АВТОМАТИЗОВАНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ

УДК 681.5:519.242/248

А.В. Кудиненко, Ю.А. Егоршин, О.Ю. Красноусова

ПРОВЕРКА ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ В ДОПУСК ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ В РАЗНОРОДНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Предложена и обоснована процедура проверки гипотезы о полной вероятности без определения частных (условных) вероятностей, соответствующих разным условиям функционирования сложной системы.

Стандартная процедура проверки гипотезы о вероятности Р типа $\mathrm{P} \geq \mathrm{P}_{\mathrm{т}}$, где $\mathrm{P}_{\mathrm{т}}$ – требуемый уровень [1], основана на использовании схемы Бернулли [2] для однородной выборки при Р = const.

Современные сложные системы, как правило, функционируют в разнородных условиях, которым соответствуют разные уровни P_j вероятности попадания параметров в заданные допуски [3].

Единым интегральным показателем качества системы в этих случаях является полная вероятность:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{п}} = \sum_{j=1}^{m} S_j \mathrm{P}_j \,, \tag{1}$$

где S_j – встречаемость (вероятность) j – условий; m – число групп условий.

Для одних и тех же значений $\mathrm{P}_{\mathrm{п}}, S_j$ формула (1) допускает множества разных наборов P_j, что делает бессмысленным оценивание частных вероятностей P_j или проверку гипотез типа $\mathrm{P}_j \geq \mathrm{P}_{\mathrm{т}\,j}$ для разных условий.

Проверить гипотезу $\mathrm{P}_{\mathrm{п}} \geq \mathrm{P}_{\mathrm{т}}$ в этом случае можно без знания или определения вероятностей P_j (если известны или задаются значения S_j) излагаемым ниже способом.

1. Необходимо назначить суммарное число испытаний N, исходя из требуемого значения $\mathrm{P}_{\mathrm{т}}$, допустимого риска ошибки второго рода β и приемочного числа K выходов за допуск, используя формулу [1]:

$$\beta = \sum_{i=0}^{K} P_{\mathrm{т}}^{N-i} q_{\mathrm{т}}^{i} C_N^i \,, \tag{2}$$

где $q_{\mathrm{т}} = 1 - \mathrm{P}_{\mathrm{т}}$.

2. Распределить число N на число N_j испытаний в j-х условиях пропорционально их встречаемости, т.е. $N_j = S_j N$.

3. Провести $N = \sum_{j=1}^{m} N_j$ испытаний, регистрируя выходы за допуск.

4. В зависимости от реализованного числа K^* выходов за допуск принять гипотезу о вероятности или решение о продолжении испытаний с назначением нового приемочного числа $K \geq K^*$ и нового объема испытаний N^*.

Гипотеза $\mathrm{P}_{\mathrm{п}} \geq \mathrm{P}_{\mathrm{т}}$ принимается с риском β', не большим β, если $K^* \leq K$ и $N^* \geq N$.

При $K^* \geq K_c$ с риском $\varepsilon' \approx \varepsilon$ принимается гипотеза $P_п < P_т$, если реализованное суммарное число испытаний $N^* \leq N_c$:

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=0}^{Kc} P_т^{Nc-i} q_T^i C_{Nc}^i \quad , \tag{3}$$

где $K_c = 0,1...K$ – число выходов за допуск критическое; N_c – критическое число испытаний.

При $K^* > K$, $N^* \leq N$ с риском $\alpha' \approx \alpha$ (ошибки первого рода) можно принять гипотезу $P_п < P_т$:

$$\alpha = 1 - \sum_{i=0}^{K} P_г^{N-i} q_г^i C_N^i \ , \tag{4}$$

где $q_г = 1 - P_г$, $P_г$ - верхний (предполагаемый) уровень $P_п$.

Формулы (2), (3), (4) справедливы для однородных выборок, однако риск β' (ошибки второго рода) для неоднородных выборок будет не больше риска β (2), риски ε' и α' для неоднородных выборок будут несущественно больше рисков ε и α (3) и (4).

Например, при K=0 вероятность отсутствия выходов за допуски во всех условиях испытаний равна:

$$\beta' = \prod_{j=1}^{m} P_j^{S_j N} \ . \tag{5}$$

Эта величина не превышает значения риска $\beta = P_т^N$ при проведении испытаний в однородных условиях, если $P_т$ приравнять величине $P_п$ (1).

Действительно, выражение (1) представляет собой среднее взвешенное арифметическое значение, а риск $\beta = P_т^N$ – это же значение в степени N. В свою очередь, риск β' (5) представляет собой среднее степенное значение в степени N, которое не больше, чем $P_т^N$.

Приведем доказательства неравенства $\beta' \leq \beta$ для случая двоичной градации условий эксплуатации, если приемочное число выходов за допуск $K = 1$. Подобный случай соответствует ситуации, когда все условия эксплуатации делят на две группы – группу нормальных условий и группу сложных (экстремальных) условий.

Для однородных условий риск ошибочного принятия гипотезы $P > P_T$ при $K \leq 1$ из (2) равен:

$$\beta_1 = B_1 + \beta \ , \tag{6}$$

где $B_1 = N P_т^{N-1} q_т$ – вероятность одного выхода за допуск; $\beta = P_т^N$ – вероятность отсутствия выходов за допуск.

Для неоднородных условий с встречаемостями S_1, S_2 соответственно можно записать:

$$\beta_1' = B_1' + \beta' \ , \tag{7}$$

где $B_1' = N_1 P_1^{N_1-1} q_1 P_2^{N_2} + N_2 P_2^{N_2-1} q_2 P_1^{N_1}$; $N_j = S_j N$; $j = 1,2$.

Используя (6) и (7), введем в рассмотрение показатель $\frac{B_1'}{B_1} = \varphi$:

$$\varphi = \frac{\left(\frac{P_1^{S_1} P_1^{S_2}}{P_т}\right)^N P_т \left(\frac{S_1 q_1}{P_1} + \frac{S_2 q_2}{P_2}\right)}{q_т} = X^N Y \ . \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что в уравнении (8) имеются неравенства $X \leq 1, Y \geq 1$, причем знак равенства соответствует случаю однородной выборки.

Исследуем поведение функции $\varphi(\mathrm{P}_1)$ для разнородных условий, учитывая связь $\mathrm{P}_2 = (\mathrm{P}_\mathrm{T} - S_1\mathrm{P}_1)/S_2$, следующую из (1), полагая $\mathrm{P}_1 \geq \mathrm{P}_\mathrm{T} \geq \mathrm{P}_2$ и беря производную φ по P_1:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial \mathrm{P}_1} = S_1 X^N \frac{\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2} - \frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)\mathrm{P}_\mathrm{T}\left[\frac{1}{\mathrm{P}_2} + \frac{1}{\mathrm{P}_1} - N\left(\frac{S_1}{\mathrm{P}_1} + \frac{S_2}{\mathrm{P}_2} - 1\right)\right]}{q_\mathrm{T}}. \qquad (9)$$

Из выражения (9) следует вывод о том, что экстремум функции $\varphi(\mathrm{P}_1)$ соответствует случаю $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_\mathrm{T}$ (однородная выборка).

В зависимости от знака выражения в квадратных скобках (9) функция $\varphi(\mathrm{P}_1)$ может быть монотонно возрастающей или монотонно убывающей. Последний случай имеет место при $N > N'$, где значение N' найдем, решая уравнение:

$$N'\left(1 - \frac{S_1}{\mathrm{P}_1} - \frac{S_2}{\mathrm{P}_2}\right) + \frac{1}{\mathrm{P}_2} + \frac{1}{\mathrm{P}_1} = 0\ . \qquad (10)$$

Из уравнения (10) следует

$$N' = \frac{\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2}{S_1\mathrm{P}_2 + S_2\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\ . \qquad (11)$$

С учетом монотонно убывающего характера функции $\varphi(\mathrm{P}_1)$ при $N > N'$, а также с учетом поведения функции X^N при $X > 1$, можно заключить, что наибольшие значения N' соответствуют наименьшим значениям $\mathrm{P}_1 \geq \mathrm{P}_\mathrm{т}$. Осуществим предельный переход в (11), приближая P_1 к P_T справа. При этом P_2 стремится к $\mathrm{P}_\mathrm{т}$ слева.

Тогда из выражения (11) получим

$$\lim_{P_1 \to P_\mathrm{T}} N'_{\min} = \frac{2}{q_\mathrm{T}}. \qquad (12)$$

Минимальное значение N' соответствует максимальному различию условий испытаний. В частности, при $\mathrm{P}_1 \to 1$ из (11) получим

$$\lim_{P_1 \to 1} N'_{\min} = \frac{1 + \mathrm{P}_2}{S_2(1 - \mathrm{P}_2)}\ . \qquad (13)$$

Например, при $\beta_1 = 0{,}1$, $\mathrm{P}_\mathrm{т} = 0{,}9$, $S_2 = 0{,}25$ из (12) и (13) имеем $N'_{\max} = 20; N'_{\min} = 16$.

Для обычно используемых малых значений рисков β_1 планируемое число испытаний в однородных условиях, определяемое из уравнения (6), превышает значение $N'_{\max}$ (12). Отсюда можно заключить, что неравенство $\beta_1' \leq \beta_1$ заведомо выполняется.

Подобным образом можно доказать выполнение неравенства $\beta_2' \leq \beta_2$, где β_2' – вероятность появления менее трех выходов за допуск при двух разнородных условиях, имеющих одинаковую встречаемость, β_2 – вероятность появления менее трех выходов за допуск в N испытаниях при однородных условиях.

Для других случаев (разной встречаемости двух групп условий) справедливость неравенства $\beta_2' \leq \beta_2$ была показана нами путем численного моделирования.

Теперь обратим внимание на особенности формул для рисков ε, α ошибочных решений в принятии альтернативной гипотезы $\mathrm{P} < \mathrm{P}_\mathrm{т}$. При бездефектном контроле в однородных условиях эта гипотеза принимается с риском ε (3), если в первых по счету испытаниях $(N^* \leq N_\mathrm{c})$ есть выходы за допуск или с риском α, если выходы за допуск наблюдаются при проведении N испытаний, запланированных исходя из (4). Для случая двух неоднородных условий введем: $N_{\mathrm{c}j} = S_j N_\mathrm{c}, \mathrm{P}_\mathrm{т} = \sum S_j \mathrm{P}_{\mathrm{т}j}, j = 1{,}2.$

Тогда выражение для рисков ε', α' принимает вид:

$$\varepsilon' = 1 - \mathrm{P}_1^{N_{c1}} \mathrm{P}_2^{N_{c2}}, \tag{14}$$

$$\alpha' = 1 - \mathrm{P}_{\text{г}1}^{N_1} \mathrm{P}_{\text{г}2}^{N_2}. \tag{15}$$

Поскольку $N_c << N$, то в первом приближении формулы (3) и (14) приводят к одному и тому же результату: $\varepsilon \approx \varepsilon' \approx q_\text{т} N_c << 1$. Поскольку значение $q_\text{г}$ оказывается заметно меньшим значения $q_\text{т}$, в первом приближении формулы (4) и (15) также приводят к одинаковому результату : $\alpha \approx \alpha' \approx q_\text{г} N << 1$.

Аналогичные выводы о близости значений ε и ε', α и α' можно получить и для других случаев приемки $(K > 0)$.

Таким образом, стандартная процедура проверки гипотезы о вероятности нами обоснованно распространена на неоднородные выборки, соответствующие разнородным условиям эксплуатации и испытаний сложных систем.

В заключение приведем пример планирования испытаний в неоднородных условиях при заданной встречаемости $S_1 = 0{,}8, S_2 = 0{,}2$ нормальных и экстремальных условий эксплуатации сложной системы. Для проверки требуемой вероятности $\mathrm{P}_\text{т} = 0{,}95$ с допустимым риском $\beta = 0{,}1$ согласно выражению (2) необходимо выбрать $N = 45$ при $K = 0$, либо $N = 77$ при $K = 1$, либо $N = 105$ при $K = 2$.

Ограничим максимальное число испытаний значением $N = 105$ и распределим его на две составляющие $N_1 = S_1 N = 84$ и $N_2 = S_2 N = 21$. Выберем риски ε и α равными значению β. Тогда из выражения (3) получим $N_c = 2$ при $K = 0$, $N_c = 11$ при $K = 1$, $N_c = 23$ при $K = 2$.

Первые два испытания следует проводить в нормальных условиях, так как $2S_2 < 1$. При наличии выхода за допуск для какого-либо параметра системы в этих двух испытаниях с риском $\varepsilon_0 < \varepsilon$ принимается гипотеза $\mathrm{P}_\text{н} < \mathrm{P}_\text{т}$. При отсутствии выходов за допуск первое испытание в экстремальных условиях можно проводить после набора $N^* = 4$, второе – после набора $N^* = 9$. Если в первых 45 испытаниях $(N_1^* = 36, N_2^* = 9)$ $K^* = 0$, то с риском $\beta' \leq 0{,}1$ принимается гипотеза $\mathrm{P} \geq \mathrm{P}_\text{т}$; если $K^* = 1$ при $N^* > 11$, то следует продолжать испытания до набора $N^* = 77$ и т.д. Если $K^* > 2$ при $N^* \leq 105$ и $N_2^* \leq 21$, то с риском $\alpha' \approx \alpha$ принимается гипотеза $\mathrm{P} < \mathrm{P}_\text{т}$.

Список литературы

1. *Зажигаев Л.С., Кишьян А.А., Романиков Ю.И.* Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента.– М.: Атомиздат, 1978.– 232 с.

2. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.1. – М.: Сов.радио, 1974. – 552 с.

3. *Задачи* и структура летных испытаний самолетов и вертолетов/Ред. А.Д. Миронов.– М.: Машиностроение,1982.–144 с.

Стаття надійшла до редакції 30 грудня 1999 року.