

ББК В 263.330.573.056.044.38644.0

УДК 532.526

В.І. Мамчук, Є.О. Шквар

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНИХ ПРИСТІННИХ СТРУМЕНІВ НА ШОРСТКИХ ПОВЕРХНЯХ

*Наведено результати математичного моделювання пристінних струменів, які розвиваються на плоскій поверхні з шорсткістю у вигляді канавок квадратної форми, розташованих паралельно або перпендикулярно до напрямку формування струменя. Розрахунки виконано безітераційним скінченнорізницевою маршовим методом з другим порядком точності за обома координатами. Проведені зіставлення результатів розрахунків профілів швидкості в різних перерізах уздовж розвитку течії з експериментальними даними.*

Одним з ефективних засобів керування примежовим шаром, що широко застосовується в аерогідродинаміці, є примежові пристінні струмені. З математичної точки зору розрахунок цих течій складає серйозну проблему, оскільки в практичних задачах їх необхідно розглядати як турбулентні, а характеристики турбулентності значною мірою залежать від геометрії притаманного пристінному струменю немонотонного профілю поздовжньої складової осередненої швидкості. Крім того, реальна обтічна поверхня, як правило, є шорсткою, що в деяких випадках суттєво впливає на формування пристінної струменевої течії і повинно бути враховано в процесі побудови математичної моделі.

Під час математичного моделювання турбулентних стаціонарних нестисливих пристінних струменів, що розвиваються на шорстких поверхнях, шорсткість розглядається у вигляді канавок квадратної форми, розташованих паралельно або перпендикулярно до напрямку формування струменя. Обтічна поверхня вважається або плоскою, або поверхнею циліндричного тіла при вісесиметричному обтіканні останнього. Оскільки течія в пристінному струмені характеризується наявністю переважаючого напрямку, для математичного моделювання використана система рівнянь, що описують рух нестислої рідини в наближенні примежового шару, які після обезрозмірювання набувають вигляду рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \bar{r} \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r} \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{r} \bar{u} \frac{1}{u_H} \frac{du_H}{d\bar{x}} = 0, \quad (1)$$

рівняння руху в проекції на вісь  $x$ :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{u_H} \frac{du_H}{d\bar{x}} - \frac{\bar{u}_1^2}{u_H} \frac{du_H}{d\bar{x}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \bar{r} \left( \frac{1}{Re_L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{\tau}_t \right) \right], \quad (2)$$

де  $\bar{r} = r/L = r_w/L + \bar{y}$ ;  $L$  – характерний розмір;  $r_w$  – радіус циліндричного тіла;  $\bar{y} = y/L$ ;  $x$ ,  $y$  – відповідно поздовжня та нормальна осі декартової системи координат, пов'язаної з обтічною поверхнею;  $\bar{u} = u/u_H$ ;  $u$ ,  $v$  – проекції вектора швидкості на напрямки  $x$  і  $y$  відповідно;  $\bar{v} = v/u_H$ ;  $\bar{x} = x/L$ ,  $Re_L = u_H L / \nu$  – число Рейнольдса;  $\bar{\tau} = \tau / (\rho u_H^2)$ ;  $\tau$  – напруження тертя;  $\rho$  – густина; індекси:  $H$  – значення на зовнішній межі примежового шару;  $w$  – значення на поверхні,  $t$  – турбулентний.

Високоєфективний безітераційний метод розрахунку системи рівнянь (1)–(2), який базується на основі різницевої схеми з підвищеними стабілізуючими властивостями, описано в роботі [1].

Оскільки профіль осередненої швидкості для течії має складну форму, то для описування коефіцієнта турбулентної в'язкості  $\mu_t$  для кожної з ділянок використовувалися співвідношення з роботи [1]:

для початкової ділянки

$$\mu_t = \chi \rho \delta u_h \gamma \text{th} \frac{\ell \sqrt{\bar{\tau}}}{\chi \delta u_h / v_*};$$

$$\ell = k y \text{th} \frac{\text{sh}^2(\chi_1 y^+) \text{th}(\text{sh}^2(\chi_2 y^+))}{k y \sqrt{\bar{\tau}}}; \quad (3)$$

для струменевої і слідної ділянок

де  $k, \chi, \chi_1, \chi_2$  – коефіцієнти моделі;  $\delta$  – товщина прилежого шару або пристінного струменя;  $\ell$  – довжина ділянки змішування;  $\bar{\tau}$  – безрозмірне напруження тертя в околі стінки:

$$\bar{\tau} = \begin{cases} 1 + \Phi_1 \eta & \text{при } \Phi_1 \geq 0, \\ 1/(1 - \Phi_1 \eta) & \text{при } \Phi_1 < 0; \end{cases} \quad \Phi_1 = \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx} - \text{формпараметр К.К.Федяєвського; } p - \text{тиск;}$$

$\tau_w$  – значення дотичного напруження тертя на поверхні;  $\eta = y/\delta$ ;  $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$  – динамічна швидкість;  $y^+ = y v_* \rho / \mu$ ;  $\gamma = \sqrt{1 - \eta}$  – функція, яка враховує переміжність течії;  $\chi_{c_t}, \chi_{c_l}$  – емпіричні сталі моделі;  $\delta_{c_t}$  і  $\delta_{c_l}$  – товщини струменевої та слідної ділянок відповідно.

Для врахування шорсткості обтічної поверхні використовувалося модифіковане співвідношення (3) з роботи [2]:

де  $\Delta u$  – функція зсуву; індекс + – значення, що відповідає “закону стінки”.

Оскільки  $\Delta u$  – міра динамічного впливу шорсткості обтічної поверхні, а в модифікованій моделі коефіцієнта турбулентної в'язкості як характеристика впливу шорсткості використовується функція зсуву  $\Delta u$ , то необхідність мати співвідношення між  $\Delta u$  та  $\Delta u^+$  є важливою. Це дозволяє переносити експериментальну інформацію про деформацію профілю швидкості під впливом шорсткості безпосередньо в модель  $\mu_t$ . Аналітична функція  $\Delta u^+(\Delta u^+)$  має такий вигляд [2]:

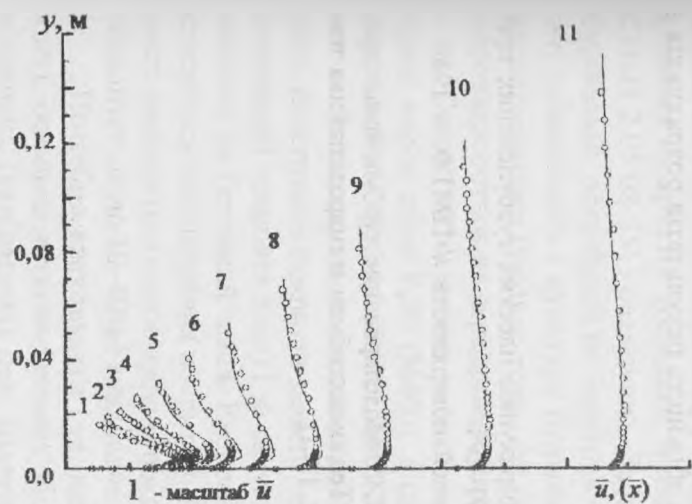
$$\Delta u^+ = \begin{cases} \frac{1}{\chi_1} \text{arth}(\chi_1 \Delta u^+) & \text{при } \Delta u^+ < \Delta u^+_c; \\ \exp(k(\Delta u^+ - C_c)) & \text{при } \Delta u^+ \geq \Delta u^+_c, \end{cases}$$

де  $\Delta u^+_c = C_r + \frac{1}{k} \ln y_r^* = C_{rp} - u_w^+ + \frac{1}{k} \ln y_r^*$  – значення величини зсуву при виконанні умови

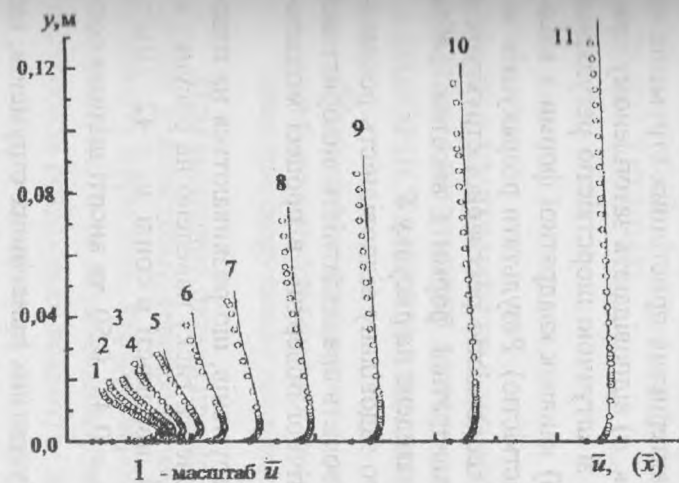
$$\Delta u^+ = y_c^*.$$

На рисунку показано результати порівняння числових розрахунків деяких пристінних турбулентних струменевих течій з експериментальними даними. Результати розрахунків (лінія) пристінних струменів порівнюються з експериментальними даними А.О.Бондарця з роботи [3] (коло).

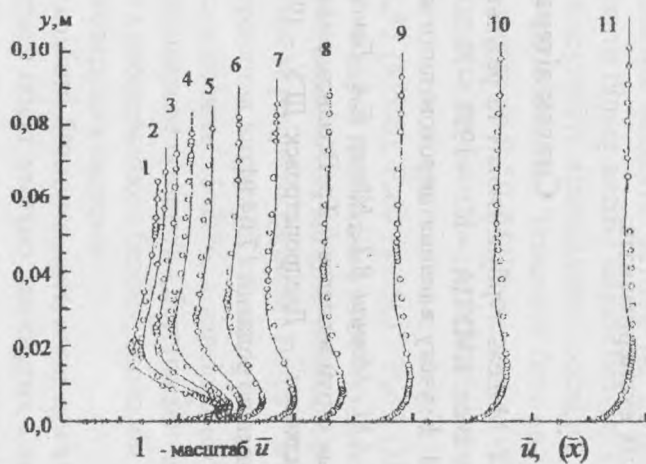
На рисунках *a, б* наведено результати розрахунків затоплених пристінних струменів на гладкій та шорсткій пластині, що були експериментально досліджені А.О. Бондарцем [3]. Експерименти проведено у початковій, перехідній та основній зонах пристінного струменя, і



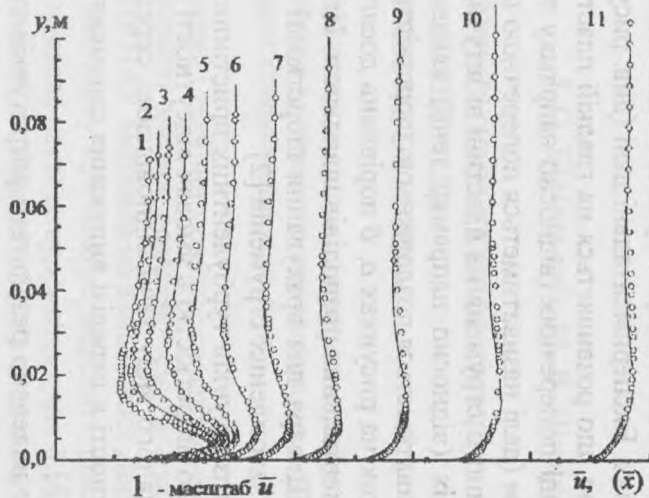
a



б



в



г

Розподіл швидкості  $\bar{u} = f(y)$  у поздовжніх перерізах  $\bar{x} = \text{const}$  при  $d = 0,007$  м,  $L = 1,0823$  м:

a -  $u_0 = 36,4$  м/с,  $m_0 = 0$ ; б -  $u_0 = 36,5$  м/с,  $m_0 = 0$ ; в -  $u_0 = 42,5$  м/с,  $m_0 = 0,524$ ; г -  $u_0 = 41,9$  м/с,  $m_0 = 0,51$ ;

1 -  $x = 0,0500$  м; 2 -  $x = 0,0680$  м; 3 -  $x = 0,0925$  м; 4 -  $x = 0,1258$  м; 5 -  $x = 0,1710$  м; 6 -  $x = 0,2326$  м; 7 -  $x = 0,3164$  м; 8 -  $x = 0,4303$  м; 9 -  $x = 0,5852$  м; 10 -  $x = 0,7958$ ; 11 -  $x = 1,0823$  м; лінії - розрахунки, кола - експериментальні дані

вони відповідають середній швидкості в соплі  $u_0 = 36,5$  м/с, коефіцієнту супутності в перерізі видування струменя  $m_0 = 0$  та висоті щілини сопла  $d = 7$  мм. Головною метою експериментальних досліджень А.О. Бондарця було дослідження характеристик пристінних струменів на шорстких поверхнях. Експериментальні дані (див. рисунок, *a*) відповідають затопленому пристінному струменю, що розвивається на гладкій пластині зі штучною шорсткістю регулярної структури у вигляді поперечних (відносно напрямку течії) канавок квадратної форми з висотою ребра  $h = 1$  мм (далі називатиметься поперечною шорсткістю). Результати розрахунків затопленого пристінного струменя на пластині зі штучною шорсткістю регулярної структури у вигляді поздовжніх (відносно напрямку течії) канавок квадратної форми з висотою ребра  $h = 1$  мм (далі називатиметься поздовжньою шорсткістю) наведено на рисунку *б*.

Для наведених на рисунках *a*, *б* порівнянь досягнуто задовільну відповідність розрахункових і експериментальних розподілів швидкості. Це доводить працездатність використаної модифікації Є.О.Шквара для врахування шорсткості обтічної поверхні в процесі моделювання пристінних затоплених струменів [2].

Результати розрахунків турбулентних пристінних струменів, що розвиваються на пластині з поздовжньою шорсткістю в умовах відсутності градієнта тиску наведено на рисунку *в*. Експерименти з даного виду течії відповідають середній швидкості в соплі  $u_0 = 42...50$  м/с, коефіцієнту супутності в перерізі видування струменя  $m_0 = 0,48..0,50$  та висоті щілини сопла  $d = 7$  і 15 мм [3].

На рисунку *г* наведено результати розрахунків турбулентних пристінних струменів, що розвиваються на пластині з поперечною шорсткістю в умовах відсутності градієнта тиску. Експерименти з даного виду течії відповідають середній швидкості в соплі  $u_0 = 42...50$  м/с, коефіцієнту супутності в перерізі видування струменя  $m_0 = 0,48...0,665$  та висоті щілини сопла  $d = 7$  і 15 мм [3]. Вони проводилися з метою дослідження впливу коефіцієнта супутності та висоти сопла на аеродинамічні характеристики пристінного струменя на шорсткій поверхні.

Для всіх розглянутих випадків отримано задовільну збіжність результатів розрахунків з даними відповідних експериментів.

### Список літератури

1. Мамчук В.І. Модель турбулентності та результати розрахунків плоских турбулентних пристінних струменів // Вісн. КМУЦА. – К.: – 1998. – № 1. – С. 291–294.
2. Шквар Е.А. К учёту влияния шероховатости обтекаемой поверхности // ПМТФ. – 1986. – №6. – С. 57–63.
3. Мхитарян А.М., Мовчан В.Т., Шквар Е.А., Бондарец А.А. Моделирование турбулентных пристенных и свободных струй и следов // Тр. Всесоюз. семинара “Тепломассообмен и гидродинамика тонких струй вязкой жидкости”. – Днепропетровск: ДГУ. – 1989. – С. 17–18.

Стаття надійшла до редакції 17.04.01.