

АЕРОДИНАМІКА

УДК 532.517.2

В 253.320.550.227 8312.4088641.0

Є.О. Гаєв, К.А. Гасва

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ І ПРИРОДНИХ ТЕЧІЙ, ЯКІ ОБУМОВЛЕНІ ЛЕГКОПРОНИКНОЮ ШОРСТКІСТЮ

Розглянуто математичні моделі декількох структур, які занурені у в'язку рідину, що рухається, з позицій єдиної концепції легкопроникної шорсткості. Основну увагу приділено таким математичним аспектам, як крайові умови спряженості. Наведено питання математичної коректності моделей на рівні фізичної інтуїції розгляданням їх "від простих до складних", виявлені також основні фізичні властивості течій, які сформовані легкопроникною шорсткістю. Результати можуть бути використані в різних галузях механіки рідини.

Застосування концепції легкопроникної шорсткості (ЛПШ) до широкого кола течій в природі і техніці показано в роботах [1–5], а експериментальні перевірки цієї теорії – в роботах [2; 6; 7]. Оскільки крайові умови спряженості, які використані для формулювання моделей, ще не стали стандартним арсеналом математичної фізики [8–10], доводиться приділяти увагу і питанням математичної коректності моделей [11; 12]. Вони аналізуються на інтуїтивному рівні строгості розгляданням (по можливості аналітично) послідовності моделей від простих до складних.

Класична механіка рідин розглядає переважно малу шорсткість [9; 10]. Але на сьогоднішній день зустрічаються складні структури різної природи, які занурені в потік рідини і взаємодіють з нею [1; 4; 7]. Запропонована нами концепція легкопроникної шорсткості передбачає єдиний підхід до цих структур і до течії, що ними формується. Очевидно, що кожна з них відіграє роль шорсткості для зовнішньої віддаленої частини потоку. Ці структури проникні для потоку і найчастіше саме внутрішня течія в її взаємодії з зовнішньою, а також механічний рух елементів структури, їхній тепло- і масообмін, хімічні процеси.

На рис. 1 і 2 ЛПШ зображено як деяку кулю в потоці з великою кількістю малих сфер (частинок, перешкод), поданими в моделі розподіленою масовою силою, яка діє на потік в межах цієї кулі $0 \leq z \leq h < H$. Стрілки на рис. 2 відмічають наявність течій протилежного напрямку. Великими символами (поздовжня U і поперечна V компоненти швидкості) будемо характеризувати потік рідини, а малими (u і v) – характеристики елементів ЛПШ. Остання буде описуватися на основі ейлерова підходу як багатокомпонентне суцільне середовище.

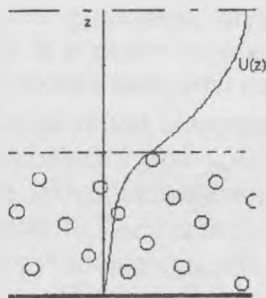


Рис. 1. Типовий розподіл швидкості потоку в середині і поза ЛПШ на стабілізованій ділянці течії

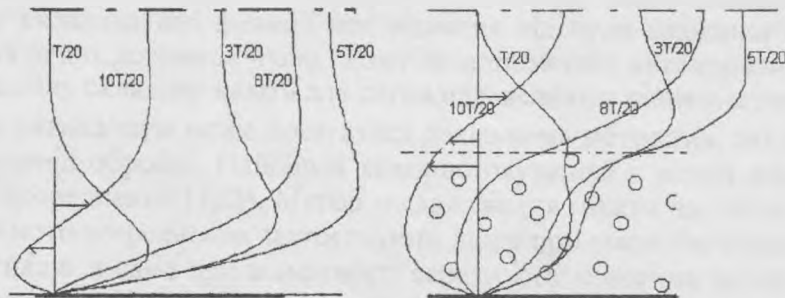


Рис. 2. Розподіл поздовжньої швидкості при пульсуючому тиску в послідовні моменти часу $\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \dots, \frac{10}{20}$ періоду T у випадках відсутності ЛПШ (а) та її присутності (б)

Припустимо, що потік рідини описується рівняннями примежового шару Прандтля [9]. Проте останні містять додаткові ("джерелкові") члени, які залежать від швидкості потоку відносно елементів ЛПШ $U - u$, різниці температур ЛПШ і потоку $T - t$, різниці концентрацій у потоці й біля поверхні перешкод $E - e$ і т.д. Ці різниці породжують сили дії потоку на кожний окремих елемент ЛПШ (перешкоду) $F = \frac{1}{2} \rho c_x (U - u)^k S$, потоки тепла $I_T = \alpha_T c_p (T - t) S_0$ і маси $I_E = \alpha_E \rho (E - e) S_0$ від перешкоди до потоку. А інтегрування цих величин по ідентичності перешкод (або просто множення на концентрацію перешкод, якщо всі вони ідентичні), взяте з протилежним знаком, виражає "підсумкову" локальну дію ЛПШ на потік [1; 3; 4]. Для досить загального виду ЛПШ можна використати таке рівняння [12]:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= \frac{1}{2} c_x \rho_1 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} (U - u(r))^k S(r) n(r) dr; \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0; \\ m(r) \left\{ u(r) \frac{\partial u}{\partial x} - v(r) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} &= \frac{1}{2} c_x \rho_1 \{U - u(r)\}^k S_0; \\ \rho_1 c_1 \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{\partial j_T}{\partial z} + \alpha \int_0^{\infty} (T - t) S_0(r) n(r) dr; \\ \rho_1 \left(U \frac{\partial E}{\partial x} + V \frac{\partial E}{\partial z} \right) &= \frac{\partial j_E}{\partial z} + \beta \int_0^{\infty} (E - e) S_0(r) n(r) dr; \\ m(r) c_2 \left\{ u(r) \frac{\partial t}{\partial x} - v(r) \frac{\partial t}{\partial z} \right\} &= \alpha \{t(r) - T\} S_0(r) + \beta \{e(r) - E\} S_0(r), \end{aligned} \quad (1)$$

де безрозмірні змінні пов'язані з фізичними (з ризикою над символом) співвідношеннями

$$x = \frac{\bar{x}}{h}; \quad U = \frac{\bar{U}}{U_{\infty}}; \quad \tau = \frac{\bar{\tau}}{\rho U_{\infty}^2}; \quad v_T = \frac{\bar{v}_T}{v}; \quad T = \frac{\bar{T} - \bar{t}_h}{\bar{T}_{\infty} - \bar{t}_h} \quad \text{і т.д.}$$

Напряга тертя $\tau = v_T \frac{\partial U}{\partial z}$, потоки тепла $j_T = a_T \frac{\partial T}{\partial z}$ і маси $j_E = a_E \frac{\partial E}{\partial z}$ повинні задаватися певною гіпотезою турбулентності.

Прийнятий теоретичний підхід передбачає внутрішню течію (1) в області $0 \leq z \leq h$ у відриві від зовнішньої. У зовнішній течії, тобто в області $h \leq z \leq \infty$, третє і шосте рівняння (1) не діють, а в останніх рівняннях відсутні "джерелкові" члени. Для такої складеної задачі умови на вході в область ЛПШ

$$x = 0; \quad U = U_0(z); \quad T = T_0(z); \quad E = E_0(z), \quad (2)$$

умови на стінці

$$z = 0; \quad U = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

для внутрішньої течії $0 \leq z \leq h$ і асимптотичні умови для зовнішньої течії $h \leq z \leq \infty$

$$z = 1; \quad U = 1; \quad T = E = 0 \quad (4)$$

ще не гарантують єдність розв'язку. Додатково можуть бути поставлені фізично очевидні умови спряженості на поверхні $z = h$, яка розділяє обидві течії:

$$U|_{h-0} = U|_{h+0}; \quad T|_{h-0} = T|_{h+0}; \quad E|_{h-0} = E|_{h+0}; \quad \tau|_{h-0} = \tau|_{h+0}. \quad (5)$$

Запропонована умова (5) не є класичною, тому треба бути впевненим, що задача спряженості (1)–(5) математично коректна [11]. Наступна послідовність частинних реалізацій формулювання задачі (1)–(5), що поступово ускладнюється при переході від однієї до іншої, дозволяє в цьому переконатися на інтуїтивному рівні строгості.

Легкопроникна шорсткість із нерухомих елементів. Якщо елементи ЛПШ нерухомі ($u = 0$) й ідентичні ($r = r_0$), рівняння (1) істотно спрощуються, рух може бути фізично інтерпретовано як потік вітру над лісовим покривом. Подальше спрощення відбудеться, якщо розглядати модельну одновимірну задачу про ЛПШ на стабілізованій ділянці довгого каналу. У роботі [1] для неї отриманий однозначний аналітичний розв'язок. Типовий складений розподіл швидкості такого потоку – загальмований у середині ЛПШ і параболічний (логарифмічний при турбулентному режимі [2; 7]) у вільній частині перетину – показаний на рис. 1.

Задача ускладнюється, якщо дозволити нестационарний рух в каналі, наприклад, у випадку періодично змінного градієнта тиску [1]. В роботі [13] отриманий аналітичний розв'язок і цієї задачі. Типові профілі швидкості в різні моменти часу наведено на рис. 2, б і можуть бути зіставлені з відповідними профілями у випадку відсутності ЛПШ (рис. 2, а).

Отримані розв'язки одновимірних задач надають більше достовірності числовим результатам для двовимірних аналогів цих задач [5; 12], у тому числі з моделями турбулентності другого порядку. Так, на рис. 3 наведено розраховане поле течії річного потоку з відкритою поверхнею в прямолінійному прямокутному каналі, який заріс водяною рослинністю біля берегів [5]. Воно якісно відповідає даним лабораторного моделювання.

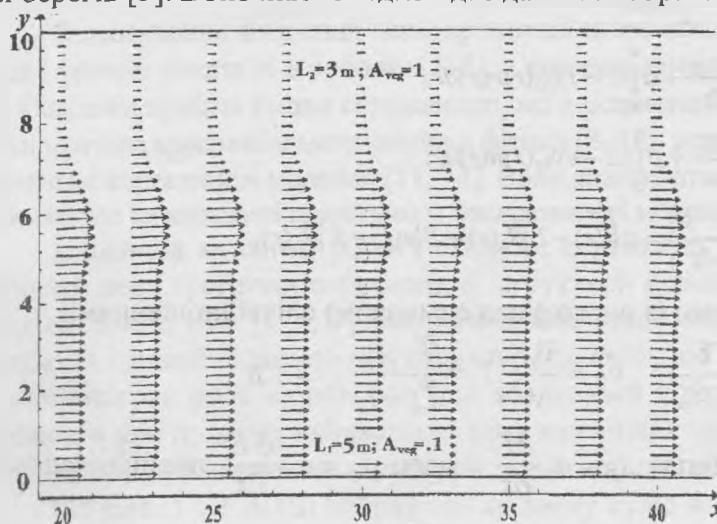


Рис. 3. Течія в прямолінійному каналі прямокутного перетину з відкритою поверхнею та рослинністю біля берегів [5]:

L_1, L_2 – ширина зарослих зон; A_{veg} – безрозмірна щільність рослинності

задача спряженості для системи звичайних диференціальних рівнянь третього порядку також може бути розв'язана аналітично [1; 12].

Повна двовимірна задача спряженості вимагає вже числового алгоритму. Параболічні задачі як для загальмованої, так і для вільної течії розв'язувалися б однозначно, якби спряжене значення швидкості U_h на границі їх розподілу (5) було відоме.

Вказані розв'язки дали б значення напруги тертя на цій границі в залежності від U_h , тобто $\tau|_{h-0}(U_h)$ і $\tau|_{h+0}(U_h)$. Числовий алгоритм відшукує корінь трансцендентного рівняння

$$\tau|_{h-0}(U_h) = \tau|_{h+0}(U_h), \quad (6)$$

оскільки він задовольняє умові спряженості і дає розв'язок задачі. Задача спряженості зводиться, таким чином, до питання розв'язання трансцендентного рівняння (6).

Для течій, сформованих ЛПШ з елементів, що зносяться потоком, теорія прогнозує деякі нові явища. На розподілах швидкості крапель може мати місце максимум, що свідчить

Легкопроникна шорсткість з елементів, що зносяться потоком (модель шару крапель). Нехай елементи ЛПШ можуть рухатись під дією захоплюючого їх потоку, подібно краплям бризкальної системи охолодження [3; 4; 6]. Припустимо для простоти, що краплі неперервно утворюються на рівні $z = h$ і падають униз із заданою швидкістю $v(r)$ і горизонтально зі швидкістю $u(z)$, яка залежить від взаємодії з потоком. Для такої системи необхідно прогнозувати не тільки рух середовища носія (повітря), але й несеного (середовище крапель), так що в формулюванні (1) зберігаються всі рівняння. З метою математичного дослідження доцільно поставити одновимірний аналог такої задачі. Така

про наявність додаткового механізму переносу кінетичної енергії. Такий ефект названий "нетурбулентним" [2; 6].

Моделі дисперсного і багатошвидкісного шару крапель. Нехай краплі, які складають ЛПШ, мають деякий спектр розмірів. Їх дія на потік виражається деяким осередненням у вигляді інтегральних "джерелкових" членів (1). Однак, якщо спектр розмірів розбити на K "представницьких" значень, то формула (1) дасть $2K + 4$ рівнянь, які "керують" багатофазною течією в середині ЛПШ. В цих рівняннях замість інтегралів будуть фігурувати суми $\Sigma(U - u_i)$, $\Sigma(T - t_i)$ і т.д. Як і раніше, одновимірний аналог задачі (досліджений лише чисельно) може передувати розв'язанню повної двовимірної задачі, даючи більшу впевненість у достовірності отриманих розв'язків [3; 4; 12].

На рис. 4 наведені профілі поздовжньої швидкості потоку-носія $U(z)$ і крапель двох розмірів $u_1(z)$ і $u_2(z)$ у двох перетинах двовимірного потоку. Малі (легкі) краплі прямують ближче до профілю швидкості вітру, ніж великі (важкі). На верхніх рівнях ЛПШ краплі відстають від вітрової течії, але прискорюються нею. Оскільки вітровий потік гальмується підстильним шаром, його швидкість спадає, в результаті цього на деякому рівні краплі "обганяють" вітер, після чого обмін кінетичною енергією між ними і потоком змінює знак на протилежний. Може бути поставлене і досліджене питання про середній розмір крапель як про таку "еквівалентну" монодисперсну ЛПШ, яка призводить до найбільш близького профілю швидкості $U(z)$.

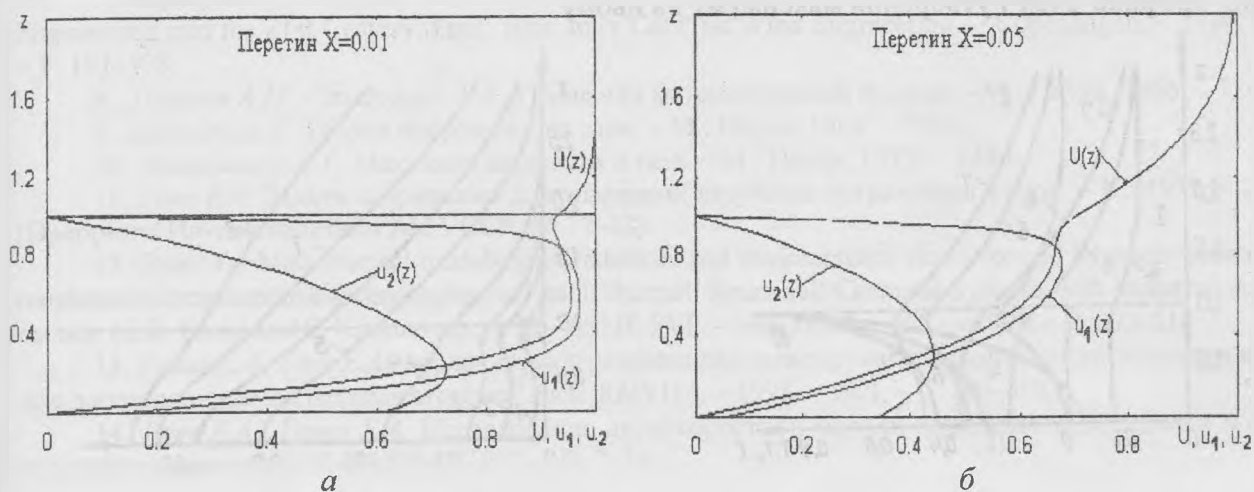


Рис. 4. Спільна трансформація профілів швидкості потоку-носія (повітря) і несених крапель малих (а) і великих (б) розмірів уздовж ЛПШ у вигляді шару крапель

У вигляді такого ж ейлерова описування можна моделювати і більш складний (більш реалістичний) рух крапель з урахуванням наявності висхідних і низхідних крапель, які "вистрілені" початково назустріч потоку і уздовж потоку. Приходимо до багатошвидкісної моделі крапельного шару [14], отже, до більш складної задачі спряженості. Її аналітичне і напіваналітичне дослідження також переконує в коректності математичного формулювання [14].

Моделі тепло- і масопереносу в ЛПШ. Тепло- і масообмін є прикладами "життєдіяльності" елементів ЛПШ у потоці. Практичне значення мають профілі температури $T(x, z)$ і вологості $E(x, z)$ повітря-носія, а також температури перешкод усіх розмірів $t(x, z, r)$. Якщо теплообмін проходить незалежно від масообміну, тобто $\alpha = 0$ або $\beta = 0$ в останньому рівнянні (1), то числовий алгоритм шукає таке спряжене значення $T_h = T(x, h)$ або $E_h = E(x, h)$, яке вирівнює потоки зверху $j_T(x, h + 0)$ і знизу $j_T(x, h - 0)$ від границі розподілу $z = h$. Задача спряженості знову зводиться до трансцендентного рівняння вигляду (6) і має аналітичні і числові розв'язки.

Однак задача істотно ускладнюється, якщо процеси тепло- і масообміну діють спільно, що виражається останнім рівнянням (1). Тепер повинен бути знайдений корінь $\{(T_h(x), E_h(x))\}$ системи трансцендентних рівнянь

$$J_T |_{h-0}(T_h, E_h) = J_T |_{h+0}(T_h, E_h); \quad J_E |_{h-0}(T_h, E_h) = J_E |_{h+0}(T_h, E_h).$$

Аналізу задачі допомагають її одновимірні аналоги. Корисну фізичну інформацію можна отримати із законів зберігання для ΔT , ΔE і Δt , які випливають з рівнянь (1).

Числовим розв'язанням задачі отримана досить докладна картина трансформації полів температури і вологості повітря вздовж шару крапель (рис. 5). Найбільш сильне охолодження крапель спостерігається в початкових перетинах ЛППШ "шар крапель" (штрихова лінія $z = h = 1,0$). Температура крапель тут $t_0(z)$ майже досягає теоретичної межі охолодження, відміченого відрізком вертикальної штрихової лінії. Краплі в шарі інтенсивно охолоджуються механізмами конвективної тепловіддачі випаровування, від чого профілі температури повітря $T(z)$ (рис. 5, а, II) і концентрації пари $E(z)$, подані еквівалентними профілями точки роси $T_e(z)$ (рис. 5, а, III), інтенсивно змінюються з просуванням потоку вздовж x . Відповідно охолодження крапель $t(z)$ зменшується (рис. 5, а, I). Пари кривих $T(z)$ і $T_e(z)$ "притягуються" до кривої $t(z)$, знаходячись у співвідношенні $T_e(z) \leq t(z) \leq T(z)$, і це є причиною скривлення профілю $T(z)$ і утворення максимуму на ньому.

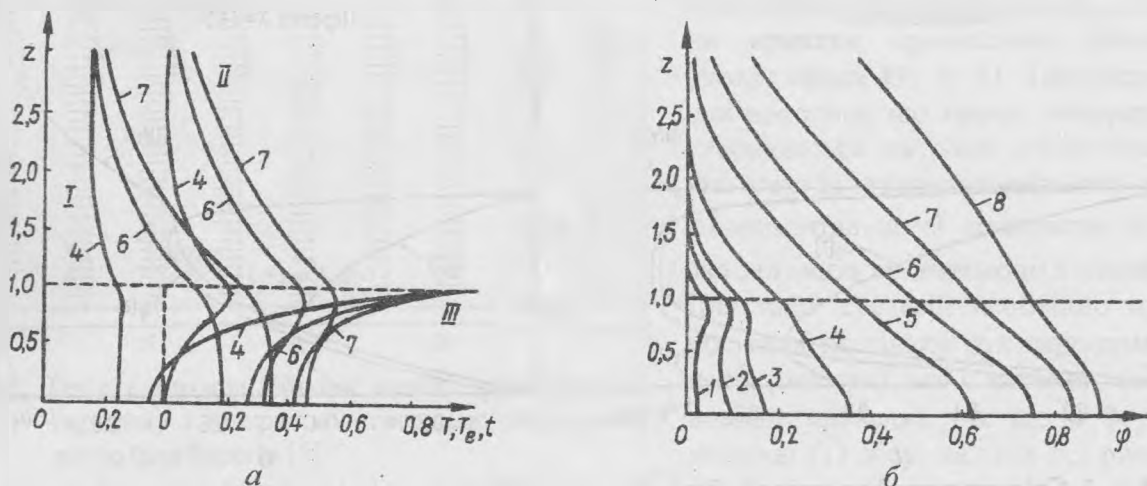


Рис. 5. Трансформація процесів тепломасообміну вздовж шару крапель:
 а – серії температурних розподілів для різних перетинів ЛППШ; б – розподіл відносної вологості;
 I – температура точки роси в повітрі $T_e(z)$; II – температура повітря; III – температура несеного середовища (крапель);
 1- $x=0,01$; 2- $x=0,03$; 3- $x=0,05$; 4- $x=0,1$; 5- $x=0,2$; 6- $x=0,3$; 7- $x=0,5$; 8- $x=1,0$

Відношення локальної концентрації пари $E(z)$ до насичуючої E_* , відомої емпіричної функції від T і E , визначає відносну вологість $\varphi(z)$. З рис. 5 видно, що ця важлива характеристика зростає з ростом x майже до 100% і спадає до значення в навколишньому середовищі ($\varphi_\infty = 0$ в безрозмірному формулюванні) з віддаленням z від ЛППШ.

Отже, складне і неочевидне питання про математичну коректність моделі ЛППШ у вигляді задачі спряженості для параболічних нелінійних рівнянь примезового шару може бути досліджене на інтуїтивному рівні строгості підбором і аналізом послідовності модельних задач, що поступово ускладнюються. Задача спряженості у всіх випадках зводиться до розв'язання трансцендентного рівняння. Аналітичний розв'язок спрощених модельних задач разом з аналізом фізичного змісту розв'язків надає впевненості в математичній коректності загальної моделі ЛППШ (1-5).

Список літератури

1. Гаев Е.А. Влияние особенностей легкопроницаемой шероховатости на гидродинамику ламинарного потока // Гидромеханика. – 50. – 1984. – С. 44 – 52. – Англ. пер. Effect of Easily Penetrable Roughness on the Hydrodynamics of Laminar Flow// Fluid Mech. – Soviet Research (USA). – 19. – № 3. – 1990. May – Jun. – P. 1–12.
2. Турбулентные течения, сформированные проницаемой шероховатостью / Е.А. Гаев, В.В. Меленевский, И.К. Микитин и др. //Механика неоднородных и турбулентных потоков/ Под ред. акад. В.В. Струминского. – М.: Наука, 1989. – С. 107–115. – Англ. пер. Turbulent flows in and above a permeable roughness layer//Fluid Mechanics, Soviet Research. – 19. – № 6. – 1990. –Nov.–Dec. – P. 79– 89.
3. Gayev Ye.A. Large Spray Cooler Theoretical Simulation Based on the Continuum Mechanics Method. – Proc. 9th Cooling Tower and Spraying Pond Symposium, Rhode-Saint. –Genese, Belgium, 1994. – P. 102–109.
4. Gayev Ye. Aerothermal theory of an Easily Penetrable Roughness. Particular application to the atmospheric flow in and over longscale Spray Cooling System. – Il Nuovo Cimento (Italy). С. – 1997. – 20. – P. 331–342.
5. Gayev Ye.A. Theoretical modeling of river flows with penetrable roughnesses. Institute of Hydro-mechanics, University of Karlsruhe, 1997. – 45 p.
6. Натурные исследования локальных аэротермических характеристик брызгальной системы охлаждения Ладыжинской ГРЭС/ Е.А. Гаев, В.С. Цымбал, И.К. Никитин и др. // Гидромеханика. – 1983. – Вып. 48. – С. 70–74.
7. Gayev Ye.A., Savory E., Toy N. Wind tunnel investigation of a complex canopy shear flow// Wind Engineering into the 21st Century. Proc. 10th. Inter Conf. on Wind Engineering. – Copenhagen. – 1999. – 1. – P. 191–198.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1966. – 724 с.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
11. Гаев Е.А. Задачи сопряжения для уравнений струйного пограничного слоя. – К.: 1977. – 26 с. (Препринт/ Ин-т математики АН УССР; № 77–12).
12. Gayev Ye. Mathematical modelling of industrial and environmental flows formed by easily penetrable roughness//Computational Technologies for Fluid/ Thermal/ Structural/ Chemical Systems with Industrial Applications. (C.R. Kleijn and S. Kawano eds.) – 2. – ASME PVP. – Vol. 377-2. – N.Y. – 1998. – P. 303–310.
13. Гаева Е.А., Гаев Е.А. Аналитическое решение для пульсирующего ламинарного течения в канале с легкопроницаемой шероховатостью// Вісн. КМУЦА. – 1998. – № 1. – С. 299–306.
14. Гаев Е.А., Гаева Е.А. Исследование двухскоростной модели слоя капель//Механика и прикладная математика. – К.: КИИГА, 1992. – С. 9–16.

Стаття надійшла до редакції 10.04.01.