УДК 62-503.4.001

А.Г. Шевелев

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрена параметрическая форма преобразования Лапласа для смещения функций-решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которыми описываются динамические процессы в нестационарных системах. Определены условия и доказана абсолютная сходимость несоответственного интеграла этого преобразования. Приведено доказательство того, что для изображений параметрического преобразования Лапласа существуют оригиналы, определяемые на основе обратного преобразования Лапласа.

Параметрическая форма интегрального преобразования Лапласа получается из общепринятой формы

$$Y(s)=\int_0^{\infty} y(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{1}$$

для функций $y(\tau)$, для которых такой несобственный интеграл существует, где $s = \sigma + j\omega$ – комплексная независимая переменная.

Свойства этого преобразования достаточно глубоко обоснованы, изучены и изложены в многочисленных учебниках, монографиях, например, в работах [1; 2].

Если в интеграле (1) независимую переменную τ заменить на $t-\xi$ и условиться t рассматривать как параметр, а ξ принять за независимую переменную, по которой осуществлять интегрирование, т.е. $\tau=(t-\xi)$, $d\tau=-d\xi$; $y(t-\xi)=0$ при $t<\xi$, то из выражения (1) получается параметрический интеграл, а изображение становится параметрической функцией комплексного переменного s:

$$Y(t;s)=\int_{-\infty}^{t} y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}d\xi = L[y(t;-\xi)], \tag{2}$$

где в общем случае смещенная функция $y(t-\xi)$ является функцией $y(t;-\xi)$ [3] непрерывной на всем интервале $-\infty \le \xi \le t$, $\xi \le t \le \infty$, а $L[y(t;-\xi])$ – символ преобразования Лапласа. Интегральное преобразование (2) предложил Л.Заде. Однако он предпочел использовать в своих исследованиях предельную форму этого преобразования:

$$Y(t;s)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}d\xi, \tag{3}$$

заменив верхний предел t на ∞ [4].

Последняя форма (3) менее продуктивна чем (2), и, возможно, именно это не позволило Л. Заде изучить во всей полноте свойства этого преобразования и более широко использовать его в приложениях, хотя заслуга его в основополагающих исследованиях нестационарных систем автоматического управления несомненна и велика.

Интегралу же (2) присущи замечательные свойства несобственных параметрических интегралов с пределами, зависящими от параметра. Именно эти свойства позволили автору [1; 5; 6] изучить основные свойства этого преобразования для функций и их производных, в которых учитываются начальные значения функций и производных при $t=\xi$, $(t-\xi)=0$, что чрезвычайно важно для изображений однородных и неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с заданными начальными условиями, что невозможно при использовании предельной формы (3) этого преобразования.

Свойства параметрического интеграла (2), верхний предел которого зависит от параметра t, позволили автору получить доказательства для основных правил и формул более общего вида, для которых правила и формулы обычного преобразования являются частными, вытекающими из общих как частный случай [1; 5; 6].

Важно определить, для каких смещенных функций-оригиналов существует изображение на основе преобразования (2). Смещенные функции, например, $y_1(t-\xi)=c_1e^{\alpha_1(t-\xi)}$, $y_2(t)=c_2e^{\alpha_2(t^2-\xi^2)}$, $y_3(t,\xi)=c_3e^{\varphi_3(t)-\varphi_3(\xi)}$, $c_i=\text{const}$, i=1,2,3; α_1 и α_2 – постоянные числа, составляют решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, в общем случае k-го порядка, в виде свертки k таких функций; $\varphi_3(t)$ и $\varphi_3(\xi)$ – непрерывные функции [3; 6].

Покажем, что несобственный интеграл (2) сходится для таких функций. Предполагается, что существуют такие положительные числа M и σ_0, что

$$\left|y(t;-\xi)\right|\le Me^{\sigma_0(t^n-\xi^n)}\le Me^{\sigma(t^n-\xi^n)}, \tag{4}$$

где $\sigma=Res$, $s=\sigma+j\omega$, $\sigma_0\le\sigma$; n – любое сколь угодно большое четное число.

Учитывая условие (4), запишем следующую оценку:

$$\left|\int_{-\infty}^{t}y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}d\xi\right|\le\int_{-\infty}^{t}\left|y(t;-\xi)\right|\left|e^{-s(t-\xi)}\right|d\xi\le\int_{-\infty}^{t}Me^{\sigma(t^n-\xi^n)}\left|e^{-s(t-\xi)}\right|d\xi.$$

Поскольку $\left|e^{-s(t-\xi)}\right|=\left|e^{-(\sigma+j\omega)(t-\xi)}\right|=e^{-\sigma(t-\xi)}$, то

$$\left|\int_{-\infty}^{t}y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}d\xi\right|\le\int_{-\infty}^{t}\left|y(t;-\xi)\right|\left|e^{-s(t^n-\xi)}\right|d\xi\le M\int_{-\infty}^{t}e^{\sigma(t^n-\xi^n)}e^{-\sigma(t-\xi)}d\xi=$$
$$=Me^{\sigma(t^n-t)}\int_{-\infty}^{t}e^{-\sigma(\xi^n-\xi)}d\xi\le\left|Me^{\sigma(t^n-t)}\int_{-\infty}^{t}\left(n\xi^{(n-1)}-1\right)e^{-\sigma(\xi^n-\xi)}d\xi\right|=\frac{M}{\sigma}, \tag{5}$$

вследствие того, что n – четное число. Здесь неравенство для удобства доказательства усилено умножением подынтегральной функции в последнем интеграле на величину $(n\xi^{(n-1)}-1)$, $\left|n\xi^{(n-1)}-1\right|>1$.

Таким образом, параметрический несобственный интеграл (2) существует и сходится абсолютно и равномерно не только для $Res=\sigma$, но и на основании условия (4) для $\sigma_0\le\sigma$, где σ_0 является абсциссой абсолютной сходимости. Ее можно трактовать как нижнюю грань величин σ, для которых интеграл (2) абсолютно сходится.

Условию (4) удовлетворяют решения линейных дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений с переменными коэффициентами, когда коэффициенты – непрерывные элементарные функции времени или сочетание таких функций времени. Следовательно, преобразование (2) применимо для изображения этих уравнений без дополнительной проверки и оценки (4) функций-решений этих уравнений.

Покажем далее, что функция-изображение $Y(t;s)$ является аналитической функцией для $Res=\sigma\ge\sigma_0$. Для этого необходимо доказать, что существует производная $\dfrac{dY(t;s)}{ds}$ этой функции.

Продифференцируем интеграл (2) по s:

$$\frac{dY(t;s)}{ds}=-\int_{-\infty}^{t}(t-\xi)y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}d\xi. \tag{6}$$

Очевидно, что для функции $y(t;-\xi)$, удовлетворяющей неравенству (4), всегда можно найти сколь угодно большое четное число n, что будет выполняться условие

$$\left|(t-\xi)y(t;-\xi)\right| = \left|y_1(t;-\xi)\right| \le Me^{\sigma_0(t^n-\xi^n)} \le Me^{\sigma(t^n-\xi^n)}.$$

Следовательно, интеграл (6) существует и функция $Y(t;\ s)$ является аналитической функцией.

Из неравенства (5) следует:

$$\lim Y(t;s) = 0;\qquad Res = \sigma \to \infty. \tag{7}$$

Свойство (7) имеет существенное значение для определения оригинала $y(t,-\xi)$ по изображению $Y(t;\ s)$ на основе комплексного интеграла обратного преобразования Лапласа.

Обратное преобразование Лапласа используется для определения функции-оригинала $y(t;-\xi)$ по ее изображению $Y(t;\ s)$ и определяется комплексным интегралом

$$y(t;s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(t;s)e^{s(t-\xi)}ds = L^{-1}\left[Y(t;s)\right] \tag{8}$$

для $t \ge \xi$, где интегрирование ведется вдоль бесконечной прямой $\sigma \ge \sigma_0$; $L^{-1}[Y(t;\ s)]$ – символ обратного преобразования Лапласа. Интеграл отличается от формулы, использованной Л. Заде, множителем $e^{-s\xi}$ и в нашем случае понимается в смысле главного значения интеграла (8), т.е.

$$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(t;s)e^{s(t-\xi)}ds = \lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} Y(t;s)e^{s(t-\xi)}ds.$$

Покажем, что действительно оригинал смещенной функции $y(t,-\xi)$ определяется по изображению $Y(t;\ s)$ интегралом (8). Для этого необходимо доказать, что

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} Y(t;s)e^{s(t-\xi)}ds = y(t;-\xi).$$

Если изображение $Y(t;\ s)$ (2) существует и является аналитической функцией, то оригинал $y(t;-\xi)$, представленный в виде степенного ряда по степеням $(t-\xi)^n$, $n=0,1,2,\ldots,\infty$, образует абсолютно сходящийся ряд:

$$y(t;-\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(t-\xi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi);$$

$$y_n(t-\xi) = c_n(t)\frac{(t-\xi)^n}{n!};\quad c_n(t) = (-1)^n\frac{dy(t;-\xi)}{d\xi^n}\Big|_{\xi=t}$$

Использовав последнее представление оригинала $y(t;-\xi)$ в виде ряда и формулу прямого преобразования Лапласа (2), запишем:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} Y(t;s)e^{s(t-\xi)}ds = \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega}\left[\int_{-\infty}^{\tau}\sum_{n=0}^{\infty} y_n(\tau-u)e^{-s(\tau-u)}du\right]e^{s(t-\xi)}d\xi.$$

Поскольку интеграл Лапласа сходится при $Res = \sigma > \sigma_0$ равномерно относительно переменной s, то можно изменить порядок интегрирования справа:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} Y(t;s)e^{s(t-\xi)}ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\tau}\sum_{n=0}^{\infty} y_n(\tau-u)du\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} e^{s(t-\tau+u-\xi)}ds. \tag{9}$$

Вычислим интеграл справа в уравнении (9):

$$\int\limits_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} e^{s(t-\tau+u-\xi)}ds = \frac{1}{t-\tau+u-\xi} e^{s(t-\tau+u-\xi)}\Big|_{s=\sigma-j\omega}^{s=\sigma+j\omega} =$$

$$= \frac{1}{t-\tau+u-\xi}\left[e^{(\sigma+j\omega)(t-\tau+u-\xi)} - e^{(\sigma-j\omega)(t-\tau+u-\xi)}\right] =$$

$$= 2je^{\sigma(u-\tau+t-\xi)} \frac{\sin\omega(u-\tau+t-\xi)}{u-\tau+t-\xi}.$$

Тогда комплексный интеграл (9) слева можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} Y(t;s)e^{s(t-\xi)}ds = \frac{1}{\pi}e^{\sigma(t-\xi)}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\sum_{n=0}^{\infty} y_n(\tau-u)e^{\sigma(u-\tau)}\frac{\sin\omega(u-\tau+t-\xi)}{u-\tau+t-\xi}du.$$

Введем новую переменную p: $p=-(u-\tau+t-\xi)$, тогда $(u-\tau)=-(p+t-\xi)$:

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} Y(t;s)e^{s(t-\xi)}ds = \frac{1}{\pi}e^{\sigma(t-\xi)}\int\limits_{-(t-\xi)}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} y_n(p+t-\xi)e^{-\sigma(p+t-\xi)}\frac{\sin\omega p}{p}dp.$$

Если ωp обозначить как η: $\eta=\omega p$, то

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} Y(t;s)e^{s(t-\xi)}ds = \frac{1}{\pi}e^{\sigma(t-\xi)}\int\limits_{-(t-\xi)\omega}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} y_n\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)e^{-\sigma\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi}e^{\sigma(t-\xi)}\int\limits_{-(t-\xi)\omega}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)e^{-\sigma\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi)e^{-\sigma(t-\xi)}\right]\frac{\sin\eta}{\eta} + \qquad (10)$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi)\int\limits_{-(t-\xi)\omega}^{\infty}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta.$$

При $\omega\to\infty$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta=\pi$, поэтому

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi)\int\limits_{-(t-\xi)\omega}^{\infty}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi) = y(t;-\xi). \qquad (11)$$

Первое слагаемое справа в выражении (10) представим в виде суммы трех интегралов:

$$\int\limits_{-(t-\xi)\omega}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)e^{-\sigma\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi)e^{-\sigma(t-\xi)}\right]\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta =$$

$$= \int\limits_{-(t-\xi)\omega}^{-(t-\xi)\omega_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)e^{-\sigma\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi)e^{-\sigma(t-\xi)}\right]\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta +$$

$$+ \int\limits_{-(t-\xi)\omega_0}^{\Omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)e^{-\sigma\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi)e^{-\sigma(t-\xi)}\right]\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta + \qquad (12)$$

$$+ \int\limits_{\Omega}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)e^{-\sigma\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi)e^{-\sigma(t-\xi)}\right]\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta.$$

Функция-оригинал $y(t;-\xi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi)$ ограничена на интервале $-\infty \le \xi \le t$; $\xi \le t \le \infty$ по определению и все три интеграла в выражении (12) сходятся, поэтому можно подобрать постоянные значения ω_0 и Ω настолько большими, что модули интегралов первого по интервалу $[-\omega(t-\xi), -\omega_0(t-\xi)]$, где $\omega > \omega_0$ произвольные, и третьего по интервалу (Ω, ∞) будут меньше всякого наперед заданного и сколь угодно малого положительного числа ε, а:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int\limits_{-(t-\xi)\omega_0}^{\Omega} \left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right) e^{-\sigma\left(t-\xi+\frac{\eta}{\omega}\right)} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi) e^{-\sigma(t-\xi)} \right] \frac{\sin\eta}{\eta} d\eta =$$

$$= \int\limits_{-(t-\xi)\omega_0}^{\Omega} \left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi) e^{-\sigma(t-\xi)} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t-\xi) e^{-\sigma(t-\xi)} \right] \frac{\sin\eta}{\eta} d\eta = 0.$$

Окончательно на основании выражений (10) и (11), а также приведенного анализа величины интегралов (12) запишем:

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} Y(t;s) e^{s(t-\xi)} ds = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} Y(t;s) e^{s(t-\xi)} ds = y(t;-\xi).$$

Изложенное позволяет использовать прямое и обратное параметрическое преобразование Лапласа для анализа нестационарных систем без дополнительной проверки условий существования изображений и оригиналов в каждом конкретном случае.

Список литературы

1. *Чемоданов Б.К.* Математические основы теории автоматического регулирования. – М.: Высш. шк., 1977. –Т. 11. – 517 с.
2. *Доеч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
3. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1958. – С. 356.
4. *Zadch l.* Frequency analysis of variable networks // Proc. JRE. – Vol. 38. – 1950. – March.
5. *Шевелев А.Г.* Применение преобразования Лапласа к анализу автоматических систем с переменными параметрами // Сложные системы управления: Сб. науч. тр. – К.: Наук. думка. –1967. – Вып.3. – С. 37–58.
6. *Шевелев А.Г.* Некоторые свойства преобразования Лапласа для анализа автоматических систем с переменными параметрами // Сложные системы управления: Сб. науч. тр. – К.: Наук. думка. –1968. – Вып. 4. – С. 100–106.
7. *Шевелев А.Г.* Применение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1969. – Т. 21. –№ 5. –С. 640–652.

Стаття надійшла до редакції 20 грудня 1999 року.