УДК 519.21

М.Т. Корнійчук, І.К. Совтус,
А.І. Семенченко, М.О. Шутко

МЕТОД ТВІРНОЇ ФУНКЦІЇ У ВСТАНОВЛЕННІ ПЕРЕХІДНИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ СТАНІВ СКЛАДНОЇ СИСТЕМИ

Розглянуто процес функціонування складної системи методами теорії масового обслуговування. Побудовано інтегродиференціальне рівняння для твірної функції перехідних ймовірностей можливих станів складної системи, доведено теорему про достеменність цього рівняння.

Важливою проблемою при вивченні процесу функціонування складних систем (ПФСС) є побудова достатньо адекватної математичної моделі цього процесу. Оскільки реальний ПФСС зазнає випадкових збурень, поломок, відновлень поломок, то його математична модель має відноситися до класу ймовірнісних моделей. Одним з найадекватніших методів описання ПФСС у цьому класі є теорія масового обслуговування (ТМО), тому використаємо її і сформулюємо вихідні дані ПФСС і постановку задачі на мові і в термінах ТМО. Предметом дослідження даної роботи є ПФСС, що характеризується такими даними. Течія заявок (вимог) на обробку є випадковою і неординарною. Це означає, що в один і той самий момент часу допускається одночасна поява декількох заявок. Інтенсивність течії є функцією часу, тобто вона залежить від проміжку часу, який минув з моменту надходження останньої групи заявок. Оскільки важливим фактором для ПФСС є завантаженість самої системи, тобто неможливість надходження заявок до системи при її великій завантаженості, то це означає, що інтенсивність течії має бути функцією об'єму завантаженості системи. Технологія обслуговування вимог є багатоканальною, тобто кожна із заявок, що надійшли для обробки, негайно займає свій, для неї відведений канал. У цих умовах як кінцевий результат цікавим є сталий режим процесу функціонування системи, ймовірності можливих станів системи (під станом розуміють наявність певної кількості завдань в системі).

Течія заявок (вимог) на обслуговування, що надходить у складну систему, має такі характеристики: вимоги надходять групами, інтенсивність надходжень обернено пропорційно залежить від кількості зайнятих обслуговуванням каналів в системі ремонту від часу, який минув з моменту надходження останньої групи вимог. Так, якщо в момент часу t зайняті обслуговуванням k каналів, а остання група заявок надійшла в момент часу $t-x$, то при малому прирості Δ ($\Delta \downarrow 0$) ймовірність надходження групи з r вимогами на проміжку часу $(t, t+\Delta)$ з точністю до вищого порядку мализни порівняно з Δ є прямо пропорційною Δ і обернено пропорційною кількості наявних заявок, і тому дорівнює

$$\frac{\lambda_r(x)}{k+1}\Delta + o(\Delta), \quad r = 1, 2, 3, \ldots .$$

Для зручності подальших аналітичних викладок і їх запису введемо сумарну функцію послідовності $\lambda_r(x)$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, позначивши її через $\lambda(x)$, тобто

$$\lambda(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r(x). \tag{1}$$

Якщо функції (1) описують реальний ПФСС, то природно припустити, що при будь-якому $x > 0$ цей ряд збігається, тобто $\lambda(x) < \infty$, що узгоджується з вимогами до задач, які розв'язуються на практиці. Будемо вважати, що час обробки інформації (обслуговування) на кожному каналі не залежить від обслуговування на інших каналах, від вхідної течії і підкоряється експоненціальному розподілу з параметром μ.

Для зручності через p_k позначимо ймовірність того, що в довільний момент часу зайняті обслуговуванням k каналів системи в припущенні, що процес роботи системи встановився, а через $p_k(x)$ – ймовірність того, що в довільний момент часу зайняті обслуговуванням k каналів. Час, що минув з моменту надходження останньої групи вимог, не перевищує x. Метою роботи є відшукання чисел p_k і функцій $p_k(x)$, тобто розподіл кількості каналів, зайнятих обслуговуванням.

Для стохастичного моделювання ПФСС побудуємо такий процес: нехай ξ_t – кількість каналів, зайнятих в момент часу t обслуговуванням вимог. Тоді фазовим простором цього процесу буде $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Легко бачити із співвідношення (1), що ξ_t не є марківським процесом, і тому пряме застосування методів ТМО є проблематичним. Спробуємо цей процес звести до марківського, розширивши фазовий простір, тобто розповсюдивши на площину з відповідним розширенням фазового простору. Введемо ще одну компоненту η_t – час, що пройшов до моменту t з моменту надходження останньої групи вимог.

Тепер маємо векторний випадковий процес (ξ_t, η_t), який, як легко довести, вже буде марківським процесом (однорідним в часі) у фазовому просторі $\{0, 1, 2, \ldots\} \times [0, \infty)$, що є декартовим добутком просторів процесів ξ_t та η_t. Розглянемо його перехідні ймовірності. Неважко показати, що вони за малий час $\Delta(\Delta \downarrow 0)$ будуть мати такий вигляд:

$$\begin{cases} (k, x+\Delta) = 1 - \left[k\mu + \dfrac{\lambda(x)}{k+1}\right]\Delta + o(\Delta), \\ (k-1, x+\Delta) = k\mu\Delta + o(\Delta), \\ (k+r, 0) = \dfrac{\lambda_r(x)}{k+1}\Delta + o(\Delta), \end{cases} \tag{2}$$

звідки випливає, що побудований векторний процес вклався в межі процесу, описаному в роботі [1]. Використовуючи методи ланцюгів Маркова з напівмарківським втручанням випадку, можна показати, що

$$p_k(x) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\xi_t = k, \eta_t < x\} = \int_0^x p_k(u)du,$$

де функції $p_k(x)$, можливо, дорівнюють нулю. Відшукаємо функції $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Скориставшись перехідними ймовірностями (2), подамо значення цих функцій в точці $x + \Delta$ через значення їх в точці x з точністю до нескінченно малих вищого порядку мализни порівняно з Δ:

$$p_0(x+\Delta) = p_0(x)\,[1 - \lambda(x)\,\Delta] + p_1(x)\,\mu\Delta + o(\Delta),$$

$$p_k(x+\Delta) = p_k(x)\,[1 - (k\mu + \frac{\lambda(x)}{k+1})\,\Delta] + p_{k+1}(x)\,(k+1)\mu\Delta + o(\Delta), \tag{3}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Виконаємо перетворення наведених виразів, а саме, перенесемо величини $p_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$ з правої частини в ліву частину рівностей і одержаний результат поділимо на величину Δ:

$$\frac{p_k(x+\Delta) - p_k(x)}{\Delta} = -\left(k\mu + \frac{\lambda(x)}{k+1}\right)p_k(x) + (k+1)\mu p_{k+1}(x) + \frac{o(\Delta)}{\Delta},$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Виконаємо граничний перехід в одержаних рівностях при досить малих значеннях величини Δ, яка прямує до нуля. Тоді з останніх співвідношень випливає нескінченна система диференціальних рівнянь для визначення функцій $p_k(x)$:

$$p_k'(x) = -\left(k\mu + \frac{\lambda(x)}{k+1}\right)p_k(x) + (k+1)\mu p_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{4}$$

Щоб мати повну інформацію, для одержаної системи диференціальних рівнянь запишемо початкові умови; вони легко випливають з третього співвідношення (2), тобто

$$p_k(0) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{r+1} \int_0^{\infty} p_r(u)\lambda_{k-r}(u)du, \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{5}$$

Безпосереднє розв'язання системи рівнянь (4) наштовхується на досить серйозні аналітичні труднощі, тому введемо допоміжний ланцюг Маркова ζ_x, який визначимо таким чином: фазовий простір ζ_x являє собою $\{\omega, 0, 1, 2, \ldots\}$, а перехідні ймовірності за малий час Δ мають вигляд:

$$\begin{gathered} P\{\zeta_{x+\Delta} = k / \zeta_x = k\} = 1 - [k\mu + \frac{\lambda(x)}{k+1}]\,\Delta + o(\Delta), \\ P\{\zeta_{x+\Delta} = k - 1/\zeta_x = k\} = k\mu\Delta + o(\Delta), \\ P\{\zeta_{x+\Delta} = \omega/\zeta_x = k\} = \frac{\lambda(x)}{k+1}\,\Delta + o(\Delta), \end{gathered} \tag{6}$$

$$P\{\zeta_{x+\Delta} = \omega/\zeta_x = \omega\} = 1, \ \Delta \to 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для подальшого описання допоміжного ланцюга (6) визначаємо його перехідні ймовірності $p_{jk}(y, x)$:

$$p_{jk}(y, x) = P\{\zeta_x = k / \zeta_y = j\}, \ (y \le x).$$

За допомогою визначальних перехідних ймовірностей (6) функції $p_{jk}(y, x)$ можна зв'язати за умови, що $\Delta \to 0$:

$$p_{jk}(y - \Delta, x) = \left[1 - \left(j\mu + \frac{\lambda(y)}{j+1}\right)\Delta\right]p_{jk}(y, x) + j\mu\Delta p_{j-1,k}(y, x) + o(\Delta),$$

$$\begin{gathered} p_{jk}(y, x + \Delta) = \left[1 - \left(k\mu + \frac{\lambda(x)}{k+1}\right)\Delta\right]p_{jk}(y, x) + \\ + (k+1)\mu\Delta p_{j,k+1}(y, x) + o(\Delta), \quad j,k \in \{0,1,2,\ldots\} . \end{gathered} \tag{7}$$

Перенесемо з правих частин одержаних рівностей в ліві функції $p_{jk}(y, x)$ і розділимо всі рівності на величину Δ, тоді

$$\frac{1}{\Delta}\left[p_{jk}(y - \Delta, x) - p_{jk}(y, x)\right] = -\left[j\mu + \frac{\lambda(y)}{j+1}\right]p_{jk}(y, x) + j\mu p_{j-1\,k}(y, x) + \frac{o(\Delta)}{\Delta},$$

$$\frac{1}{\Delta}\left[p_{jk}(y, x + \Delta) - p_{jk}(y, x)\right] = -\left[k\mu + \frac{\lambda(x)}{k+1}\right]p_{jk}(y, x) + (k+1)\mu p_{j\,k+1}(y, x) + \frac{o(\Delta)}{\Delta},$$

$$j, k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Якщо спрямувати Δ до нуля і розглянути граничне значення, то одержані співвідношення дають можливість побудувати для функцій $p_{jk}(y, x)$ систему диференціально-різницевих рівнянь в частинних похідних:

$$\frac{\partial}{\partial y} p_{jk}(y,x) = \left[j\mu + \frac{\lambda(y)}{j+1} \right] p_{jk}(y,x) - j\mu p_{j-1,k}(y,x),$$

$$j,\, k \in \{0,\, 1,\, 2,\, \dots\};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{jk}(y,x) = -\left[k\mu + \frac{\lambda(x)}{k+1} \right] p_{jk}(y,x) + (k+1)\mu p_{j,k+1}(y,x),$$

$$j,\, k \in \{0,\, 1,\, 2,\, \dots\}. \tag{8}$$

Одержані співвідношення (8) за математичною структурою перетинаються з виразами (4). Із їхнього порівняння випливає, що шукані функції $p_n(x)$ можна подати через перехідні ймовірності $p_{jk}(y,\, x)$, а саме:

$$p_k(x) = \sum_j C_j p_{jk}(0,x). \tag{9}$$

Нагадаємо, що

$$p_{jk}(0,0) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, \text{якщо } j = k, \\ 0, \text{якщо } j \neq k, \end{cases}$$

тому можна виразу (9) надати такий вигляд:

$$p_k(x) = \sum_j p_j(0) p_{jk}(0,x). \tag{10}$$

Повернемося до допоміжного ланцюга. Використовуючи співвідношення (9) для перехідних ймовірностей $p_{jk}(y,\, x)$ допоміжного марківського ланцюга ζ_x дістаємо такі рекурентні співвідношення:

$$p_{0k}(y,x) = \delta_{ok} \exp\left\{ -\int_y^x \lambda(u) du \right\},$$

$$p_{jk}(y,x) = \delta_{jk} \exp\left\{ -\int_y^x \left[j\mu + \frac{\lambda(u)}{j+1} \right] du \right\} +$$

$$+ j\mu \int_y^x \exp\left\{ -\int_y^v \left[j\mu + \frac{\lambda(u)}{j+1} \right] du \right\} p_{j-1,k}(v,x) dv,$$

$$j = 1,\, 2,\, 3,\, \dots .$$

Одержані функції є доволі строкатими за своїм інформативним змістом. Тому виникає потреба інтегрального погляду на них, для чого вводимо твірну функцію послідовності $\{p_{jk}(y,\, x)\}$:

$$\Phi_k(y,x,z) = \sum_{j=k}^{\infty} p_{jk}(y,x) z^j . \tag{11}$$

Введена функція (11) є досить інформативною. Її внутрішній зміст розкриває наступне твердження.

Теорема. Твірна функція $\Phi_k(y,\, x,\, z)$ задовольняє інтегродиференціальне рівняння в частинних похідних у вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y} \Phi_k(y,x,z) + \mu z \Phi_k(y,x,z) = \\ &= \mu z(1-z) \frac{\partial}{\partial z} \Phi_k(y,x,z) + \frac{\lambda(y)}{z} \int_0^z \Phi_k(y,x,u) du. \end{aligned} \tag{12}$$

Доведення. Домножимо ліву та праву частини першого співвідношення (8) на z і просумуємо по j від k до нескінченності. Зліва одержимо частинну похідну по y від функції $\Phi_k(y, x, z)$, праворуч – вирази, що містять величину $\frac{z^j}{j+1}$, а це зручно подати через інтеграл $\int_0^z u du$. Після аналітичних перетворень одержимо інтегродиференціальне рівняння (12), якому задовольняє функція $\Phi_k(y, x, z)$, що й треба довести.

Зауважимо, що складність розв'язку рівняння залежить від структури функції $\lambda(y)$. Якщо ж говорити про прикладне значення розв'язку, то одержане рівняння можна розв'язувати, використовуючи відомі наближені методи. Це дозволить знайти деякі оцінки ймовірностей p_k і $p_k(x)$ процесу функціонування складних систем і за допомогою їх описувати реальний процес функціонування системи та будувати відповідні алгоритми його раціоналізації і навіть оптимізації.

Список літератури

1. *Ежов И.И.* Цепи Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс //УМЖ. –1966. –№ 1. – С. 12–16.
2. *Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю.* Методы расчета высоконадежных систем. – М.: Радио и связь, 1988. – 184 с.
3. *Корнийчук М.Т.* Математические модели оптимизации и оценивания надежности и эффективности функционирования сложных радиотехнических систем.– К.: КВИРТУ ПВО, 1980.–280 с.
4. *Корнійчук М.Т., Совтус І.К.* Ризик і надійність. Економіко-стохастичні методи й алгоритми побудови та оптимізації систем: Монографія. – К.: КНЕУ, 2000. – 212 с.

Стаття надійшла до редакції 27 листопада 2000 року.

УДК 629.053.072

А.П. Ткалич

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрены вопросы синтеза оптимального управления для нелинейных динамических систем с одним входом.

Современная теория автоматического управления основывается на учении А.М. Ляпунова об устойчивости движения. Для исследования устойчивости движения динамической системы А.М. Ляпунов предложил использовать специальные знакоопределенные функции $V(t, X)$ (функции Ляпунова, отдаленный аналог энергетической функции Лагранжа), обладающие специальными свойствами. Удачно построенная функция Ляпунова для конкретной нелинейной системы автоматического управления позволяет решать целый комплекс задач (оценка изменения регулируемой величины, оценка времени протекания переходного процесса, оценка интегральных критериев качества регулирования и т.д.).

В теории экстремальных систем видное место занимают градиентные системы, у которых в правой части уравнений фигурирует градиент функции Ляпунова.