ОБРОБКА СИГНАЛІВ

В188.141 + З 841.422 б 648.31

УДК 621.372

А.Я. Білецький, І.В. Шелевицький, В.М. Шутко, Ю.В. Юрко

ПОБУДОВА ТРИВИМІРНИХ ЕРМІТОВИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ

Розглянуто метод побудови інтерполяційних сплайнів високих мірностей як тензорного добутку одномірних. Наведено алгоритм розрахунків та ілюстрацію наближення тестової функції.

У процесі моделювання реальних фізичних об'єктів та елементів технічних систем є потреба в зручному математичному апараті для представлення функцій трьох змінних. Зокрема це моделювання атмосферних явищ, геологічних структур, імітація оптичних ефектів тощо [1;2].

В багатьох випадках важливим фактором є ефективність обчислень та точність наближення реальних процесів. Класичні методи інтерполяції алгебричними чи тригонометричними поліномами не здатні задовольнити ці вимоги. Хорошою альтернативою є використання ермітових сплайнів. Алгоритми побудови одновимірних та двовимірних ермітових сплайнів подані в роботах [3 – 5].

Розглядається побудова 4D інтерполяційних сплайнів (функції трьох змінних), які дозволяють створити ефективну об'ємну модель. Для спрощення обчислень розіб'ємо область наближення на прямокутники.

Маємо деяку наближувану залежність трьох змінних $f(t,l,g)$, представлену на ділянці $t\in[a_1,b_1]$, $l\in[a_2, b_2]$, $g\in[a_3,b_3]$ відліками у вузлах прямокутних грат:

$$\Delta = \Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_z \,.\; f_v = f_{i,j,k} = f(x_i, y_j, z_k),$$

де $i=1,2,\ldots,r$, $j=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,n$, $v=1,2,\ldots,L$ $(L = r\times m\times n)$; r, m, n – кількість вузлів по осях OX, OY, OZ.

Будемо наближувати $f(t, l, g)$ тривимірним сплайном $S(t, l, g)$, який є тензорним добутком одновимірних сплайнів $S(t)$, $S(l)$ і $S(g)$. В такому разі значення тривимірного сплайна у будь-якій точці (t, l, g) буде дорівнювати:

$$S(t,l,g) = S(t)\times S(l)\times S(g),$$

що можна записати у вигляді:

$$S(t,l,g) = \sum_{i=1}^{r} F_i \widetilde{X}_i(t)\times \sum_{j=1}^{m} F_j \widetilde{X}_j(l)\times \sum_{k=1}^{n} F_k \widetilde{X}_k(g) = \sum_{v=1}^{L} f_v \widetilde{W}_v(t,l,g),$$

де $\widetilde{X}(t), \widetilde{X}(l), \widetilde{X}(g)$ – покоординатні функції форми, які залежать від різновиду сплайна і значення аргументу; f_v – значення інтерпольованої функції у вузлах; $\widetilde{W}_v$ – тривимірна функція форми.

Для лінійних сплайнів функція прийме вигляд:

$$S(t,l,g) = (F_{i-1}^{1} X(t) + F_i^{2} X(t))\times(F_{j-1}^{1} X(l) + F_j^{2} X(l))\times(F_{k-1}^{1} X(g) + F_k^{2} X(g))$$

Перемноживши отримаємо:

$$S(t,l,g) = f^{1}_{i-1,j-1,k-1} W(t,l,g) + f^{2}_{i-1,j,k-1} W(t,l,g) + f^{3}_{i,j-1,k-1} W(t,l,g) +$$
$$+ f^{4}_{i,j,k-1} W(t,l,g) + f^{5}_{i-1,j-1,k} W(t,l,g) + f^{6}_{i-1,j,k} W(t,l,g) + f^{7}_{i,j-1,k} W(t,l,g) + f^{8}_{i,j,k} W(t,l,g).$$

У матричній формі, використовуючи добуток Кронекера, знайдемо функцію форми за трьома вимірами:

$$\begin{bmatrix} {}^1x(t) \\ {}^2x(t) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} {}^1x(l) \\ {}^2x(l) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} {}^1x(g) \\ {}^2x(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1x(l)\begin{bmatrix} {}^1x(t) \\ {}^2x(t) \end{bmatrix} \\ {}^2x(l)\begin{bmatrix} {}^1x(t) \\ {}^2x(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} {}^1x(g) \\ {}^2x(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1x(g)\begin{bmatrix} {}^1x(l)\begin{bmatrix} {}^1x(t) \\ {}^2x(t) \end{bmatrix} \\ {}^2x(l)\begin{bmatrix} {}^1x(t) \\ {}^2x(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ {}^2x(g)\begin{bmatrix} {}^1x(l)\begin{bmatrix} {}^1x(t) \\ {}^2x(t) \end{bmatrix} \\ {}^2x(l)\begin{bmatrix} {}^1x(t) \\ {}^2x(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1W(t,l,g) \\ {}^2W(t,l,g) \\ {}^3W(t,l,g) \\ {}^4W(t,l,g) \\ {}^5W(t,l,g) \\ {}^6W(t,l,g) \\ {}^7W(t,l,g) \\ {}^8W(t,l,g) \end{bmatrix},$$

де

$$\begin{gathered} {}^1W(t,l,g)={}^1x(t)\,{}^1x(l)\,{}^1x(g)\ ,\ {}^2W(t,l,g)={}^1x(t)\,{}^1x(l)\,{}^2x(g)\ , \\ {}^3W(t,l,g)={}^1x(t)\,{}^2x(l)\,{}^1x(g)\ ,\ {}^4W(t,l,g)={}^1x(t)\,{}^2x(l)\,{}^2x(g)\ , \\ {}^5W(t,l,g)={}^2x(t)\,{}^1x(l)\,{}^1x(g),\ {}^6W(t,l,g)={}^2x(t)\,{}^1x(l)\,{}^2x(g), \\ {}^7W(t,l,g)={}^2x(t)\,{}^2x(l)\,{}^1x(g)\ ,\ {}^8W(t,l,g)={}^2x(t)\,{}^2x(l)\,{}^2x(g) \end{gathered}$$

або

$${}^sW(t,l,g)={}^ix(t)\,{}^jx(l)\,{}^kx(g).$$

У матричній формі останнє можна записати:

де S – вектор-стовпець значень сплайна у визначених точках; W – матриця планування, яка має характерний вигляд (рис. 1); F – значення інтерпольованої функції у вузлах.

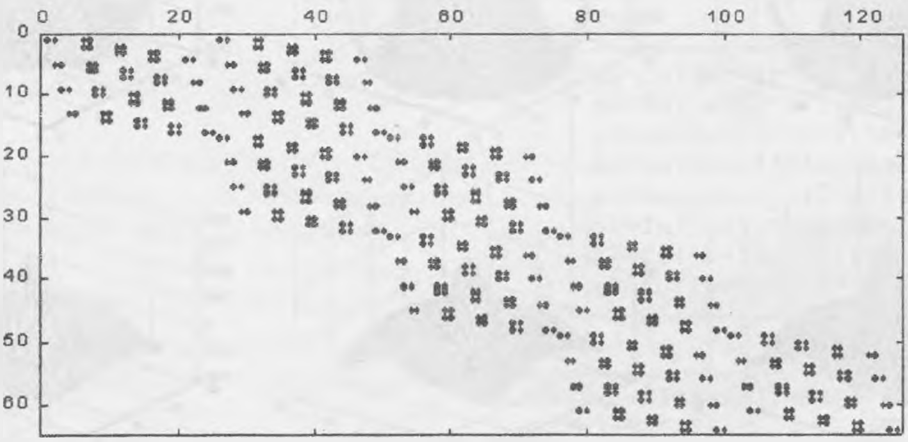

Рис. 1. Структура матриці W (ненульові елементи)

Для сітки з вузлів *x, y, z* [-8, -4, 0, 4, 8] у структурі матриці кожний рядок будується з ^{1}W … ^{8}W. На рис. 1 схематично показано відмінні від нуля елементи.

Матриця W є розрідженою, блочно-діагональною матрицею. Це дозволяє побудувати ефективні алгоритми обчислень сплайна, включаючи й такі, що реалізуються апаратно.

Розглянемо приклад інтерполяції. Для тестування візьмемо функцію, яка часто зустрічається у вигляді тесту в подібних задачах [2]:

$$f(x,y,z)=\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

На рис.2 показано осьові розрізи інтерпольованої функції. Зображені на рис.3 3D функції є зрізами з попередньої 4D функції з рис. 2.

Алгоритм розрахунку тривимірного ермітового сплайна має вигляд (рис. 4):

– ввести координати сітки вузлів *xu, yu, zu* ; значення інтерпольованої функції у вузлових точках *f(x, y, z)* : *fu*; координати потрібних точок *xt, yt, zt* ;

– обчислити елементи матриці планування W1 …W8;

– обчислити значення сплайна у заданих точках.

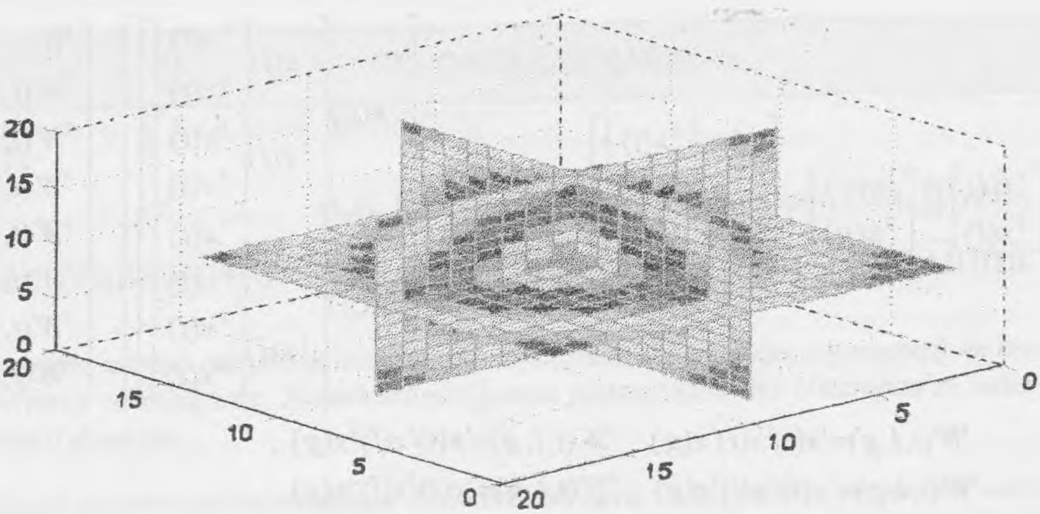

Рис.2. Розрізи тестової функції

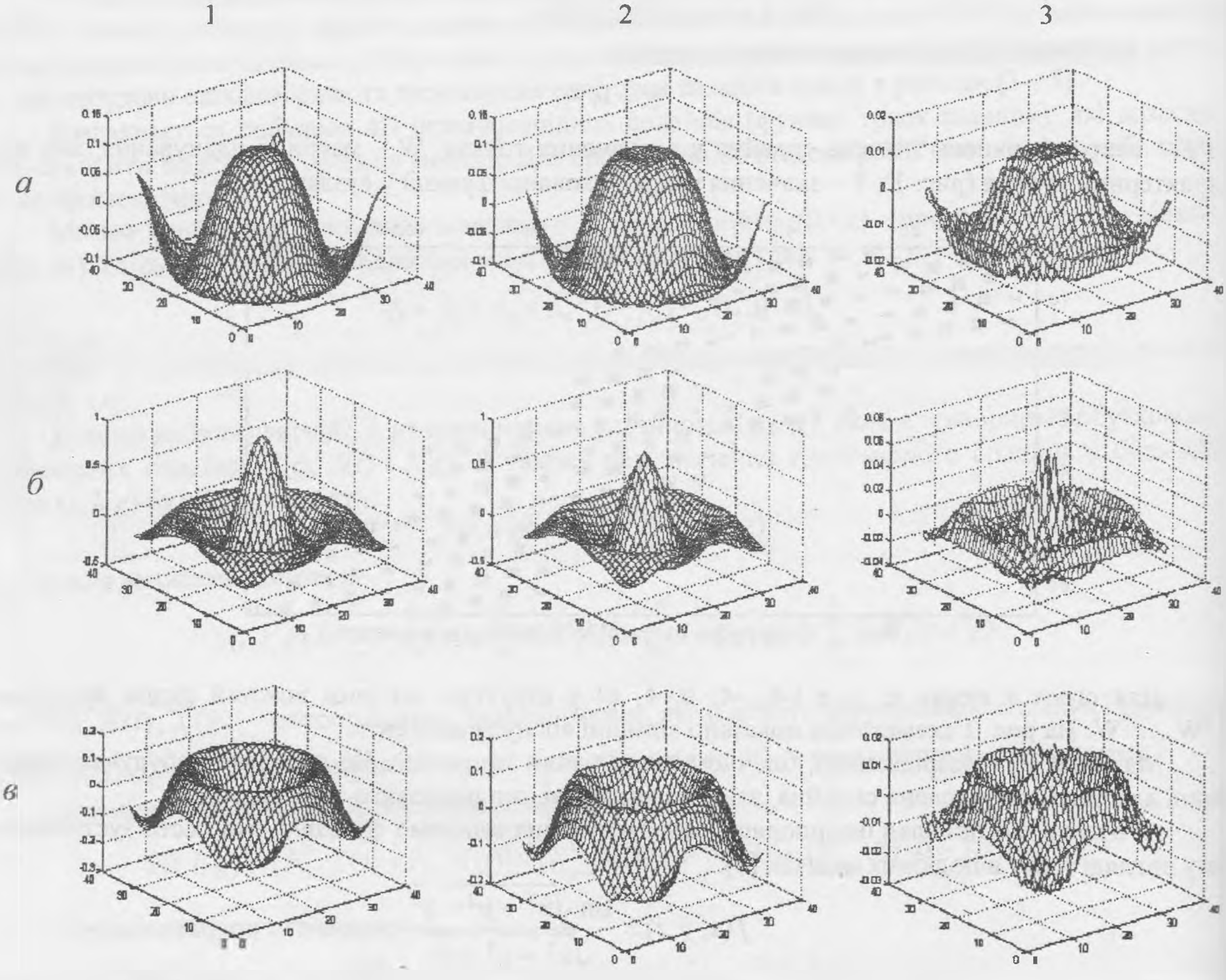

Рис. 3. Зрізи тестової функції, інтерполяції та нев'язки:
1– зріз тестової функції; *2* – зріз інтерпольованої функції; *3* – нев'язка;
а – зріз функції по $z = 5$; *б* – зріз функції по $z = 10$; *в* – зріз функції по $z = 0$

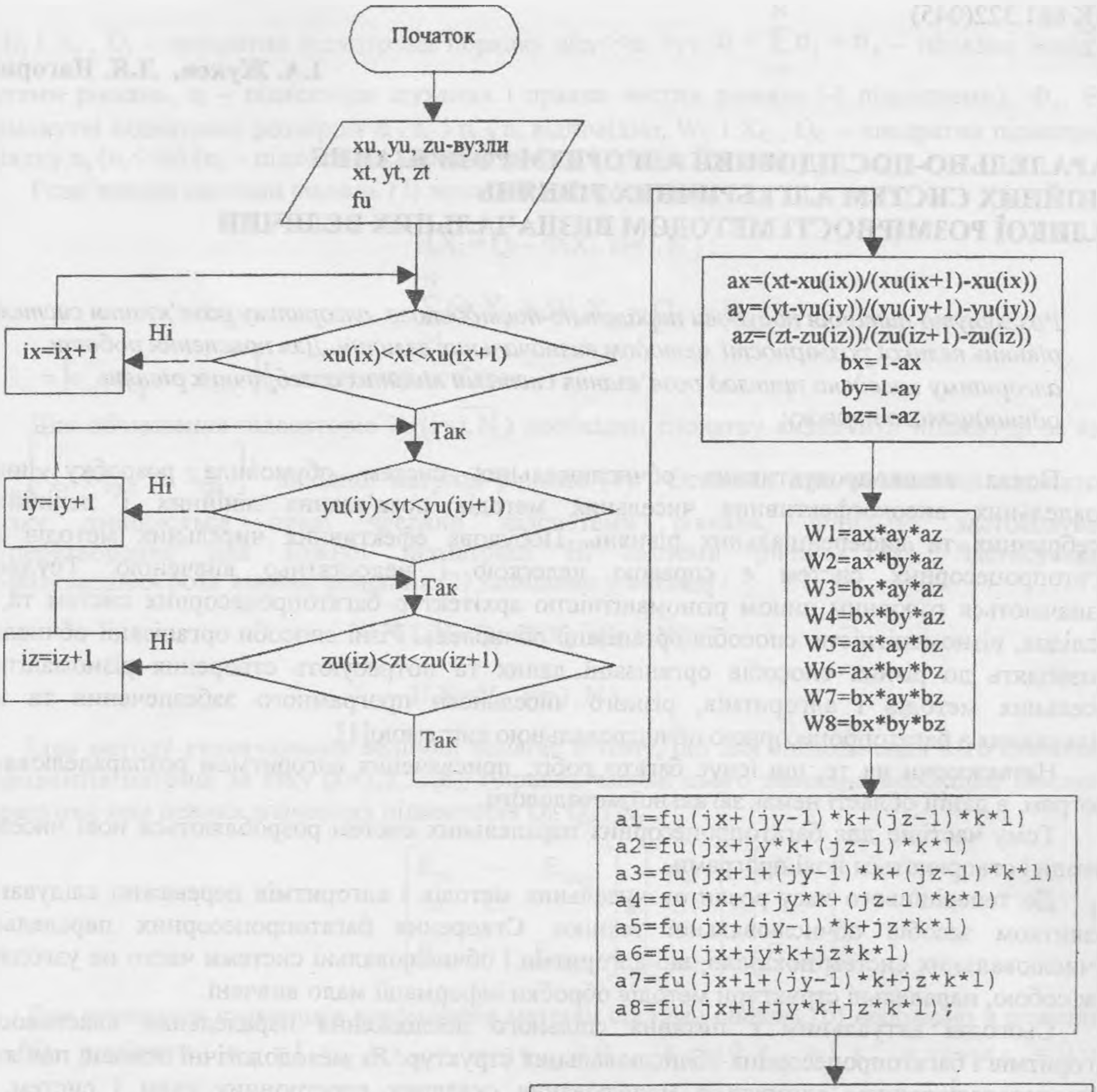

Рис. 4. Алгоритм розрахунку тривимірного ермітового сплайна

Описані алгоритми побудови тривимірних сплайнів є перспективними для використання в статистичних методах оцінювання, зокрема в методі найменших квадратів як моделі процесу.

Список літератури

1. *Роджерс Д.* Алгоритмические основы машинной графики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 512 с.

2. *Потёмкин В.Г.* Система инженерных и научных расчётов MATLAB 5.х: – В 2 т. – М.: ДАЛОГ; МИФИ, 1999.

3. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.

4. *Турчак В.В.* Статистическая обработка данных на базе двумерных сплайн-функций// Проблемы информатизации и управления: Сб. науч. тр. – К.: КМУГА, 1997. – С. 130-134.

5. *Турчак В.В.*, *Шелевицкий И.В.*, *Шутко Н.А.* Приближение функций двух переменных с помощью двумерных кубических сплайнов // Проблемы авионики: Сб. науч. тр. – К.: КМУГА, 1997. – С. 131-135.

Стаття надійшла до редакції 27 листопада 2000 року.