УДК 514.75

М.Ф. Гребенюк

ПОЛЯ ІНВАРІАНТНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТРИСКЛАДОВОГО РОЗПОДІЛУ АФІННОГО ПРОСТОРУ

Розглянуто трискладові розподіли багатомірного простору. Наведено рівняння полів інваріантних геометричних об'єктів, приєднаних до трискладового розподілу. Отримано диференціальні рівняння полів точок, прямих і гіперплощин, різним способом приєднаних відносно поточного елемента розподілу. Диференциальная геометрия

В роботі виділені об'єкти, що визначають інваріантні площини, які є перетинанням інваріантних гіперплощин σ і τ із площинами Π_r, Π_m, Π_n, Π_{m-r}, Π_{n-m}. Індекси приймають такі значення:

Розглянемо (n+1)-мірний афінний простір A_{n+1}, віднесений до рухливого репера $R = \{M, \bar{e}_I\}$. Диференціальні рівняння інфінітезимальних переміщень репера R мають вигляд:

де ω, ω_I^K – інваріантні форми афінної групи, що задовольняють рівнянням структури:

Структурні форми поточної точки $X = M + x^I \bar{e}_I$ простору A_{n+1} мають такий вигляд:

Суміщення поточної точки X із точкою репера M веде до співвідношення:

Умова нерухомості точки M записується так: $\omega^J = 0$.

Обраний у такий спосіб репер назвемо репером $\tilde{R}$.

Нехай Π_r – r-мірна площина A_{n+1} – задана в такий спосіб:

де

Аналогічно нехай m-мірна площина Π_m задана в такий спосіб:

де

Гіперплощина Π_n задана

$$\Pi_n = [M, \bar{T}_\sigma],$$

де $\bar{T}_\sigma = \bar{e}_\sigma + H_\sigma^{n+1} \bar{e}_{n+1}$.

В просторах представлення $\{\Delta\Lambda^{\hat{u}}{}_{p},\omega^{I}\}$, $\{\Delta M^{\hat{u}}{}_{a},\omega^{I}\}$, $\{\Delta H^{n+1}_{\sigma},\omega^{I}\}$ (n+1)-мірні різноманіття обумовлені диференціальними рівняннями:

$$\Delta\Lambda^{\hat{u}}_{p} = \Lambda^{\hat{u}}_{pK}\omega^{K};$$
$$\Delta M^{\hat{\alpha}}_{a} = M^{\hat{\alpha}}_{aK}\omega^{K}; \qquad (1)$$
$$\Delta H^{n+1}_{\sigma} = H^{n+1}_{\sigma K}\omega^{K},$$

називаються розподілами 1-го роду відповідно r-мірних лінійних елементів (Λ-розподіл), m-мірних лінійних елементів (M-розподіл) і гіперплощин (H-розподіл). Рівняння системи (1) кожній точці M (центра розподілу) ставлять у відповідність площини Π_r, Π_m, Π_n.

Нехай у деякій області простору A_{n+1} для будь-якого центра M має місце співвідношення:

$$M \in \Pi_r \subset \Pi_m \subset \Pi_n.$$

$H(M(\Lambda))$-розподілом називається трійка розподілів афінного простору A_{n+1}, що складається з базисного розподілу 1-го роду r-мірних лінійних елементів $\Pi_r \equiv \Lambda$ (Λ-розподіл), оснащуючого розподілу 1-го роду m-мірних лінійних елементів $\Pi_m \equiv M$ (M-розподіл) і розподілу 1-го роду гіперплощинних елементів H ($r<m<n$) (H-розподіл) зі співвідношенням їхній інцидентності відповідних елементів у загальному центрі M наступного вигляду: $\Lambda \subset M \subset H$.

Зробимо наступну канонізацію репера $\bar{R}$: вектори $\bar{e}_p$ помістимо в площину Π_r, вектори $\bar{e}_i$ – у площину Π_m, а вектори $\bar{e}_\sigma$ – у площину Π_n. Такого репера назвемо репером нульового порядку R^0. З його визначення випливають такі рівності:

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{u}_{p} = 0, \qquad \overset{*}{M}{}^{\alpha}_{a} = 0, \qquad \overset{*}{H}{}^{n+1}_{\sigma} = 0.$$

У репері R^0 $H(M(\Lambda))$-розподіл визначається диференціальними рівняннями:

$$\omega^{\hat{u}}_{p} = \Lambda^{\hat{u}}_{pK}\omega^{K};$$
$$\omega^{\hat{\alpha}}_{i} = M^{\hat{\alpha}}_{iK}\omega^{K};$$
$$\omega^{n+1}_{\alpha} = H^{n+1}_{\alpha K}\omega^{K}.$$

Відповідно до леми Н.М. Остіана можлива часткова канонізація репера нульового порядку R^0, при якій $M^{n+1}_{iq} = 0, H^{n+1}_{\alpha q} = 0$. Отриманий репер назвемо репером 1-го порядку R^1.

В обраному репері R^1 різноманіття $H(M(\Lambda))$ задається наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\omega^{\hat{u}}_{p} = \Lambda^{\hat{u}}_{pK}\omega^{K}; \qquad \omega^{n+1}_{i} = M^{n+1}_{i\hat{u}}\omega^{\hat{u}};$$
$$\omega^{\alpha}_{i} = M^{\alpha}_{iK}\omega^{K}; \qquad \omega^{n+1}_{\alpha} = H^{n+1}_{\alpha\hat{u}}\omega^{\hat{u}};$$
$$\omega^{p}_{u} = A^{p}_{uK}\omega^{K}.$$

Розглянемо деякі поля інваріантних геометричних об'єктів, приєднаних до розподілу $H(M(\Lambda))$

Одержимо диференціальні рівняння геометричних об'єктів (точки, прямої, гіперплощини) у репері R^1, що будуть використовуватися надалі.

Поле точок. Розглянемо точку

$$P = M + x^{I}\bar{e}_{I}\ , \qquad (2)$$

де P и M – радіуси-вектори точок P и M відповідно; x – координати точки P щодо репера, приєднаного до розподілу $H(M(\Lambda))$.

Припустимо, що у кожній точці M розподілу $H(M(\Lambda))$, тобто при $\omega^I=0$, і припустимих перетвореннях репера точка P залишалася нерухомою. Із цієї умови маємо рівність:

$$\delta P=0, \tag{3}$$

де δ – символ диференціювання по вторинних параметрах.

Диференціюючи рівність (2), згідно з рівнянням (3) одержимо:

$$\delta x^p + x^q \pi_q^p + x^{n+1}\pi^p = 0;$$

$$\delta x^i + x^{\hat{u}} \pi_{\hat{u}}^i = 0;$$

$$\delta x^\alpha + x^{\hat{\beta}} \pi_{\hat{\beta}}^\alpha = 0;$$

$$\delta x^{n+1} + x^{n+1}\pi_{n+1}^{n+1} = 0,$$

де $\pi = \omega \big|_{\omega^I} = 0$.

Отже, інваріантне поле точок буде задовольняти рівнянням:

$$dx^p + x^q \omega_q^p + x^{n+1}\omega^p = x_K^p \omega^K;$$

$$dx^i + x^{\hat{u}} \omega_{\hat{u}}^i = x_K^i \omega^K;$$

$$dx^\alpha + x^{\hat{\beta}} \omega_{\hat{\beta}}^\alpha = x_K^\alpha \omega^K;$$

$$dx^{n+1} + x^{n+1}\omega_{n+1}^{n+1} = x_K^{n+1} \omega^K.$$

Поле прямих. Нехай через поточну точку M проходить пряма, визначена вектором:

$$\overline{R} = x^I \overline{e}_I .$$

Умова інваріантності цього напрямку щодо припустимих перетворень репера

$$\delta\overline{R} = \widetilde{\Theta}\overline{R}$$

призводить до таких рівностей:

$$\begin{aligned}
&\delta x^p + x^q \pi_q^p + x^{n+1}\pi^p = \widetilde{\Theta} x^p;\\
&\delta x^i + x^{\hat{u}} \pi_{\hat{u}}^i = \widetilde{\Theta} x^i;\\
&\delta x^\alpha + x^{\hat{\beta}} \pi_{\hat{\beta}}^\alpha = \widetilde{\Theta} x^\alpha;\\
&\delta x^{n+1} + x^{n+1}\pi_{n+1}^{n+1} = \widetilde{\Theta} x^{n+1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Якщо пряма не лежить у площині Π_n елемента розподілу, то координати вектора $\overline{R}$ можна пронормувати у такий спосіб:

$$\overline{R} = x^\sigma \overline{e}_\sigma + \overline{e}_{n+1} . \tag{5}$$

Тоді співвідношення (4) будуть мати такий вигляд:

$$\delta x^p + x^q \pi_q^p + \pi_{n+1}^p - x^p \pi_{n+1}^{n+1} = 0;$$

$$\delta x^i + x^u \pi_u^i + \pi_{n+1}^i - x^i \pi_{n+1}^{n+1} = 0;$$

$$\delta x^\alpha + x^\beta \pi_\beta^\alpha + \pi_{n+1}^\alpha - x^\alpha \pi_{n+1}^{n+1} = 0.$$

Таким чином, поле інваріантних прямих, визначених вектором (5), характеризується диференціальними рівняннями:

$$dx^p + x^q\omega_q^p + \omega_{n+1}^p - x^p\omega_{n+1}^{n+1} = x_K^p\omega^K;$$
$$dx^i + x^u\omega_u^i + \omega_{n+1}^i - x^i\omega_{n+1}^{n+1} = x_K^i\omega^K;$$
$$dx^\alpha + x^\beta\omega_\beta^\alpha + \omega_{n+1}^\alpha - x^\alpha\omega_{n+1}^{n+1} = x_K^\alpha\omega^K.$$

Усяка пряма $x^\sigma = \nu^\sigma x^{n+1}$, визначена вектором $\overline{R} = \nu^\sigma\overline{e}_\sigma + \overline{e}_{n+1}$, де величини ν^σ задовольняють диференціальним рівнянням:

$$\nabla\nu^p + \omega_{n+1}^p - \nu^p\omega_{n+1}^{n+1} = \nu_K^p\omega^K;$$
$$\nabla\nu^i + \nu^\alpha\omega_\alpha^i + \omega_{n+1}^i - \nu^i\omega_{n+1}^{n+1} = \nu_K^i\omega^K;$$
$$\nabla\nu^\alpha + \omega_{n+1}^\alpha - \nu^\alpha\omega_{n+1}^{n+1} = \nu_K^\alpha\omega^K,$$

називається афінною нормаллю розподілу $H(M(\Lambda))$ [1].

Система диференціальних рівнянь поля прямих, що лежать у площині Π_n відповідного елемента розподілу $H(M(\Lambda))$, обумовлених вектором

$$\overline{R} = x^\sigma\overline{e}_\sigma, \qquad x^{n+1} = 0,$$

має вигляд
$$dx^p + x^q\omega_q^p - \tilde{\Theta}x^p = x_K^p\omega^K;$$
$$dx^i + x^u\omega_u^i - \tilde{\Theta}x^i = x_K^i\omega^K;$$
$$dx^\alpha + x^\beta\omega_\beta^\alpha - \tilde{\Theta}x^\alpha = x_K^\alpha\omega^K,$$

де $\tilde{\Theta}$ – довільна форма і така, що $D\tilde{\Theta} = 0$.

Поле гіперплощин. Гіперплощина σ щодо рухливого репера визначається рівнянням:

$$A_I x^I + A = 0 \quad . \tag{6}$$

Після перетворень репера це рівняння приймає вигляд:

$$(A_I + \delta A_I + \ldots)\,(x^I + \delta x^I + \ldots) + A + \delta A + \ldots = 0$$

або
$$(A_I + \delta A_I + \ldots)(x^I - x^K\pi_K^I + \ldots) + A + \delta A + \ldots = 0 \; .$$

Враховуючи те, що це рівняння визначає ту ж саму гіперплощину, запишемо

$$(A_I + \delta A_I + \ldots)\,(x^I - x^K\pi_K^I + \ldots) + A + \delta A + \ldots = (\rho_0 + \Theta)\,(A_I x^I + A)$$

Порівнюючи члени однакового порядку малості, одержимо:

$$\rho_0 = 1,$$
$$\delta A_I x^I - A_I x^K\pi_K^I + \delta A = \Theta(A_I x^I + A) \; .$$

Отже,
$$\delta A_p - A_q\pi_p^q = \Theta A_p;$$
$$\delta A_p - A_q\pi_p^q = \Theta A_p;$$
$$\delta A_i - A_j\pi_i^j = \Theta A_i;$$
$$\delta A_\alpha - A_u\pi_\alpha^u = \Theta A_\alpha; \tag{7}$$
$$\delta A_{n+1} - A_I\pi_{n+1}^I = \Theta A_{n+1};$$
$$\delta \ln A = \Theta.$$

Нехай гіперплощина σ рівняння (6) не проходить через початок репера ($A\neq0$). Пронормуємо коефіцієнти площини так, щоб

$$A=1, \qquad A_I x^I + 1 = 0 .$$

Тоді з рівнянь (7) одержимо, що $\Theta=0$ і диференціальні рівняння інваріантності гіперплощини σ будуть мати вигляд:

$$\delta A_p - A_q \pi_p^q = 0;$$
$$\delta A_i - A_j \pi_i^j = 0;$$
$$\delta A_\alpha - A_u \pi_\alpha^u = 0;$$
$$\delta A_{n+1} - A_I \pi_{n+1}^I = 0.$$

Отже, поле гіперплощин, що не проходять через початок репера, визначається наступними диференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} dA_p - A_q\omega_p^q &= A_{pK}\omega^K, \\ dA_i - A_j\omega_i^j &= A_{iK}\omega^K, \\ dA_\alpha - A_u\omega_\alpha^u &= A_{\alpha K}\omega^K, \\ dA_{n+1} - A_I\omega_{n+1}^I &= A_{n+1K}\omega^K. \end{aligned} \tag{8}$$

З рівнянь (8) видно, що величини $\{A_p, A_i, A_\alpha, A_{n+1}\}$ утворять геометричний об'єкт першого порядку. Більш того, компоненти $\{A_i\}$, $\{A_p, A_i\}$, $\{A_p\}$, $\{A_i, A_\alpha\}$, $\{A_\sigma\}$ утворять самостійні підоб'єкти об'єкта $\{A_I\}$. Ці підоб'єкти $\{A_p\}$, $\{A_i\}$, $\{A_i, A_\alpha\}$, $\{A_p, A_i\}$, $\{A_\sigma\}$ визначають інваріантні (r – 1), (m – 1), (n – 1), (m – r – 1), (n – m – 1)-мірні відповідно площині, що лежать у відповідних площинах $\Pi_r, \Pi_m, \Pi_n, \Pi_{m-r}, \Pi_{n-m}$ і не проходять через центр. Визначені цими підоб'єктами площини – суть перетинання інваріантної гіперплощини σ із площинами $\Pi_r, \Pi_m, \Pi_n, \Pi_{m-r}, \Pi_{n-m}$.

Розглянемо гіперплощину τ, що проходить через початок репера:

$$A_I x^I = 0 .$$

Диференціальні рівняння полів гіперплощин, що проходять через початок репера, мають вигляд:

$$\begin{aligned} dA_p - A_q\omega_p^q - \Theta A_p &= A_{pK}\omega^K; \\ dA_i - A_j\omega_i^j - \Theta A_i &= A_{iK}\omega^K; \\ dA_\alpha - A_u\omega_\alpha^u - \Theta A_\alpha &= A_{\alpha K}\omega^K; \\ dA_{n+1} - A_I\omega_{n+1}^I - \Theta A_{n+1} &= A_{n+1K}\omega^K. \end{aligned} \tag{9}$$

Компоненти $\{A_p\}$, $\{A_i\}$, $\{A_\sigma\}$, $\{A_p, A_i\}$, $\{A_i, A_\alpha\}$ утворять підоб'єкти об'єкта $\{A_I\}$. Вони визначають відповідно (r – 1), (m – 1), (n – 1), (m – r – 1), (n – m – 1)-мірні площини, що проходять через початок репера і являють собою перетинання інваріантної гіперплощини τ із площинами $\Pi_r, \Pi_m, \Pi_n, \Pi_{m-r}, \Pi_{n-m}$ відповідно. Перші три рівняння системи рівнянь (9) у відповідних комбінаціях є диференціальними рівняннями полів цих площин.

Список літератури

1. *Алшибая Э.Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве// Тр. геометрического семинара ВИНИТИ. – 1974. – 5. – С.169–193.

Стаття надійшла до редакції 21 лютого 2001 року.