значеннями надійності при певній кількості підключених ліній (див. таблицю).

**Ряд розподілу надійностей ділянки**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Надійність ділянки | 0 | 0 | 0 | ... | 0 |
| Частота використання ліній | $p_0^*$ | $p_1^*$ | $p_2^*$ | ... | $p^*_{l_i^*-1}$ |
| Надійність ділянки | $p_{l_i^*}$ | $p_{l_i^*}+$ $p_{l_i^*+1}$ | $p_{l_i^*}+p_{l_i^*+1}$ $+p_{l_i^*+2}$ | ... | $p_{l_i^*}+p_{l_i^*+1}+\ldots$ $+p_{l_i}$ |
| Частота використання ліній | $p^*_{l_i^*}$ | $p^*_{l_i^*+1}$ | $p^*_{l_i^*+2}$ | ... | $p^*_{l_i}$ |

Якщо ж частоти використання кількості ліній невідомі, то їх можна замінити теоретичними біномними ймовірностями, обчисленими за формулою (5).

Оцінку надійності $i$-ї $(i=\overline{1,n})$ ділянки можемо дати невипадковою величиною – математичним сподіванням надійності, обчисленим за наведеним рядом розподілу:

$$p_i = p_{l_i^*}\, p^*_{l_i^*} + (p_{l_i^*}+p_{l_i^*+1})\, p^*_{l_i^*+1} + (p_{l_i^*}+p_{l_i^*+1}+p_{l_i^*+2})\, p^*_{l_i^*+2} + \ldots + (p_{l_i^*}+p_{l_i^*+1}+\ldots+p_{l_i})\, p^*_{l_i}.$$

Надійність $p_i$ (а точніше математичне сподівання надійності) є ймовірністю, тобто $0 \le p_i \le 1$. Це випливає з того, що математичне сподівання є середнім значенням випадкової величини, що міститься в першому рядку ряду розподілу. Значення ж цієї величини або дорівнюють 0, або є частинами ймовірнісного біномного розподілу, а, отже, не перевищують одиниці. Тому і середнє значення міститься між 0 і 1.

З обчисленням надійності кожної ділянки закінчений другий етап задачі при умові рівнонадійності всіх ліній ділянки.

Нехай кожна лінія на кожній з ділянок має різну надійність:

$$p_{j_i} = p_{c_i},\ j_i = \overline{1, l_i},\ i = \overline{1,n}.$$

Ця ситуація суттєво відрізняється від попередньої, і тому безпосереднє обчислення відповідних імовірностей є складним як з точки зору комбінаторики, так і з огляду на об'єм аналітичних перетворень. Тому ще раз скористаємося методом твірних функцій, сутність яких полягає в наступному: відповідна ймовірність чисельно співпадає з коефіцієнтом формули Маклорена її розкладу. Для побудови твірної функції складемо добуток

$$\varphi(z) = \prod_{j_i=1}^{l_i} \left( p_{j_i} z + q_{j_i} \right), \tag{8}$$

де $q_{j_i} = 1 - p_{j_i}$, $i = \overline{1,n}$.

При відповідному степені змінної $z$ у здійсненому добутку буде розташована надійність $i$-ї $(i=\overline{1,n})$ ділянки під час роботи певної кількості ліній, тобто

$$p_{l_i}(m_i) = A_{m_i},$$

де $A_{m_i}$ – коефіцієнт доданка $A_{m_i} z^{m_i}$.

Отже, замість формули (1) в цьому випадку використовується формула (8), а далі виконується вся наведена задача. Тепер можна перейти до останнього етапу.

Оскільки вся система забезпечує зв'язок лише тоді, коли існує зв'язок на кожній з ділянок, то загальна надійність системи має оцінку $P = \prod_{i=1}^{n} p_i$.

**Список літератури**

1. *Романов А.И.* Управление потоками речевых сообщений на сети связи. – К.: КВИУЗ, 1998. – 272 с.
2. *Корнійчук М.Т., Совтус І.К.* Стохастичні моделі інформаційних технологій оптимізації надійності складних систем. – К.: КВІУЗ, 2000. – 316 с.


Стаття надійшла до редакції 30.04.01.

УДК 621.396.67
ББК З811.722 8с42.31

**А.Я. Білецький, М.О. Рашевський, І.В. Шелевицький, В.М. Шутко**

# УМОВИ НЕПЕРЕРВНОСТІ ДВОХ ПОХІДНИХ В СПЛАЙНОВИХ БАЗИСАХ, ОТРИМАНИХ ЗГОРТКОЮ

*Розглянуто спосіб побудови базисних сплайнів на рівномірних сітках вузлів згорткою функцій. Досліджено умови стосовно породжуючих функцій, за яких базисний сплайн матиме дві неперервні похідні у вузлах.*

При застосуванні сплайнів в системах цифрової обробки даних зручною формою їх подання є лінійна комбінація локальних базисних сплайнів, тобто В-сплайни. Найбільш відомими і дослідженими є алгебричні В-сплайни, одним із способів отримання яких є згортка трикутників [1].

Аналогічно можна одержати сплайнові базиси з фрагментами, що не є алгебричними поліномами [2]. Так можна синтезувати базисні сплайни довільного вигляду в залежності від виду функцій, що згортають. Одним із принципових моментів синтезу базисного сплайна є забезпечення неперервності щонайменше двох перших похідних. Розглянемо побудову базисного сплайна.

Нехай маємо деяку локальну функцію $f(x)$, неперервну на $[a,b]$:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{ для } x\in[a,\frac{a+b}{2}]; \\ f_2(x) \text{ для } x\in[\frac{a+b}{2},b]; \\ 0 \text{ для } x\notin(a,b), \end{cases}$$

причому

$$f_1(a+x)=f_2(b-x),\ x\in[0,\frac{b-a}{2}],$$

тобто $f(x)$ – симетрична функція.

Крім того припустимо, що існує інша функція $\varphi(x)$, яка має властивості, аналогічні $f(x)$. Базові функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ зображені на рис.1.

Лінійна згортка $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$ є локальним сплайном, що складається з чотирьох фрагментів і має в точках стику неперервні значення функції і першої та другої похідних.

Для зручності позначимо $(b-a)/2=h$, тоді