Доведення. Домножимо ліву та праву частини першого співвідношення (8) на z і просумуємо по j від k до нескінченності. Зліва одержимо частинну похідну по y від функції $\Phi_k(y, x, z)$, праворуч – вирази, що містять величину $\frac{z^j}{j+1}$, а це зручно подати через інтеграл $\int_0^z u du$. Після аналітичних перетворень одержимо інтегродиференціальне рівняння (12), якому задовольняє функція $\Phi_k(y, x, z)$, що й треба довести.

Зауважимо, що складність розв'язку рівняння залежить від структури функції $\lambda(y)$. Якщо ж говорити про прикладне значення розв'язку, то одержане рівняння можна розв'язувати, використовуючи відомі наближені методи. Це дозволить знайти деякі оцінки ймовірностей p_k і $p_k(x)$ процесу функціонування складних систем і за допомогою їх описувати реальний процес функціонування системи та будувати відповідні алгоритми його раціоналізації і навіть оптимізації.

Список літератури

1. *Ежов И.И.* Цепи Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс //УМЖ. –1966. –№ 1. – С. 12–16.
2. *Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю.* Методы расчета высоконадежных систем. – М.: Радио и связь, 1988. – 184 с.
3. *Корнийчук М.Т.* Математические модели оптимизации и оценивания надежности и эффективности функционирования сложных радиотехнических систем.– К.: КВИРТУ ПВО, 1980.–280 с.
4. *Корнійчук М.Т., Совтус І.К.* Ризик і надійність. Економіко-стохастичні методи й алгоритми побудови та оптимізації систем: Монографія. – К.: КНЕУ, 2000. – 212 с.

Стаття надійшла до редакції 27 листопада 2000 року.

УДК 629.053.072

А.П. Ткалич

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрены вопросы синтеза оптимального управления для нелинейных динамических систем с одним входом.

Современная теория автоматического управления основывается на учении А.М. Ляпунова об устойчивости движения. Для исследования устойчивости движения динамической системы А.М. Ляпунов предложил использовать специальные знакоопределенные функции $V(t, X)$ (функции Ляпунова, отдаленный аналог энергетической функции Лагранжа), обладающие специальными свойствами. Удачно построенная функция Ляпунова для конкретной нелинейной системы автоматического управления позволяет решать целый комплекс задач (оценка изменения регулируемой величины, оценка времени протекания переходного процесса, оценка интегральных критериев качества регулирования и т.д.).

В теории экстремальных систем видное место занимают градиентные системы, у которых в правой части уравнений фигурирует градиент функции Ляпунова.

В задачах оптимального синтеза трудности, заключающиеся в поиске подходящей функции Ляпунова для нелинейного объекта, можно обойти, обеспечивая отрицательность производной $\dot{V}$ за счёт выбора закона управления U.

На выбор подходов и методов исследования влияния оказали работы В.М. Кунцевича, А.Г.Шевелева, В.В.Павлова, Г.А. Крыжановского, С.М. Федорова, А. А. Красовского, Р.Е. Беллмана, R.E. Kalman.

Пусть возмущенное движение некоторой замкнутой системы описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{X} = \varphi(\overline{X}, t),\ \overline{X} \in R^n,$$

где вектор-функция $\varphi(\overline{X}, t)$, заданная на $(\overline{X}, t)$-множестве $G_p = G \times R \subset R^{n+1}; G \subset R^n$ – открытое множество; R – ось времени t.

Предполагается, что $\varphi(\overline{X}, t)$ является гладкой (класса C^1) по $\overline{X}$ и непрерывной по совокупности переменных $\overline{X}, t$. Область G предполагается пространственно-односвязной.

Для функций $\varphi(\overline{X}, t)$ существует бесчисленное множество функций Ляпунова, позволяющих устанавливать факт асимптотической устойчивости.

Определим такой вектор управляющих воздействий U(X), который обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия X = 0 системы. При этом, каковы бы ни были другие векторы управляющих воздействий U*(X), решающие задачу стабилизации, должно выполняться неравенство

$$\int_0^\infty \mathrm{W}dt \le \int_0^\infty \mathrm{W}(X^*, U^*)dt.$$

Разрешим аналитически систему относительно U, тогда справедливо представление

$$\dot{X} = F(X) + BU.$$

Если систему не удается разрешить аналитически относительно U, то это делается численно. При численном интегрировании системы уравнений для каждого набора значений t, X, ∇V численно решается система уравнений :

$$\nabla V \frac{D\varphi}{DU} + \frac{DW}{DU} = 0$$

и определяется значение U. Часто определение вектора U сводится к уточнению с помощью метода Ньютона значения вектора U, найденного на предыдущем шаге интегрирования

$$U = \Phi(X, \nabla V).$$

Если на вектор управления наложены ограничения U$\in\upsilon$(X), где υ – некоторая замкнутая область, то вектор F находится численно непосредственно из уравнения Ляпунова-Беллмана :

$$\nabla V \cdot \varphi(X, \Phi) + W(X, \Phi) = \min_{U \in \nu} \{\nabla V, \varphi(X, U) + W(X, U)\}. \qquad (1)$$

Рассмотрим более подробно уравнение (1) с учетом сведения задачи синтеза системы со многими входами к нескольким задачам для ряда независимых подсистем с одним входом. При этом правую часть уравнения (1) можно представить в виде

$$F(X) + BU = \sum_{i}^{n} (f_i(X) + b_i U),$$

где n – число независимых подсистем, определяемое из условий декомпозиции.

Таким образом, задача синтеза законов управления свелась к исследованию систем управления вида

$$\dot{X} = F(X) + bu,$$

где u – скалярная величина.

Рассмотрим простейшую задачу оптимизации функционала

$$I=\int_0^\infty W(x,u)dt$$

на основании использования идей А.М. Летова. Имеем уравнение возмущенного движения объекта

$$\dot{x}=ax+bu \tag{2}$$

и оптимизирующий функционал

$$I=\int_0^\infty (qx^2+ru^2)dt, \quad x(0)=x_0. \tag{3}$$

Уравнения динамического программирования принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &qx^2+ru^2+(ax+bu)\dot{V}(x)=0;\\ &2ru+b\dot{V}(x)=0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда получаем

$$bru^2+2arxu-qbx^2=0$$

и находим решение

$$u=-\frac{a+k}{b}x, \quad k=\sqrt{a^2+\frac{qb^2}{r}}. \tag{4}$$

При этом решение $\frac{k-a}{b}x$ отбросили как не отвечающее требованиям устойчивости движения по Ляпунову. Уравнение замкнутой системы будет следующим:

$$\dot{x}-ax=-(a+k)x$$

или

$$\frac{\dot{x}}{k}+x=0. \tag{5}$$

В соответствии с уравнением (5) можно получить оценку для времени затухания переходных процессов в замкнутой системе. Вид переходного процесса определяется общим решением однородного уравнения (5) и является экспонентой $x=x_0e^{-kt}$. Закон управления (4) и уравнение замкнутой системы (5) были получены на основе критерия качества (3).

Осуществим синтез оптимального регулятора для уравнения

$$\dot{x}=f(x)+b(x)u,\ f(0)=0,\ x(0)=x_0, \tag{6}$$

минимизирующего значение функционала

$$I=\int_0^\infty (Q(x)+r(x)u^2)dt. \tag{7}$$

Анализируя структуру выражений (2), (3) и (6), (7), заметим, что

$$ax=f(x),\ qx^2=Q(x). \tag{8}$$

Подставив формулу (8) в уравнение (4), получим следующий вид оптимального управления:

$$u=\frac{-f\pm\sqrt{f^2+\frac{Q}{r}b^2}}{b} \tag{9}$$

и уравнение замкнутой системы

$$\dot{x} - f(x) = -f(x) \pm \sqrt{f(x)^2 + \frac{Q(x)}{r(x)} b^2(x)}$$

или

$$\dot{x} \mp \sqrt{f(x)^2 + \frac{Q(x)}{r(x)} b^2(x)} = 0 .$$

Задача определения оптимального управления (9) для нелинейного объекта (6) может быть заменена задачей построения специального интегрального многообразия решений дифференциальных или разностных уравнений.

Осуществим синтез оптимального регулятора для дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{x} = f(t) + u , f(0) = 0, x(0) = x_0, \tag{10}$$

минимизирующего значения функционала

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty [Q(x) + u^2] dt .$$

Обозначим через $X(t) = R(t,\tau,\ x(\tau))$ решение в форме Коши оптимизированного дифференциального уравнения $\dot{x} = F(t, x, u(t, x))$. Минимальное значение функционала обозначим через $\mathrm{v}(t, x) = \int_0^\infty W(\tau, R(\tau, t, x),\ u(\tau, R(\tau, t, x))) d\tau$. Тогда уравнение Беллмана для функции $\mathrm{v}(t,x)$ принимает вид

$$\min_u \left\{ \frac{\partial \mathrm{v}(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} (f(x) + u) + Q(x) + u^2 \right\} = 0 . \tag{11}$$

Предположим, что функция

$$H(t,x,\nabla V,u) = \nabla V^* F(t,x,u) + W(t,x,u)$$

является достаточно гладкой, имеет при закрепленных значениях $t,x,\nabla V$ единственный минимум по u, определенный из уравнения

$$\nabla V \frac{\partial F(t,x,u)}{\partial u} + \frac{\partial W(t,x,u)}{\partial u} = 0 , \tag{12}$$

что уравнение (12) разрешимо относительно u. Запишем это решение в виде:

$$u = \Phi(t,x,\nabla V). \tag{13}$$

Считаем, что $\Phi(t,0,0) \equiv 0$. Подставляя решение (13) в уравнение (11), приходим к нелинейному уравнению с частными производными:

$$\dot{V}(t,x) + \nabla V F(T,x,\Phi) + W(t,x,\Phi) = 0 . \tag{14}$$

В случае автономной системы (11) имеем $u = -\nabla V$. Следовательно, справедливо представление уравнений (10) и (14) в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - \nabla V; \\ \dot{V} = -\nabla V \dfrac{df(x)}{dx} - \dfrac{1}{2} \dfrac{dQ(x)}{dx}. \end{cases} \tag{15}$$

Отметим, что систему уравнений (15) можно найти также из принципа максимума Л. С. Понтрягина. Составим уравнение для интегрального многообразия $\nabla V = S(x)$ этой системы уравнений:

$$-S(x)\frac{df(x)}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dQ(x)}{dx} = \frac{dS(x)}{dx}(f(x) - S(x)). \tag{16}$$

Интегрируя уравнение (16), получаем

$$S^2(x) - 2S(x)f(x) - Q(x) = C;\ \ C = \text{const}.$$

Поскольку $S(0) = 0$, то $C = 0$. Находим оптимальное управление

$$u = -S(x) = -f(x) - \operatorname{sign}x\sqrt{f^2(x) + Q(x)}, \tag{17}$$

которое по виду совпадает с выражением (9) при $b(x) = r(x) = 1$.

Минимальное значение функционала определяется выражением

$$\mathrm{v}(x_0) = \int_0^{x_0} \nabla V(x) d(x) = \int_0^{x_0}\left(f(x) + \operatorname{sign}x_0\sqrt{f^2(x) + Q(x)}\right)dx.$$

Оптимальное управление типа (9) и (17) получено для скалярного объекта. Вывод может быть обобщен для случая векторного объекта, однако решение задачи синтеза оптимальных регуляторов в замкнутой форме возможно только в простейших случаях.

Применение рассмотренного метода структурного синтеза позволило для системы уравнений, описывающих движение воздушного судна в горизонтальной плоскости относительно заданной прямой, на основе линеаризованных уравнений получить следующий вид управляющей функции $\gamma_{зад}$ с переменной структурой:

$$\gamma_{зад} = -k_z z - k_\psi \psi \ \text{ при } k_\psi = \operatorname{sign}(z, \psi)\frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{4V}{g}k_z \psi \dot{z} + K_z^2 z^2}.$$

При больших начальных отклонениях от $\psi = 0$ разворот воздушного судна происходит с креном, ограниченным значением угла $\gamma_{зад}$, а при малых рассогласованиях он плавно приближается к стабилизированному значению. При одинаковых знаках бокового уклонения z и скорости его изменения $\dot{z}$ сигнал, пропорциональный углу разворота ψ, вызывает дополнительное отклонение элеронов с целью ускорения процесса стабилизации. При различных же знаках бокового уклонения и скорости его изменения, дополнительного и нежелательного в данном случае демпфирования от сигнала, пропорционального скорости, изменения $\dot{z}$ не происходит.

Таким образом, для стационарных систем с одним входом можно получить множество допустимых управлений вида (10) с общим коэффициентом усиления, зависящим от фазовых координат. Выбор конкретного закона управления $u \in U$ может определяться дополнительными требованиями к качеству переходных процессов, к величине области G и др.

Важное значение имеет универсальность алгоритмического обеспечения при формировании управляющей функции $\gamma_{зад}$. На его основе могут создаваться система объективного контроля действий обучаемого пилота, электронный имитатор оптимального пилота для предполетной проверки тренажера в процессе его эксплуатации, электронный советчик для поддержки действий пилота с учетом индивидуальных предпочтений оператора, автоматизированная обучающая система принятия решений в реальном времени.

Стаття надійшла до редакції 2 грудня 1999 року.