

УДК 534.1

В.В. Астанін, д-р техн. наук
М.М. Бородачов, д-р техн. наук
М.І. Савченко, канд. техн. наук

ЗМУШЕНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ БАЛКИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ

Кафедра механіки, НАУ, e-mail: aviacosm@nau.edu.ua

Розглянуто задачу про змушені поперечні коливання балки з урахуванням сил опору, які пропорційні швидкості. Отримано формулу для визначення динамічного переміщення стосовно балки з вільноопертими кінцями.

Постановка проблеми

Для розв'язання задачі про змушені поперечні коливання балки вплив сил опору, які пропорційні швидкості, досліджено на прикладі балки з вільноопертими кінцями під дією зосередженої сили, яка гармонічно змінюється в часі. У результаті застосування синус-перетворення Фур'є зі скінченними границями отримано формулу для визначення динамічного переміщення, що відповідає змушеним коливанням, і графіки зміни динамічного коефіцієнта для двох перерізів балки.

У статті наведено диференціальне рівняння поперечних коливань балки постійного поперечного перерізу з урахуванням інерції обертання і зсуву, а також сил опору, які пропорційні швидкості.

Аналіз дослідження

Результати досліджень багатьох учених про змушені поперечні коливання балки наведено в літературі [1–5], однак мало уваги приділялося питанню про змушені поперечні коливання балки з урахуванням сил опору.

Мета – отримати розв'язок задачі про змушені поперечні коливання балки з урахуванням сил опору, які пропорційні швидкості.

Урахування сил опору при змушених коливаннях балки

Диференціальне рівняння поперечних коливань балки з урахуванням сил опору, які пропорційні швидкості, має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c_0 \frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t), \quad (1)$$

де EJ – жорсткість при згинанні; y – переміщення; γ – вага одиниці об'єму матеріалу балки; A – площа поперечного перерізу; g – прискорення сили ваги; $f(x, t)$ – інтенсивність розподіленого навантаження.

Для балки постійного поперечного перерізу ($EJ = \text{const}$, $A = \text{const}$) рівняння (1) можна подати в такій формі:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial y}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = b f(x, t), \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{EJg}{A\gamma}; \\ 2n &= \frac{c_0 g}{A\gamma}; \\ b &= \frac{g}{A\gamma}. \end{aligned} \quad (3)$$

До рівнянь (1) і (2) необхідно ще додати початкові і граничні умови.

Для розв'язання рівняння (2) можна використувати різні методи, але найбільш загальним є метод Фур'є, узагальнений О.М. Криловим для випадку змушених коливань [6].

Вплив сил опору на змушені коливання розглянемо на прикладі балки (рис. 1) з вільноопертими кінцями під дією сили $P_0 \sin \omega t$, прикладеної на відстані c від лівої опори.

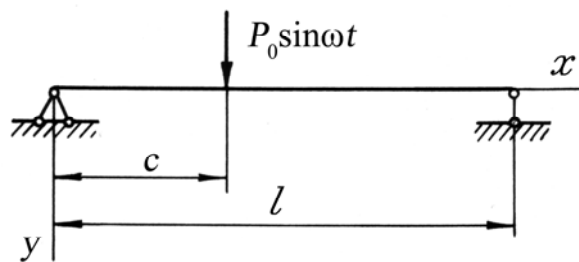


Рис. 1. Розрахункова схема балки

У цьому випадку маємо диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial y}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = b P_0 \delta(x - c) \sin \omega t, \quad (4)$$

початкові умови

$$y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad \text{якщо } t = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

та граничні умови

$$y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \text{якщо } x = 0, \quad x = l, \quad t > 0, \quad (6)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція.

У рівнянні (4) припускається, що змушені коливання викликаються заданою силою, що змінюється в часі. Однак коливання балки можуть також викликатися деяким заданим рухом визначених точок осі балки [7].

Застосуємо до рівняння (4) синус-перетворення Фур'є зі скінченними границями за змінною x .

Помножимо всі члени рівняння (4) на $\sin \frac{m\pi x}{l}$, проінтегруємо по x від 0 до l і врахуємо граничні умови (6). У результаті одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial y_s}{\partial t} + a^2 \frac{m^4 \pi^4}{l^4} y_s = \\ = b P_0 \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$y_s(m, t) = \int_0^l y(x, t) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

Рівняння (7) є звичайним диференціальним рівнянням. Загальний розв'язок рівняння (7), що задовольняє початкові умови (5), можна подати у вигляді [7]

$$y_s(m, t) = e^{-nt} (C_{1m} \cos p_m^* t + C_{2m} \sin p_m^* t) + M_m \sin \omega t + N_m \cos \omega t, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} C_{1m} &= A_m \sin \alpha_m; \\ A_m &= (M_m^2 + N_m^2)^{1/2} = \\ &= b P_0 \sin \frac{m\pi c}{l} \left[(p_m^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2 \right]^{-1/2}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$p_m^* = (p_m^2 - n^2)^{1/2};$$

$$p_m^2 = m^4 \frac{\pi^4 a^2}{l^4};$$

$$C_{2m} = \frac{n A_m \sin \alpha_m - \omega A_m \cos \alpha_m}{p_m^*};$$

$$M_m = b P_0 \sin \frac{m\pi c}{l} \frac{p_m^2 - \omega^2}{(p_m^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2};$$

$$N_m = -b P_0 \sin \frac{m\pi c}{l} \frac{2n\omega}{(p_m^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_m = -\frac{N_m}{M_m} = \frac{2n\omega}{p_m^2 - \omega^2}. \quad (10)$$

Перші два члени в рівнянні (8), що містять множник e^{-nt} , зображують вільні загасаючі коливання. Інші два члени, що мають частоту сили, яка збуджує, зображують змушені коливання. У цьому випадку вільні коливання викликані прикладанням сили, що збуджує.

Вираз для змушених коливань можна спростити, використовуючи співвідношення (9) і (10). У результаті одержимо

$$y_s^*(m, t) = A_m \sin(\omega t - \alpha_m),$$

де $y^*(x, t)$ – переміщення, що відповідає змушеним коливанням балки.

Формула обернення для синус-перетворення Фур'є зі скінченними границями має вигляд [8]:

$$y(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} y_s(m, t) \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Отже,

$$y^*(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \sin(\omega t - \alpha_m). \quad (11)$$

У цьому випадку ми маємо суму гармонічних коливань з однією коловою частотою ω , але з різними кутами зсуву фаз α_m . У результаті одержимо нове коливання з тією самою коловою частотою [9]:

$$y^*(x, t) = A_0(x) \sin[\omega t - \alpha_0(x)], \quad (12)$$

де

$$A_0(x) = \frac{2}{l} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \alpha_m \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \alpha_m \right)^2 \right]^{1/2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0(x) = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \alpha_m}{\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \alpha_m}.$$

З формули (12) видно, що кожен поперечний переріз балки буде здійснювати гармонічне коливання з однією і тією самою коловою частотою, але з різними амплітудами і кутами зсуву фаз.

На підставі формул (9) і (11) маємо

$$\begin{aligned} y^*(x, t) &= \frac{2bP_0}{lp_1^2} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin(\omega t - \alpha_m)}{\left[\left(m^4 - \frac{\omega^2}{p_1^2} \right)^2 + 4 \frac{n^2 \omega^2}{p_1^2 p_1^2} \right]^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$\text{де } p_1^2 = \frac{\pi^4 a^2}{l^4}.$$

Ураховуючи співвідношення (3), остаточно одержуємо

$$y^*(x, t) = \frac{2P_0 l^3}{\pi^4 EJ} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m \pi c}{l} \sin \frac{m \pi x}{l} \sin(\omega t - \alpha_m)}{\left[\left(m^4 - \frac{\omega^2}{P_1^2} \right)^2 + 4 \frac{n^2 \omega^2}{P_1^2 P_1^2} \right]^{1/2}}. \quad (13)$$

Як правило, при розрахунку балок на змушені коливання обчислюють динамічний коефіцієнт K_d . У цьому випадку K_d буде функцією від змінної x :

$$K_d(x) = \frac{y_{\max}^*(x)}{y_{\text{ст}}(x)}. \quad (14)$$

Величину $y_{\max}^*(x)$ визначають за формулою (13). Величина $y_{\text{ст}}(x)$ являє собою прогін балки від сили P_0 статично прикладеної на відстані c від лівої опори:

$$y_{\text{ст}}(x) = \frac{P_0 c_1 x}{6EJl} (l^2 - c_1^2 - x^2), \quad 0 \leq x \leq c;$$

$$y_{\text{ст}}(x) = \frac{P_0}{6EJ} \left[\frac{c_1}{l} x (l^2 - c_1^2 - x^2) + (x - c)^3 \right], \quad (15)$$

$$c \leq x \leq l,$$

$$\text{де } c_1 = l - c.$$

Після визначення переміщення балки $y^*(x, z)$ можна знайти згинальний момент $M(x, t)$:

$$M(x, t) = -EJ \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2}. \quad (16)$$

Підставляючи в співвідношення (16) формулу (13), одержуємо

$$M(x, t) = \frac{2P_0 l}{\pi^2} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \sin \frac{m \pi c}{l} \sin \frac{m \pi x}{l} \sin(\omega t - \alpha_m)}{\left[\left(m^4 - \frac{\omega^2}{P_1^2} \right)^2 + 4 \frac{n^2 \omega^2}{P_1^2 P_1^2} \right]^{1/2}}, \quad (17)$$

$$0 \leq x \leq l.$$

За формулою (17) можна визначити згинальний момент при змушених коливаннях балки, коли прикладена сила

$$P_0 \delta(x - c) \sin \omega t.$$

Динамічний коефіцієнт для згинального моменту K_d^M буде дорівнювати

$$K_d^M(x) = \frac{M_{\max}(x)}{M_{\text{ст}}(x)},$$

де $M_{\text{ст}}(x)$ – згинальний момент від статично прикладеної сили $P_0 \delta(x - c)$:

$$M_{\text{ст}}(x) = \frac{P_0 c_1 x}{l}, \quad 0 \leq x \leq c;$$

$$M_{\text{ст}}(x) = \frac{P_0 c}{l} (l - x), \quad c \leq x \leq l.$$

У загальних випадках динамічний коефіцієнт для згинального моменту $K_d^M(x)$ не збігається з динамічним коефіцієнтом для переміщення $K_d(x)$.

Раніше отриманий розв'язок про змушені коливання балки, навантаженої зосередженою силою

$$P_0 \delta(x - c) \sin \omega t.$$

Однак подібним же чином можна одержати розв'язок даної задачі і при інших видах динамічного навантаження, що змінюється в часі за гармонічним законом.

На поперечні коливання балки також впливає інерція обертання і зсуву.

Диференціальне рівняння поперечних коливань балки постійного поперечного перерізу з урахуванням інерції обертання і зсуву, а також сил опору, що пропорційні швидкості, має вигляд

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2n \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - r^2 \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + r^2 \frac{\gamma}{gk'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = b f(x, t), \quad (18)$$

де $r^2 = J/A$; E – модуль пружності при розтяганні і стисканні; k' – числовий коефіцієнт, що залежить від форми поперечного перерізу (наприклад, для прямокутного поперечного перерізу $k' = 0,833$); G – модуль пружності при зсуві.

Розв'язання задачі про змушені коливання балки за рівнянням (18) одержати набагато важче, ніж за рівнянням (2).

У монографії [7] показано, що сумарний вплив інерції обертання і зсуву на частоти вільних коливань не перевищує, як правило, 2%.

Цілком імовірно, що вплив інерції обертання і зсуву на амплітуду змушених коливань балки також буде несуттєвим.

Зміна в характері змушених коливань з урахуванням сил опору має як кількісний, так і якісний характер. Особливо це видно на графіках зміни динамічного коефіцієнта K_d при $c = l/4$.

На рис. 2, а показані криві зміни величини K_d для перерізу $x = l/4$ і для перерізу $x = l/2$ (рис. 2, б) при $n/p_1 = 0,10; 0,15; 0,20$ і $n = 0$.

Обчислення виконано за формулами (13)–(15).

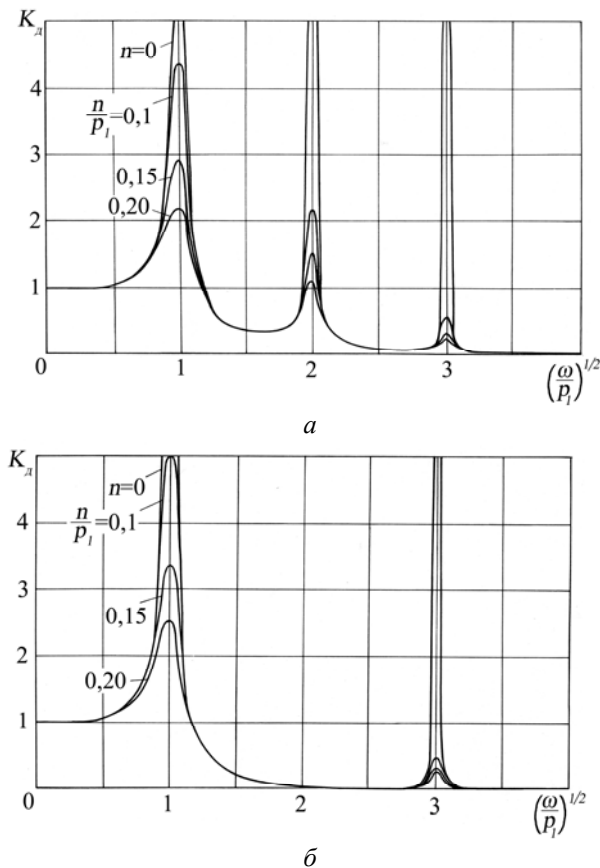


Рис. 2. Зміна динамічного коефіцієнта K_d від відношення ω/p_1 :
 а - $x = l/4$; б - $x = l/2$

Висновок

Отримано розв'язок задачі про змушені поперечні коливання балки з урахуванням сил опору. Для прикладу розглянуто змушені коливання балки, шарнірно-опертої кінцями. Як показують наведені числові результати (рис. 2) урахування сил опору дозволяє отримати розв'язок, який більш вірно відповідає дослідним даним.

V.V. Astanin, N.M. Borodachev, N.I. Savchenko

Вынужденные поперечные колебания балки с учетом сил сопротивления

Рассмотрена задача о вынужденных поперечных колебаниях балки с учетом сил сопротивления, пропорциональных скорости. Получена формула для определения динамического перемещения применительно к балке со свободноопертыми концами.

V.V. Astanin, N.M. Borodachev, N.I. Savchenko

Forced transverse oscillation of beam taking into account bending resistance

The problem on the forced transverse vibrations of the beam in terms of forces of resistance directly proportional to the velocity was considered. The formula for determination of dynamic displacement as applied to the beam hinged to the supports was obtained.

У подальшому передбачається розв'язати подібну задачу з урахуванням сил опору, інерції обертання і зсуву.

Отримані результати можуть знайти використання в розрахунковій практиці при перевірці конструктивних елементів на змушені коливання і резонанс.

Література

1. Глейзер А.И. Вязкое трение и комплексное сопротивление // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2001. – № 1. – С. 59–60.
2. Naguleswaran S. Transverse vibrations of an Euler-Bernoulli iniform beam carrying several particles. Int. J. Mech. Sci. – 2002. – 44, № 12. – P. 2463–2478.
3. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Собственные поперечные колебания неоднородного стержня // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 3. – С. 179–192.
4. Li Gen-guo. Dynamical behaviors of Timochenco beam with fractional derivative constitutive relation // Int. J. Nonlinear Sci. and Numer. Simul. – 2002. – 3, № 1. – P. 67–73.
5. Перель М.В., Фиалковский И.В., Киселев А.П. Резонансное взаимодействие изгибной и сдвиговой мод в неоднородной балке Тимошенко // Зап. науч. семинара ПОМИ. – 2000. – 264. – С. 258–284.
6. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. – М.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 368 с.
7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
8. Снеддон И. Преобразования Фурье.– М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
9. Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. – М.: Гостехтеоретиздат, 1955. – Т. 1. – 503 с.

Стаття надійшла до редакції 15.06.05.