УДК 621.372.54

В.А. Игнатов, С.М. Первунинский

ФИЛЬТРЫ, ОПТИМАЛЬНЫЕ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Выполнен синтез оптимальных параметров обобщенного степенного оператора, осуществляющего оценку входного сигнала, зашумленного аддитивными помехами негауссовского типа. Показано, что параметры обобщенного оператора определяются по оптимальным параметрам степенного функционального оператора.

Задачи эффективной обработки наблюдаемого на фоне шумов информационного сигнала, рассматриваемые в статистической радиотехнике, теории оценивания и теории оптимального управления [1; 2], стимулируют развитие теории оптимальной фильтрации. Негауссовый характер случайных процессов, наиболее полно отражающий структуру реальных помех, предполагает применение нелинейных операторов преобразования (фильтрации) сигналов, поступающих на вход фильтра. К классу нелинейных операторов относится полиномиальный степенной функциональный оператор, реализующий оценку сигнала на выходе фильтра по формуле

$$\eta_S(t) = \sum_{i=0}^{S} H_i[\xi(t)], \tag{1}$$

где $\xi(t)$ – наблюдаемый случайный входной процесс, образованный из аддитивной смеси случайного информационного процесса $x(t)$ и шума $n(t)$; $H_i[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\tau)\xi^i(t-\tau)d\tau$ – степенной функциональный оператор i-го порядка; $h_i(\tau)$, $i = \overline{1,S}$ – ядро оператора; S – порядок полиномиального оператора.

Методика синтеза оптимальных ядер оператора (1) по критерию минимума среднеквадратичной ошибки фильтрации

$$J_S = M\left\{[x(t) - \eta_S(t)]^2\right\} = \min_{h_i, i=\overline{1,S}}, \tag{2}$$

где M – символ операции вычисления математического ожидания, приведена в работе [3].

Предполагая дифференцируемость случайного процесса $\xi(t)$ до порядка $m(m = 1,2...)$, поставим задачу синтеза фильтра, оптимального по критерию (2), для случая, когда оператор оценки описывается выражением

$$\eta_{s,m}(t) = \sum_{i=0}^{S} \left\{D_i[\xi(t)] + H_i[\xi(t)]\right\}, \tag{3}$$

где $D_i[\xi(t)] = \sum_{k=1}^{m} q_{i,k}\, d^k\xi^i(t)/dt^k$ – оператор дифференцирования; $q_{i,k}$ – некоторые константы (параметры оператора).

Фильтр, обеспечивающий преобразование входного сигнала в соответствии с оператором (3), назовем обобщенным степенным функциональным фильтром порядка* $S+m$.

Из уравнения (3) видно, что $D_0[\xi(t)] = 0$. Поэтому параметры $q_{0,k}$, $k = \overline{1,m}$ на оценку (3) влияния не оказывают и их можно принять равными нулю.

Полагая полезный сигнал и помеху центрированными с начальными моментами первого порядка $\alpha_1^x(t) = \alpha_1^n(t) = 0$, из требования несмещенности оценки (3) находим

---

* Термин "обобщенный фильтр" впервые введен в работе [4] при рассмотрении задачи линейной фильтрации (для $S = 1$) случайных гауссовых процессов.

$$H_0[\xi] = -\sum_{i=1}^{S} \left[\overline{D_i[\xi]} + \overline{H_i[\xi]}\right], \tag{4}$$

где
$$\overline{D_i[\xi]} = M\{D_i[\xi(t)]\} = \sum_{k=1}^{m} q_{i,k}\, d^k \alpha_i^{\xi}(t)/dt^k\ ;$$

$$\overline{H_i[\xi]} = M\{H_i[\xi(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\tau)\alpha_i^{\xi}(t-\tau)d\tau\,,$$

$\alpha_i^{\xi}(z) = M\{\xi^i(z)\}$ – начальный момент i -го порядка случайного процесса $\xi(z), z = \{t, t-\tau\}$.

Подстановка выражения (4) в уравнение (3) приводит к оператору

$$\eta_{S,m}(t) = \sum_{i=1}^{S} \{D_i[\xi_0(t)] + H_i[\xi_0(t)]\}\ , \tag{5}$$

где под величиной $\xi_0(t)$ в операторах D_i, H_i понимают центрированный случайный процесс $\xi_0^i(t) = \xi^i(t) - \alpha_i^{\xi}(t)$.

Задачу об оптимальном преобразовании процесса $\xi(t)$ оператором (5) сформулируем как задачу минимизации в гильбертовом пространстве разности функций $\eta_{S,m}(t)$, $x(t)$, определенных на декартовом произведении $Z = \Xi_0 \times X$ пространств Ξ_0 и X, образованных реализациями случайных процессов $\xi_0(t)$ и $x(t)$ [5].

Рассматривая систему цилиндрических множеств

$$B_{n+k} = \{z : z(t_1) \in z_1, \ldots, z(t_{n+k}) \in z_{n+k}\}, \quad n, k = 1, 2, \ldots,$$

где $-\infty < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+k} < \infty$; z_i, $i = 1, n+k$ – открытые множества в интервале $R = (-\infty, \infty)$, определяем, пользуясь совместной плотностью вероятностей $\omega_{n,k}^{\xi,x}(\xi_1, \ldots, \xi_n, x_1, \ldots, x_k)$ случайных процессов $\xi(t)$ и $x(t)$, вероятностную меру данных множеств по формуле

$$\mu(B_{n+k}) = \int_{z_1} \ldots \int_{z_{n+k}} \omega_{n,k}^{\xi,x}(\xi_1, \ldots, \xi_n; x_1, \ldots, x_k) \prod_{i=1}^{n} d\xi_i \prod_{j=1}^{k} dx_j\,.$$

Выбранные цилиндрические множества образуют σ – алгебру в пространстве Z с мерой всего пространства, равной единице, т.е. Z является вероятностным пространством. Соответственно пространства Ξ_0 и X с учетом свойства согласованности плотности распределения $\omega_{n.k}^{\xi,x}(\xi_1, \ldots, \xi_n; x_1, \ldots, x_k)$ по переменным ξ_i и x_i также являются вероятностными, входящими в пространство Z как в подпространства.

Предполагая интегрируемость в квадрате по мере μ случайных функций $\eta_{S,m}(t), x(t)$, заданных на пространствах Ξ_0 и X, вводим гильбертовы пространства $L_2(\Xi_0)$ и $L_2(X)$, квадрат нормы в которых определяется интегралами Лебега

$$J_\xi = \int_{\Xi_0} \eta_{S,m}^2(t) d\mu_\xi\,,\ J_X = \int_X x^2(t) d\mu_X\,.$$

Мера цилиндрических множеств B_n равна

$$\mu_V(B_n) = \int_{z_1} \ldots \int_{z_n} \omega_n^V(V_1, \ldots, V_n) \prod_{i=1}^{n} dV_i\,, V = \{x(t), \xi(t)\},$$

где $\mu_V(B_n) = \mu_V$.

Норма элементов пространства $L_2(Z)$ порождается скалярным произведением

$$\left(f_1[\xi,x],f_2[\xi,x]\right)=\int_Z f_1[\xi,x]f_2[\xi,x]\,d\mu_Z\,, \tag{6}$$

где $f_i[\xi,x]=f_i[\xi(t),x(t)]\in L_2(Z)$, $\quad i=1,2$.

Теперь задачу фильтрации в классе операторов (5) с критерием оптимизации (2) можно сформулировать как требование минимизации нормы разности $\eta_{S,m}[\xi_0]-x(t)$ в пространстве $L_2(Z)$:

$$\left\|\eta_{S,m}[\xi_0]-x(t)\right\|_{L_2(Z)}=\min_{h_i,q_{i,k}}.$$

Решение задачи, как показано в работе [5], выражается равенством

$$\left(\eta_{S,m}[\xi\;]-x(t),y[\xi]\right)_{L_2(Z)}=0,\forall y[\xi]\in L_2(\Xi_0).$$

Таким образом, можно утверждать, что оптимальные параметры оператора (3) удовлетворяют системе уравнений

$$\left(\eta_{S,m}[\xi_0]-x(t),\xi_0^i(\tau)\right)_{L_2(\Xi_0)}=0,\ i=\overline{1,S},\ t,\tau\in(-\infty,\infty). \tag{7}$$

Поскольку $\eta_{S,m}[\xi_0]$ представлена в выражении (5) суммой функций $D_i[.]$, $H_i[.]$, $i=\overline{1,S}$, каждая из которых принадлежит $L_2(\Xi_0)$, то равенство (6) можно записать системой равенств

$$\begin{aligned}&\left(\eta_{S,m}[\xi_0]-x(t),D_i[\xi_0]\right)_{L_2(\Xi_0)}=0,\ i=\overline{1,S};\\&\left(\eta_{S,m}[\xi_0]-x(t),H_i[\xi_0]\right)_{L_2(\Xi_0)}=0,\ i=\overline{1,S}.\end{aligned} \tag{8}$$

Равенства (8) подстановкой операторов $D_i[.]$, $H_i[.]$, $i=\overline{1,S}$ из уравнения (3) с применением свойств операции скалярного произведения приводятся к виду

$$\left(\eta_{S,m}[\xi_0]-x(t),d^k\xi_0^i(t)/dt^k\right)_{L_2(\Xi_0)}=0,\ i=\overline{1S},\ k=\overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}h_i(t-\tau)U_i(t,\tau)d\tau=0,\ i=\overline{1,S}, \tag{10}$$

где $\quad U_i(t,\tau)=\left(\eta_{S,m}[\xi_0]-x(t),\xi_0^i(\tau)\right)_{L_2(\Xi_0)}$.

Однородная система интегральных уравнений (10) имеет решение в интервале $t\in(-\infty,\infty)$ лишь в случае выполнения системы равенств (7). Более того, при решении системы (7) выполняется и система уравнений (9). Это легко проверяется путем преобразования каждого уравнения системы (7) оператором $d^k/d\tau^k$, $k=\overline{1,m}$ с последующей заменой переменной τ на t.

Систему равенств (7) можно получить и иначе, непосредственно из уравнений (6). Поскольку $\xi_0(t)$ как случайная функция, интегрируемая с квадратом, принадлежит пространству $L_2(\Xi_0)$, то из выражения (6), когда $y[\xi]=\xi_0^i(t)$, получается система равенств (7).

Раскрывая запись уравнений системы (7) с подстановкой обозначений переменных из уравнения (3), имеем

$$\sum_{j=1}^{S}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}h_j(t-\tau)F_{j,i}^{\xi,\xi}(t-\tau,t-z)d\tau+\sum_{k=1}^{m}q_{i,k}F_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(t,t-z)\right\}=F_{j,i}^{x,\xi}(t,t-z),\ i=\overline{1,S}, \tag{11}$$

где $F_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(t,v)=\left(d^k\xi_0^j(t)/dt^k,\xi_0^i(v)\right)$ – моментная функция $i+j$-го порядка случайных процессов $d^k\xi_0^j(t)/dt^k$ и $\xi_0^i(v)$; $F_{1,i}^{x,\xi}(t,v)=\left(x(t),\xi_0^i(v)\right)$.

Получим решение системы (11) в предположении, что процессы $x(t)$, $n(t)$ стационарные и стационарно связанные с порядком стационарности $2S$. При таком допущении система (11) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{S}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h_j(t-\tau)F_{j,i}^{\xi,\xi}(\tau,0)d\tau+\sum_{k=1}^{m} q_{i,k}F_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(t,0)\right\}=F_{j,i}^{x,\xi}(t,0),\ i=1,S. \qquad (12)$$

Выполняя преобразование Фурье уравнений в системе (12), получаем

$$\sum_{j=1}^{S}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_j(\omega)\hat{F}_{j,i}^{\xi,\xi}(\omega)+\sum_{k=1}^{m} q_{i,k}\hat{F}_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(\omega)\right\}=\hat{F}_{j,i}^{x,\xi}(\omega),\quad i=1,S, \qquad (13)$$

где $\hat{h}_j(\omega)$ – спектральная функция ядра $h_j(t)$; $\hat{F}_{j,i}^{x,\xi}(\omega)$ – спектральные плотности моментных функций $F_{j,i}^{x,\xi}(t,0)$.

В уравнениях (13) значения величин

$$\hat{F}_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(t,0)\,e^{-j\omega t}dt \qquad (14)$$

можно записать несколько иначе. Для этого в уравнении (14), представив

$$F_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(t)=d\left(F_{j,i}^{\xi^{(k-1)},\xi}(t,0)\right)\Big/dt,$$

выполним интегрирование по частям. В результате получим

$$\hat{F}_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(\omega)=\exp(-j\omega t)F_{j,i}^{\xi^{(k-1)},\xi}(t,0)\,\Big|_{-\infty}^{\infty}+j\omega\int_{-\infty}^{\infty}F_{j,i}^{\xi^{(k-1)},\xi}(t,0)\exp(-j\omega t)dt\,. \qquad (15)$$

Поскольку для реальных случайных процессов $F_{j,i}^{\xi^{(k-1)},\xi}(t,0)$ при $t\to\pm\infty$ обращается в ноль, а $|\exp(-j\omega t)|=1$, выражение (15) запишем как

$$\hat{F}_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(\omega)=j\omega\hat{F}_{j,i}^{\xi^{(k-1)},\xi}(\omega).$$

Повторяя в уравнении (14) операцию интегрирования по частям k раз, получаем

$$\hat{F}_{j,i}^{\xi^{(k)},\xi}(\omega)=(j\omega)^k\hat{F}_{j,i}^{\xi,\xi}(\omega),\quad k=1,m. \qquad (16)$$

Используя равенство (16) в уравнении (13), записываем

$$\sum_{j=1}^{S}\hat{h}_j(\omega)\hat{F}_{j,i}^{\xi,\xi}(\omega)=\hat{F}_{1,i}^{x,\xi}(\omega)-\sum_{n=1}^{S}\hat{F}_{n,i}^{\xi,\xi}(\omega)D_n(\omega),\ i=1,S, \qquad (17)$$

где $D_n(\omega)=\sum_{k=1}^{m}q_{n,k}(j\omega)^k$.

Теперь , пользуясь формулами Крамера, решим линейную систему уравнений (17):

$$\hat{h}_j(\omega)=\hat{h}_{0,j}(\omega)-\delta\hat{h}_j(\omega),\ j=1,S, \qquad (18)$$

где $\hat{h}_{0,j}(\omega)=A_j[F(x,\xi)]/\Delta_S(\omega)$ – спектральная функция оптимального полиномиального фильтра с оператором оценки, определяемым по выражению (1); $\delta\hat{h}_j(\omega)=A_j[F(D)]/\Delta_S(\omega)$ – приращение спектральной функции ядра i-го порядка в операторе (5) за счет введения оператора D_j; $A_j[F]$ – определитель, получаемый из матрицы коэффициентов заменой j-го столбца на столбец F; $\Delta_S(\omega)$ – определитель матрицы коэффициентов в системе уравнений (17).

В качестве столбцов $F(x,\xi)$ и $F(D)$ в выражении (18) используются

$$F(x,\xi)=\left\{\hat{F}_{1,i}^{x,\xi}(x,\xi)\right\}_{i=1,S}^{T};\ F(D)=\left\{\sum_{j=1}^{S}\hat{F}_{j,i}^{\xi,\xi}(x,\xi)D_j(\omega)\right\}_{i=1,S}^{T}. \qquad (19)$$

Вычисление определителя $A_j[F(D)]$ можно упростить, используя свойство линейности определителя по элементам столбца. Разлагая данный определитель по S составляющим выражения (19), получаем

$$A_j[F(D)] = \sum_{n=1}^{S} D_n[\omega] A_j\left[\hat{F}_n^{\xi}(\omega)\right],$$

где столбец $\hat{F}_n^{\xi}(\omega) = \left\{\hat{F}_{n,i}^{\xi,\xi}(\omega)\right\}_{i=1,S}^{T}$.

Замечая, что $A_j\left[\hat{F}_n^{\xi}(\omega)\right] = \begin{cases} 0, j \neq n, \\ \Delta_S(\omega), j = n \end{cases}$, величину $A_j[F(D)]$ определяем из выражения

$$A_j[F(D)] = D_j[\omega]\Delta_S(\omega), j = 1, S \tag{20}$$

Подстановка уравнения (20) в выражение (18) позволяет описать спектры ядер обобщенного фильтра равенствами

$$\hat{h}_j(\omega) = \hat{h}_{0,j}(\omega) - D_j(\omega), j = 1, S. \tag{21}$$

Система (21) показывает, что спектры ядер $\hat{h}_j(\omega), j = 1, S$, оптимального обобщенного полиномиального фильтра образованы из спектра j-го ядра, найденного для оптимального полиномиального фильтра, с исключением величины $D_j(\omega)$. Согласно операционному исчислению полином $D_j(\omega)$ в уравнении (17) соответствует во временной области оператору $D_j(.) = \sum_{k=1}^{m} q_{j,k}(d/dt)^k$. Поэтому из выражения (21) следует, что введение в оператор (3) оператора дифференцирования приводит для фильтра, оптимального в классе обобщенных степенных полиномов, к выделению в спектрах ядер оптимального степенного фильтра соответствующей части $D_j(\omega), j = 1, S$.

Записывая выражение (21) в виде

$$\hat{h}_{0,j}(\omega) = \hat{h}_j(\omega) + D_j(\omega), \quad j = 1, S, \tag{22}$$

заключаем, что параметры оператора $D_j(\omega)$ в выражении (3) следует определять по спектральным функциям ядер оптимального полиномиального фильтра путем выделения в последних части, связанной с оператором дифференцирования. Поскольку согласно выражению (18) спектральные функции $\hat{h}_j(\omega), j = 1, S$, имеют вид отношения двух полиномов, то разложение (22) для рассматриваемого отношения выполнимо, когда степень полинома в числителе больше или равна степени полинома в знаменателе.

Проведенный анализ задачи синтеза фильтра, оптимального в классе обобщенных степенных функциональных операторов, показывает, что оптимальные параметры обобщенного оператора следует определять по результатам синтеза фильтра, оптимального в классе полиномиального степенного функционального оператора. Если в спектральных функциях ядер синтезированного фильтра, заданных отношением полиномов, порядок полинома в числителе меньше порядка полинома в знаменателе, то синтезированный оптимальный степенной полиномиальный фильтр является оптимальным и в классе обобщенных степенных функциональных операторов.

Список литературы

1. *Тихонов В.И.* Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986. – 296 с.

2. *Игнатов В.А., Стеклов В.Л., Уваров Р.В.* Коррекция нелинейных автоматических систем. – К.: Техніка, 1993. – 192 с.

3. *Кунченко Ю.П., Первунинский С.М.* Нелинейные полиномиальные инерционные фильтры// Тез. докл. школы-семинара ”Вероятностные модели и обработка случайных сигналов и полей”. – Тернополь, 1992. – С. 5-9.

4. *Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. – М.: Сов. радио, 1960. – 448 с.

5. *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

Стаття надійшла до редакції 27 листопада 2000 року.

УДК 629.735.33.15

В.М. Казак, В. А. Боярінов, І.В. Боярінов

СИНТЕЗ НАБЛИЖЕНОГО АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГРУПОВОГО ВРАХУВАННЯ АРГУМЕНТІВ

Розглянуто спосіб синтезу приблизного розв'язку звичайного диференціального рівняння за результатами його числового інтегрування, оснований на методі групового врахування аргументів з використанням глобальної аналітичної екстраполяції до межі по довжині інтервалу інтегрування.

Етапи оптимального проектування істотно відрізняються один від одного за складом задач та методами їх розв'язання. Особливо ефективно проектуються системи, які можуть бути адекватно описані за допомогою математичних моделей. Наявність моделі дозволяє замінити тривалі трудомісткі експерименти, які дорого коштують безпосередньо на об’єкті машинами, що забезпечує вибір оптимальних параметрів об’єкта для розв'язання задач.

На теперішній час у зв’язку з інтенсивним розвитком обчислювальної техніки та відповідного математичного забезпечення метод моделювання “важких” задач на ЕОМ став одним з головних заходів теоретичних і прикладних досліджень [1]. Жодна серйозна задача не розв'язується сьогодні без застосування методу математичного моделювання.

Основою побудови математичної моделі, як зазначає А.Г. Іваненко, може бути або таблиця дослідних даних, або уявлення автора моделі про систему, яку моделюють [2]. При побудові технічних систем, одержано таблицю дослідних даних. Застосованим на її основі експериментальним методам побудови моделі передує процес попереднього дослідження ще не побудованої системи на основі апріорних даних, які складають уявлення автора про майбутню систему і формалізовані у вигляді математичних залежностей.

При формалізації процесів, які супроводжують функціонування технічних систем, найчастіше їх описують у формі звичайних диференціальних рівнянь. Точний аналітичний розв'язок можна отримати тільки для небагатьох типів цих рівнянь, що обумовило широке застосування для дослідження таких систем за допомогою методів їх числового інтегрування використання сучасних ЕОМ. Однак об’єм та складність технічних систем а, отже, математичних моделей випереджають можливості ЕОМ їх досліджувати. Задача ще більше ускладнюється при проведенні статистичного аналізу характеристик систем, наприклад, методом статистичних досліджень у межах спільного застосування імітаційного та ймовірнісного підходів у моделюванні. Крім того, при розв'язанні диференціальних рівнянь числовими мето-