2. *Игнатов В.А., Стеклов В.Л., Уваров Р.В.* Коррекция нелинейных автоматических систем. – К.: Техніка, 1993. – 192 с.

3. *Кунченко Ю.П., Первунинский С.М.* Нелинейные полиномиальные инерционные фильтры// Тез. докл. школы-семинара "Вероятностные модели и обработка случайных сигналов и полей". – Тернополь, 1992. – С. 5-9.

4. *Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. – М.: Сов. радио, 1960. – 448 с.

5. *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

Стаття надійшла до редакції 27 листопада 2000 року.

УДК 629.735.33.15

В.М. Казак, В. А. Боярінов, І.В. Боярінов

СИНТЕЗ НАБЛИЖЕНОГО АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГРУПОВОГО ВРАХУВАННЯ АРГУМЕНТІВ

Розглянуто спосіб синтезу приблизного розв'язку звичайного диференціального рівняння за результатами його числового інтегрування, оснований на методі групового врахування аргументів з використанням глобальної аналітичної екстраполяції до межі по довжині інтервалу інтегрування.

Етапи оптимального проектування істотно відрізняються один від одного за складом задач та методами їх розв'язання. Особливо ефективно проектуються системи, які можуть бути адекватно описані за допомогою математичних моделей. Наявність моделі дозволяє замінити тривалі трудомісткі експерименти, які дорого коштують безпосередньо на об'єкті машинами, що забезпечує вибір оптимальних параметрів об'єкта для розв'язання задач.

На теперішній час у зв'язку з інтенсивним розвитком обчислювальної техніки та відповідного математичного забезпечення метод моделювання "важких" задач на ЕОМ став одним з головних заходів теоретичних і прикладних досліджень [1]. Жодна серйозна задача не розв'язується сьогодні без застосування методу математичного моделювання.

Основою побудови математичної моделі, як зазначає А.Г. Іваненко, може бути або таблиця дослідних даних, або уявлення автора моделі про систему, яку моделюють [2]. При побудові технічних систем, одержано таблицю дослідних даних. Застосованим на її основі експериментальним методам побудови моделі передує процес попереднього дослідження ще не побудованої системи на основі апріорних даних, які складають уявлення автора про майбутню систему і формалізовані у вигляді математичних залежностей.

При формалізації процесів, які супроводжують функціонування технічних систем, найчастіше їх описують у формі звичайних диференціальних рівнянь. Точний аналітичний розв'язок можна отримати тільки для небагатьох типів цих рівнянь, що обумовило широке застосування для дослідження таких систем за допомогою методів їх числового інтегрування використання сучасних ЕОМ. Однак об'єм та складність технічних систем а, отже, математичних моделей випереджають можливості ЕОМ їх досліджувати. Задача ще більше ускладнюється при проведенні статистичного аналізу характеристик систем, наприклад, методом статистичних досліджень у межах спільного застосування імітаційного та ймовірнісного підходів у моделюванні. Крім того, при розв'язанні диференціальних рівнянь числовими методами має місце залежність точності розв'язку від довжини інтервалу інтегрування. Для досягнення необхідної точності треба зменшувати довжину інтервалу інтегрування, що, у свою чергу, призводить до різкого зростання витрат машинного часу.

Таким чином, назріла необхідність у розробці нових методів побудови та дослідження математичних моделей систем, які б відповідали можливостям ЕОМ і забезпечували необхідну точність результатів.

В останні роки для дослідження процесів різних за своєю природою набув поширення метод, оснований на інформаційному підході у моделюванні, – самоорганізація моделей на ЕОМ. Метод групового врахування аргументів, що базується на цьому методі, створений і розвинутий А.Г. Івахненком та його учнями [3], здійснив революцію у теорії підтверджену на практиці синтезу моделей за експериментальними даними і теорією передбачення. Не менш плідним виявилося застосування цього методу для синтезу наближеного розв'язку диференціального рівняння або іншої складної функції апроксимацією результатів їх числового розв'язання деякої іншої більш придатної для дослідження функції. Проте класичне застосування методу групового врахування аргументів виявилося мало ефективним через накладення на похибку дискретизації числового інтегрування похибки апроксимації. Точність одержаного розв'язку буде гіршою за точність числового інтегрування, хоч витрати машинного часу на розв'язання аналітичної апроксимуючої функції скоротяться.

У цій ситуації для ефективного підвищення точності наближеного аналітичного розв'язку можна запропонувати метод групового врахування аргументів за результатами числового інтегрування. Як уже відмічалося, залежність точності розв'язку від довжини інтервалу інтегрування є істотним недоліком числових методів. Проте при синтезі наближеного аналітичного розв’язку методом групового врахування аргументів за результатами числового інтегрування можливе використання цієї залежності для підвищення точності одержуваного розв’язку. Для цього необхідно включити довжину інтервалу як додатковий аргумент у шукану апроксимуючу залежність. Після одержання цієї залежності методом групового врахування аргументів належить вилучити з неї довжину інтервалу інтегрування, спрямовуючи її до межі – нуля. Одержаний таким чином розв’язок уже не буде залежати від довжини інтервалу інтегрування і з точністю до похибки апроксимації буде збігатися з точним розв’язком. Похибка апроксимації при цьому може бути знижена до допустимого значення, наприклад, відповідним вибором класу апроксимуючої функції планування та ортогоналізацією вихідної матриці для алгоритму методу групового врахування аргументів, який використовується для удосконалення самого алгоритму.

У теорії та практиці числового інтегрування відомі методи, як і запропонований метод, основані на екстраполяції до межі (екстраполяція Річардсона) [4]. У цих методах екстраполяція здійснюється на кожному кроці інтегрування Nh обчисленням значення функції для різних значень половини відстані nh, n=1,2,…, N та побудови апроксимуючої залежності:

$$F(h) = y(X, h).$$

Вилучення із цієї залежності величини $h \to 0$ дає кращу оцінку значення функції на даній відстані, ніж числове розв’язання з будь-якою довжиною інтервалу nh. Оскільки апроксимація здійснюється на кожному кроці інтегрування, її називають локальною.

У розглядуваному методі здійснюється екстраполяція за довжиною інтервалу інтегрування на всьому заданому інтервалі, причому в результаті одержується не числове значення частинного розв’язку в окремій точці, а загальний аналітичний розв’язок на інтервалі інтегрування. Тому метод, що пропонується, можна назвати методом глобальної аналітичної екстраполяції.

Розглянемо задачу синтезу наближеного аналітичного звичайного диференціального рівняння методом групового врахування аргументів у такій постановці. Подамо це рівняння у найбільш загальному вигляді:

$$F(t, y, \dot{y}) = 0, \tag{1}$$

де t – аргумент; y – шукана функція, яка є загальним розв'язком рівняння (1).

Загальний розв'язок має довільну сталу C, яка є деякою функцією початкових вимог $C = C(t_0, y_0)$, а також змінні коефіцієнти $a_1, a_2, ..., a_0$, які є заданими функціями аргументу або випадковими функціями. З урахуванням цього загальний розв'язок можна записати у вигляді:

$$y = y(t, t_0, y_0, g_1, g_2, ..., g_r, h). \tag{2}$$

Одержати точний аналітичний розв'язок не завжди вдається, а при інтегруванні можна одержати лише частинний розв'язок, причому він буде залежати від довжини інтервалу інтегрування.

Включимо у загальне розв'язаня рівняння (1) як додатковий аргумент довжину інтервалу h, одержавши наближене рівняння, з точністю до похибки дискретизації, яке збігається з точним розв'язком (2):

$$\tilde{y} = \tilde{y}(t, t_0, y_0, g_1, g_2, ..., g_r, h). \tag{3}$$

Інтегруючи вихідне рівняння (1) у заданому інтервалі $t_0 \le t \le T$ при різних фіксованих значеннях параметрів $y_0, g_1, g_2, ..., g_r$ та h, одержуємо таблицю вихідних даних у вузлах апроксимації $t_k \in [t_0, T]$:

$$Y = Y(t_k, y_{0i}, g_{1q}, g_{2p}, ..., g_{r\lambda}, h_j),$$
$$k = 1,2,...,n; \quad i = 1,2,...,m; \quad q = 1,2,..., \eta;$$
$$p = 1,2,...,\xi; \quad \lambda = 1,2,...,\zeta; \quad j = 1,2,..., l$$

для відшукання структури та обчислення параметрів функції (3) методом групового врахування аргументів. Приймаючи тепер в отриманому виразі довжину $h = 0$, маємо наближений загальний розв'язок

$$\hat{y} = \hat{y}\ (t, t_0, y_0, g_1, g_2, ..., g_r), \tag{4}$$

який не залежить від довжини інтервалу і не має похибки дискретизації, а отже, з точністю до похибки апроксимації збігається з точним розв'язком (2).

Як приклад синтезуємо наближений аналітичний розв'язок лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$(l + t^2)\dot{y} - 2ty = 6t, \tag{5}$$

який має точний загальний аналітичний розв'язок:

$$y = C(l + t^2) - 3.$$

Для спрощення розв'язання задачі при зберіганні загальності виконаємо синтез при фіксованій початковій вимозі $y_0 = 0$ на інтервалі [0, 12]. Тоді $C = 3$ і точний частинний розв'язок набуде вигляду

$$y = 3t^2. \tag{6}$$

Для відшукання структури та обчислення параметрів апроксимуючої функції використаємо лінійний багаторядний алгоритм методу групового врахування аргументів CML [5].

Для створення сприятливих умов роботи алгоритму шляхом формування ортогональної вхідної матриці значень аргументів беремо значення t та h в інтервалі [1,..., l] та обчислюємо перші три многочлени Чебишева за формулами [6]:

$$\begin{aligned} &T_1(t) = 1; \quad T_2(t) = t_н; \quad T_3(t) = 2t_н^2 - 1; \\ &T_1(h) = 1; \quad T_2(h) = h_н; \quad T_3(h) = 2h_н^2 - 1, \end{aligned} \tag{7}$$

де $t_н$, $h_н$ – нормовані значення:

$$t_н = \frac{2t-(t_{max}+t_{min})}{t_{max}-t_{min}}; \qquad h_н = \frac{2h-(h_{max}+h_{min})}{h_{max}-h_{min}}. \tag{8}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді лінійної комбінації

$$\hat{y} = \sum_{\rho=1}^{3} \sum_{\delta=1}^{3} \alpha_{\rho\delta} T_\rho(t) T_\delta(h).$$

Вихідну матрицю значень аргументів $T_\rho(t)T_\delta(h)$ беремо для таких вузлів апроксимації

$$t_k = 1{,}2(k-1), \; k = 1,2,..., l$$

при значеннях довжини відстані інтегрування

$$h_j = 0{,}12/2^{j-1}, \quad j = 1,2,...,5.$$

Результати точного розв'язку за формулою (6), числового розв'язку за схемою Ейлера рівняння (5) з різною довжиною інтервалу h, а також абсолютну

$$\Delta y = y - Y \tag{9}$$

і відносну

$$\delta_y = \frac{|\Delta y|}{y_{ср}} 100\% \tag{10}$$

похибки інтегрування у вузлах апроксимації наведено у табл. 1 та рис. 1, 2. Тут

$$y_{ср} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |y_k|.$$

Використовуючи алгоритм CML за критерієм середньоквадратичного відхилення на всіх точках B (табл. 1) вихідних даних

$$\Delta(B) = \left(\sum_{y_н \in B} (y - \hat{y})^2_н \right)^{1/2} \to \min,$$

дістаємо кращу модель:

$$\hat{y} = 150{,}7325 T_1(t)T_1(h) - 10{,}92557 T_1(t)T_2(h) + 0{,}2604 T_1(t)T_3(h) +$$

$$+ 200{,}2890 T_2(t)T_1(h) - 15{,}1558 T_2(t)T_2(h) + 0{,}1274 T_2(t)T_3(h) +$$

$$+ 49{,}4024 T_3(t)T_1(h) - 4{,}2447 T_3(t)T_2(h) + 0{,}00001 T_3(t)T_3(h).$$

Після зворотного переходу до очевидного вираження функції через $t_н$ і $h_н$ у відповідності з рівнянням (7) та рознормування t і h за формулами (8) маємо:

$$\hat{y}(t,h) = -0{,}0065 - 9{,}11h + 73{,}8889h^2 + 0{,}164t + 3{,}6483th +$$

$$+ 11{,}7963th^2 + 2{,}9804t^2 - 3{,}9303t^2h.$$

При $h = 0$ апроксимуючий поліном набуває вигляду

$$\hat{y}(t) = -0{,}0065 + 0{,}164t + 2{,}9804t^2. \tag{11}$$

За формулами (9) і (10) обчислимо абсолютну та відносну похибки апроксимації функцією (11) точного розв'язку (6) диференціального рівняння (4). Результати обчислень наведено у табл. 2 та на рис. 1,2.

Таблиця 1

Похибка інтегрування у вузлах апроксимації

	t	0,0	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8	12,0
	y	0,0	4,3200	17,2800	38,8800	69,1200	108,0000	155,5200	211,6800	276,4800	349,9200	432,0000
h= 0,12	Y	0,0	3,6143	16,2175	35,2804	61,5577	95,0428	135,7333	183,6280	238,7265	301,0276	370,5308
	Δy	0,0	0,7057	1,0625	3,5996	7,5623	12,9572	19,7867	28,0520	37,7535	48,8924	61,4692
	δ_y,%	0,0	0,4667	0,7013	2,3807	5,0015	8,5695	13,0864	18,5228	24,9691	32,3360	40,6561
h= 0,06	Y	0,0	4,3624	16,7320	37,0001	65,1510	101,1812	145,0893	196,8749	256,5374	324,0745	399,4878
	Δy	0,0	-0,0424	0,5478	1,8799	3,9690	6,8188	10,4307	14,8051	19,9426	25,8455	32,5122
	δ_y,%	0,0	0,0280	6,3623	1,2434	2,6250	4,5098	6,8985	9,7917	13,1894	17,0934	21,5056
h= 0,03	Y	0,0	4,3424	17,0014	37,9179	67,0836	104,4967	150,1564	204,0625	266,2139	336,6072	415,2451
	Δy	0,0	-0,0224	0,2786	0,9621	2,0364	3,5033	5,3636	7,6175	10,2661	13,3128	16,7549
	δ_y,%	0,0	0/0148	0,1842	0,6363	1,3468	2,3170	3,5473	5,0380	6,7896	8,8046	11,0818
h=0,015	Y	0,0	4,3315	17,1395	38,3931	68,0886	106,2251	152,8024	207,8205	271,2773	343,1660	423,4922
	Δy	0,0	-0,0115	0,1405	0,4869	1,0314	1,7749	2,7176	3,8595	5,2027	6,7540	8,5078
	δ_y,%	0,0	0,0076	0,0929	0,3220	0,6821	1,1738	1,7973	2,5525	3,4407	4,4667	5,6267
h=0,0075	Y	0,0	4,3258	17,2093	38,6337	68,5979	107,1014	154,1442	209,7263	273,8428	346,4819	427,6558
	Δ_y	0,0	-0,0058	0,0707	0,2464	0,5221	0,8986	1,3758	1,9537	2,6372	3,4380	4,3442
	δ_y,%	0,0	0,0038	0,0468	0,1628	0,3452	0,5943	0,9099	1,2921	1,7440	2,2737	2,8730

Таблиця 2

Результати обчислень синтезованого наближеного аналітичного розв'язку (11) диференціального рівняння (5)

t	y	y	Δy	δ_y, %
0,0	0,0	-0,0065	0,0065	0,0043
1,2	4,3200	4,4821	-0,1621	0,1071
2,4	17,2800	17,5542	-0,2742	0,1813
3,6	38,8800	39,2099	-0,3299	0,2181
4,8	69,1200	69,4491	-0,3291	0,2175
6,0	108,0000	108,2719	-0,2719	0,1796
7,2	155,5200	155,6782	-0,1582	0,1043
8,4	211,6800	211,6681	0,0119	0,0846
9,6	276,4800	276,2416	0,2384	0,1585
10,8	349,9200	349,3986	0,5215	0,3457
12,0	432,0000	431,1391	0,8610	0,5707

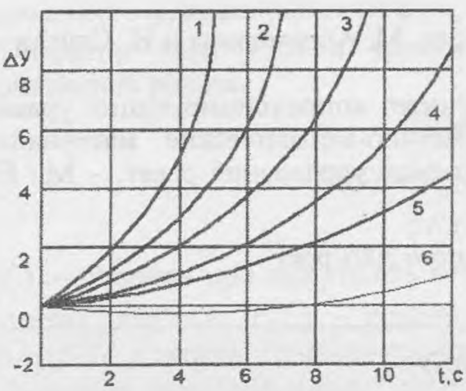

Рис. 1. Абсолютна похибка:
1, 2, 3, 4, 5 – інтерполювання з $h_j = 0{,}12/12^{j-1}$, $j = 1,2, ..., 5$;
6 – інтерполяція аналітичного розв'язку $h - 0$

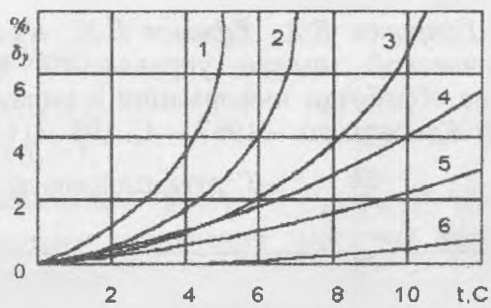

Рис. 2. Відносна похибка:
1, 2, 3, 4, 5 –інтегрування з $h_1 = 0{,}12/12^{i-1}$, $j = 1,2, ..., 5$;
6 – інтерполяція аналітичного розв'язку $h - 0$

Запропонованим методом синтезовано наближений аналітичний розв'язок (11) диференціального рівняння (5). Похибка одержаного розв'язку на більшій частині інтервалу у декілька разів, а на окремих ділянках інтервалу на декілька порядків, менша від похибки дискретизації при числовому інтегруванні рівняння (5). Для меншої з використаних для синтезу довжиною відстані (70 – лише на початковій ділянці інтервалу, де спостерігається слабка залежність точності інтегрування від довжини кроку) похибка апроксимації перевершує похибку дискретизації.

Таким чином, у роботі запропоновано метод синтезу наближеного аналітичного розв'язку звичайного диференціального рівняння за результатами його числового інтегрування, оснований за методом групового врахування аргументів з використанням глобальної аналітичної екстраполяції до межі за довжиною інтервалу інтегрування.

Наближений аналітичний розв'язок, який синтезується запропонованим методом, не має похибки дискретизації і з точністю до похибки апроксимації збігається до точного розв'язку. Це означає, що метод глобальної аналітичної екстраполяції дозволяє повернутися до безперервного математичного опису у формі наближеного загального аналітичного розв'язку після числового розв'язання складного рівняння з одночасним усуненням похибки дискретизації.

Таким чином, при дослідженні систем методом математичного моделювання запропонований метод дає можливість замінити багаторазове інтегрування звичайного диференціального рівняння або численне розв'язання іншої складної функції обчисленням його наближеного розв'язку за синтезованим аналітичним виразом, що забезпечить зменшення часу та потрібної пам'яті ЕОМ з одночасним збільшенням точності розв'язку задачі.

Список літератури

1. *Глушков В.М., Иванов В.В., Яценко В.М.* Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983. – 302 с.

2. *Ивахненко А.Г.* Кибернетика – наука о моделировании связи и управлении в сложных системах // Автоматика. – 1982. – № 1. – С. 3–15.

3. *Ивахненко А.Г.* Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.

4. *Современные* численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дк. Холл, Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

5. *Юрачковский Ю.П.* Сходимость многорядных алгоритмов МГУА // Автоматика. 1981. – № 3. – С. 32–36.

6. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

7. *Бояринов В.А., Ефимов Е.В., Киселев В.И.* Синтез аппроксимирующих уравнений математической модели управляемой ракеты // Научно-методические материалы по проблеме обработки информации и управления в системах управления ракет. – М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – 1987. – С. 108 – 114.

Стаття надійшла до редакції 7 лютого 2001 року.

СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗКУ

УДК 629. 735. 085

В.Г. Мелкумян

КЕРУВАННЯ РЕСУРСАМИ В СИСТЕМІ ЕКСПЛУАТАЦІЇ РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ЗАСОБІВ ОБСЛУГОВУВАННЯ ПОВІТРЯНОГО РУХУ

Розглянуто деякі аспекти алгоритмічного забезпечення системи керування ресурсами при експлуатації радіоелектронних засобів обслуговування повітряного прямування.

Система експлуатації радіоелектронних засобів обслуговування повітряного руху відноситься до класу складних технологічних систем (СТС) обслуговуючого типу [1]. Ефективність систем подібного класу значною мірою визначається рівнем споживаних у процесі виробничої діяльності ресурсів при формуванні «вихідного продукту» СТС – своєчасного виконання заявок споживачів. В обгрунтуванні структур і характеристик системи експлуатації радіоелектронних засобів обслуговування повітряного руху при проектуванні нової або корінної модернізації існуючої системи важливе місце займає задача оптимізації процесу споживання і розподілу трудових і матеріальних ресурсів з метою їхньої економії в процесі виробничої діяльності відповідних служб авіапідприємств при заданому рівні забезпечення безпеки і регулярності польотів. Розглянемо деякі аспекти алгоритмічного забезпечення системи керування ресурсами у СТС експлуатації радіоелектронних засобів