

УДК 539.375

B257.04 + 052-016.4

Т.І. Матченко, канд.техн.наук

## ЗАКОНИ ЯКІСНОГО СТАНУ В МЕХАНІЦІ РУЙНУВАННЯ

Національний авіаційний університет, veryzhsky@mbox.com.ua

*Проведено аналіз енергетичних критеріїв механіки руйнування. Запропоновано узагальнений енергетичний закон якісного стану матеріалу, який дозволяє будувати енергетичні критерії якісного стану матеріалу в окремих випадках.*

## Вступ

Розв'язання задач міцності та довговічності авіаційних конструкцій є складною проблемою, оскільки пошкодження матеріалу і руйнування конструкцій супроводжується якісними змінами для описування процесу деформування і пошкодження потрібні інші рівняння і критерії.

Для розв'язання вказаної проблеми необхідно вирішити три задачі:

– визначити аналітичні вирази критеріїв або рівнянь якісного стану для того чи іншого процесу пошкодження або руйнування;

– за допомогою числових методів знайти числові значення критеріїв процесу пошкодження, який розглядається в конструкції;

– експериментально визначити на зразках критичні значення критеріїв процесу пошкодження, що розглядаються в конструкції.

У зв'язку з зазначеним з'явилася велика кількість робіт з питань якісного стану для різного характеру пошкодження і процесів, що їх супроводжують. Наприклад, можуть існувати:

– якісні переходи стану матеріалу (критерії пластичності) [1; 2];

– якісні переходи форми пластичної зони біля вершини тріщини [3; 4];

– якісні переходи показників особливості напруг;

– граничні переходи енергетичного балансу при страгуванні тріщини [5–7];

– перехід від стаціонарного до нестаціонарного розвитку тріщини [5–8];

– в'язко-крихкий перехід [9–11];

– якісний перехід енергетичного балансу при розгалуженні тріщини [12; 13];

– баланс енергії і якісні стани матеріалу при циклічному навантаженні [14; 15];

– якісні зміни структури матеріалу при циклічному навантаженні [16].

Проте на сьогодні немає єдиної теорії, що описує процес накопичення пошкоджень усіх видів, їх перетворення майже до повного руйнування конструкції.

Мета роботи – розглянути закони енергетичних рівноваг і енергетичних рівнянь якісного

стану, що впливають із цього закону, узагальнити ці рівняння в єдиний закон.

## Аналіз досліджень

Баланс енергії пружного тіла, яке знаходиться в спокої, можна записати у вигляді [17]:

$$A=U, \quad (1)$$

де  $A$  – робота зовнішніх сил;  $U$  – зворотна енергія (пружна).

Баланс енергії тіла з тріщиною можна визначити за формулою [5; 6; 12]:

$$A=U+W, \quad (2)$$

де  $W$  – сума всіх незворотних складових енергії, у т. ч. енергії необхідної для утворення тріщини.

Баланс енергії для тіла з тріщиною, що розвивається, описується виразом [4; 18; 19]:

$$\dot{A} = \dot{U} + \dot{W} + \dot{K}, \quad (3)$$

де  $K$  – кінетична енергія.

Точка у формулі (3) означає похідну функції за часом.

Баланс енергії для тіла з тріщиною, що не розвивається та знаходиться під дією стаціонарного теплового впливу, має вигляд

$$A+Q=U+W, \quad (4)$$

де  $Q$  – тепла енергія.

Аналізуючи вирази (1)–(4), зауважимо, що для врахування додаткового виду впливу на деформівне тіло нового якісного стану достатньо ввести додаткову функцію, що його описує. Наприклад, при радіаційному випромінюванні на тіло з тріщиною баланс енергії можна записати у вигляді

$$A+Q+N=U+W, \quad (5)$$

де  $N$  – енергія радіаційного випромінювання.

У разі хімічного впливу на тіло з тріщиною баланс енергії можна зобразити у вигляді

$$A+Q+N+L=W+U, \quad (6)$$

де  $L$  – енергія хімічного впливу.

Отже, у разі розв'язання задачі про пошкодження матеріалу або тіла з тріщиною при цьому або іншому вигляді впливу середовища на деформівне тіло або навантаження, завжди можна записати баланс енергії в загальному

вигляді. При цьому слід пам'ятати, що кожний із символів ( $A$ ,  $Q$ ,  $U$ ,  $W$  та ін.) є функцією ряду параметрів і сумою всіх складових даного виду енергії або роботи. Наприклад,  $Q$  – сума всіх теплових впливів як зовнішніх, так і внутрішніх у наслідок дисипації енергії під час пластичного деформування, відриві,  $W$  – сума всіх незворотних складових енергії, яка включає до себе утворення нових поверхонь тріщини, незворотні затрати енергії на пластичне деформування біля вершини тріщини та ін.

Без сумніву можуть існувати якісні переходи стану матеріалу або тіла з тріщиною, коли до переходу працює одне із рівнянь (1)–(6), а після переходу інше. Тоді, прирівнюючи ліві або праві частини рівнянь (1)–(6) один до одного, можна отримати енергетичну умову якісного переходу. Наприклад, прирівнюючи праві частини рівнянь (1) і (2), отримаємо

$$U_{(1)} = U_{(2)} + W_{(2)}. \quad (7)$$

Рівняння (7) описує перехід матеріалу і пружного стану в пружнопластичний або релаксацію напруг в попередньо напруженому і зафіксованому від переміщень тілі. Доведемо правдивість рівняння (7) при описанні граничного переходу матеріалу із пружного в пружнопластичний стан.

Енергія, яка звільняється під час пластичного ковзання шарів матеріалу в одиниці об'єму і необхідна для якісного переходу, визначається залежністю

$$W = \int_0^{\tau_r} \gamma_{ij} d\tau_{ij},$$

де  $\tau_r$  – межа текучості дотичних напруг, у площині дії яких виникає ковзання шарів матеріалу;  $\gamma_{ij}$  – компоненти тензора деформацій зсуву, у площині яких виникає ковзання;  $\tau_{ij}$  – компоненти тензора дотичних напруг у площинах, яких виникає ковзання.

Ковзання шарів матеріалу під час утворення пластичної зони буде виникати в площинах, де звільнюється максимум енергії пружної деформації, тобто, по головних площинах дотичних напруг, де

$$\tau_{1,2} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2);$$

$$\tau_{2,3} = 0,5(\sigma_2 - \sigma_3);$$

$$\tau_{3,1} = 0,5(\sigma_3 - \sigma_1).$$

Тоді може існувати три критерії пластичності [20]:

- при ковзанні шарів матеріалу в одній площині;
- при ковзанні шарів в двох площинах;

– при ковзанні шарів в трьох площинах (узагальнена пластична течія).

При ковзанні в одній площині звільняється енергія пружної деформації, яка визначається за формулою

$$W_1 = \int_0^{\tau_{1,3}^0} \gamma_{1,3} d\tau_{1,3} = \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^{\tau_{1,3}^0} \tau_{1,3} d\tau_{1,3} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_3 - \sigma_1)^2, \quad (8)$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $E$  – модуль пружності.

У разі ковзання в двох площинах:

$$W_2 = \int_0^{\tau_{1,3}^0} \gamma_{1,3} d\tau_{1,3} + \int_0^{\tau_{2,3}^0} \gamma_{2,3} d\tau_{2,3} = \frac{1+\nu}{E} [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (9)$$

У разі ковзання в трьох площинах:

$$W_3 = \int_0^{\tau_{1,3}^0} \gamma_{1,3} d\tau_{1,3} + \int_0^{\tau_{2,3}^0} \gamma_{2,3} d\tau_{2,3} + \int_0^{\tau_{1,2}^0} \gamma_{1,2} d\tau_{1,2} = \frac{1+\nu}{E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (10)$$

Із співвідношень (8)–(10) видно, що отримані критерії якісного переходу матеріалу з пружного стану в пружнопластичний збігаються з критеріями пластичності Мізеса для узагальненої пластичної течії, а для пластичної течії в одній площині (характерній для пластин) – з критерієм Я.Б. Фрідмана

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq [\tau].$$

Отже, доведена правдивість виразу (7) і можливість будувати рівняння граничних переходів при появі додаткових видів енергії зовнішнього впливу або внутрішнього перетворення шляхом попарного прирівнювання лівих або правих частин рівнянь енергетичної рівноваги один одному до і після якісного переходу. Будемо називати ці рівняння першої групи рівнянь якісних станів. Відмінна їх особливість у тому, що якісний перехід супроводжується появою нового виду енергії.

Якщо символи ( $A, Q, U, W$  та ін.) є функціями тих або інших параметрів, то після диференціювання виразів (1)–(6) за тим чи іншим параметром із тому чи іншому ступені, у них зберігається знак рівняння, наприклад, [18; 19]:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dW}{dt} + \frac{dK}{dt}, \quad (11)$$

де  $t$  – час.

Вираз (11) є умовою термодинамічної рівноваги тіла з тріщиною, що розвивається і для нестационарного теплового навантаження.

Умову страгування тріщини описує рівняння [5; 6; 12]:

$$\frac{d}{dl}(A+U) = \frac{dW}{dl},$$

де  $l$  – довжина тріщини.

Умову якісного переходу до нестійкого зростання тріщини описує рівняння [5; 6; 12]:

$$\frac{d^2}{dl^2}(A+U) = \frac{d^2W}{dl^2}.$$

Як зазначалося,  $W$  є сумою всіх складових енергії, що не обертаються.

Тоді якщо  $\Delta W$  – енергія, яка необхідна для страгування тріщини, то умова розгалуження тріщини описується виразом [7]:

$$\frac{d}{dl}(A+U) = \frac{nd\Delta W}{dl},$$

де  $n$  – кількість розгалужених тріщин.

Розглянемо розсіювання енергії за один цикл навантаження. Як було показано, розсіяна енергія за один цикл навантаження (петлі гістерезиса) витрачається на розрив зв'язків вздовж осі стержня при розтягненні  $\sigma^+$ , на розрив зв'язків вздовж осі стержня при стисканні  $\sigma^+$ , на ковзання одних шарів (тертя) в площині зсуву при  $\gamma^+$  і на ковзання інших шарів в інших або тих самих площинах зсуву  $\gamma^-$ .

Тоді, можна передбачити, що сумарна пошкодженість певного характеру при циклічному навантаженні дорівнює пошкодженості того самого характеру при статичному навантаженні. Тому введемо емпіричні коефіцієнти  $H_1, H_2, H_3, H_4$  і запишемо

$$\sum_{i=1}^{N_{P1}} D_1 H_1 = A_1;$$

$$\sum_{i=1}^{N_{P2}} D_2 H_2 = A_2;$$

$$\sum_{i=1}^{N_{P3}} D_3 H_3 = A_3;$$

$$\sum_{i=1}^{N_{P4}} D_4 H_4 = A_4.$$

де  $N_{P1}, N_{P2}, N_{P3}, N_{P4}$  – критична кількість циклів до руйнування мініоб'єму і тій чи іншій площині в результаті накопичення пошкоджень того чи іншого характеру;  $D_1, D_2$  – додатня і від'ємна частини площі петлі гістерезиса в осях  $(\sigma_v - \epsilon)$ ;  $A_1, A_2$  – площа діаграми  $\sigma - \epsilon$  статичного розтягу та стискання даного матеріалу, по

осі  $X$  (для ізотропного матеріалу  $A_1 = A_2$ );  $H_2$  – коефіцієнт, який визначає частину енергії, затрачену на розтяг по осі  $Y$  при стисканні зразка по осі  $X$ , і який залежить від розмірів і форми зразка;  $A_3, A_4$  – площі діаграми статичного зсуву в осях  $\tau_v - \gamma$ ;  $D_3, D_4$  – додатня і від'ємна частини петлі гістерезиса в координатах  $\tau_v - \gamma$ .

Сумарне розсіювання енергії при циклічному навантаженні слід записати у вигляді

$$D = \int_0^{\nu\epsilon} \int_0^1 \sigma d\epsilon dv = \sum_1^{N_P} D + A_3 = \int_1^1 \left[ \sum_{i=1}^{N_{P1}} D_1 H_1 + \sum_{i=1}^{N_{P2}} D_2 H_2 + \sum_{i=1}^{N_{P3}} D_3 H_3 + \sum_{i=1}^{N_{P4}} D_4 H_4 + A_3 \right] ds.$$

Розглядаючи ті або інші складові частини балансу енергії і беручи похідну за тим чи іншим параметром того чи іншого ступеня, будемо отримувати нові рівняння якісних переходів. Тобто всі енергетичні рівняння якісних переходів є окремими випадками одного загального закону.

Загальний вигляд закону граничних переходів, які впливають із закону збереження енергії, можна записати у вигляді

$$\frac{d^P(A-U+\dots)}{d\psi^P} = \frac{d^P(W+\dots)}{d\psi^P}, \quad (12)$$

де  $p = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ;  $\psi$  – будь-який параметр, функцією якого є енергетичні складові, що входять у вираз (12).

### Напрями подальших досліджень

Спираючись на оптимальні співвідношення, доцільно побудувати функціонали, які дозволяють будувати наступні енергетичні критерії якісних переходів:

– функціонал, який визначає умови дисипації енергії деформації (окрихчування) матеріалу в пластичній зоні при силовому навантаженні та розвантаженні;

– функціонал, який визначає умови виникнення мікротріщин при силовому або тепловому навантаженні або розвантаженні;

– функціонал, який визначає умови переходу серії мікротріщин в магістральну тріщину;

– функціонал, який визначає форму і розміри тріщини втоми матеріалів із різним рівнем крихкості;

– функціонал, який визначає умови зростання тріщини втоми;

– функціонал, який визначає умову переходу від критерію зростання тріщин утоми  $K_S$  до критерію крихкого зростання тріщини  $K_C$ .

## Висновки

1. Всі енергетичні рівняння якісних переходів стану твердого тіла є окремими випадками одного загального закону, який є похідною закону збереження енергії і записується у вигляді

$$\frac{d^p(A-U+\dots)}{d\psi^p} = \frac{d^p(W+\dots)}{d\psi^p},$$

де  $p = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ;  $A, U, W, \dots$  – символи того чи іншого виду енергії або роботи;  $\psi$  – будь-який параметр, функцією якого є енергетичні складові, що входять до виразу і які функціонально змінюються при якісному переході.

2. Той чи інший якісний перехід виникне, якщо при цьому звільниться незворотної енергії (пружної) достатньо для забезпечення всіх енерговитрат, які пов'язані з цим переходом.

## Список літератури

1. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. – К.: Наук. думка, 1969. – 620 с.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: АН СССР, 1963. – 271 с.
3. Либовин Г., Эфтинс Дж., Джонс Д. Некоторые теоретические и экспериментальные исследования в механике разрушения // Механика. Новое в зарубежной механике. Механика разрушения. – М.: Мир, 1980. – №20. – С. 168–202.
4. Морозов Е.М. Расчет допустимых длин трещин // Физико-химическая механика материалов. – 1986. – 22, №1. – С. 72–76.
5. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. of London. – 1921. – A221. – P. 163–197.
6. Griffith A.A. The theory of rupture // Proc. Ist. Int. Congress Appl. Mech. – 1924. – P. 55–63.
7. Ярема С.Я., Иващицкий Г.С. Предельное равновесие и развитие косых трещин. Обзор критериев // Физико-химическая механика материалов. – 1986. – 22, №1. – С. 45–57.
8. Yoffe E.H. The moving Griffith crack // Phil Mag Ser. – 1951. – 7. 42. – P. 739–750.
9. Dahl W., Dormagen D. Elastic-Plast. Fract. Mech // Proc. 4-th Adv-Semin., Ispra. 24–28 Oct. 1983. – P. 203–225.
10. Mudry F. Elastic-Plast. Fract. Mech. // Proc. 4-th Adv-Semin., Ispra. 24–28 Oct. 1983 – P. 303–325.
11. Kabajashi Hidea, Nakamura Haruo Takanachi Hiroyuki. Evaluation of brittle fracture toughness and ductile crack growth in the transition region // Нихон кикай чаккай ромбунсю, Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1986. – A52, № 473. – P. 143–149.
12. Броек Д. Основы механики разрушения // Пер. с англ. – М.: Высш. шк. 1980. – 368 с.
13. Kalthoff J.F. On the characteristic angle for crack branching in brittle materials // Int. J. Fracture Mech. – 1971. – 7. – P. 478–480.
14. Троценко В.Т. Деформирование и разрушение материалов при многоцикловом нагружении. – К.: Наук. думка, 1981. – 344 с.
15. Троценко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В. Трещиностойкость материалов при циклическом нагружении. – К.: Наук. думка. 1987. – 256 с.
16. Dahl W., Dormagen D. Micro-mechanisms of crack initiation and crack propagation / Elastic-Plast. Fract. Mech. Proc. 4-th Adv-semin., Ispra. 24–28 Oct. 1983. – P. 203–225.
17. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – 4-е изд. перераб и доп. / Под общ. ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко. – К.: Вища шк., Гл. изд-во, 1979. – 696 с.
18. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мех. лит. 1974. – 640 с.
19. Эрдоган Ф. Теория распространения трещин. Т.2. Разрушение. – М.: Мир, 1975. – С. 521–615.
20. Похмурский В.И., Гапулик Б.К., Иващицкий Я.Л. О релаксации касательных напряжений в металлах // ФХММ. – 1987. – №3. – С. 124–125.

Стаття надійшла до редакції 04.04.03.

Т.И. Матченко

Законы качественного состояния в механике разрушения

Проведен анализ энергетических критериев механики разрушения. Предложен обобщенный энергетический закон качественного состояния материала, позволяющий строить энергетические критерии качественного состояния материала в частных случаях.

T.I. Matchenko

The Quantitative states laws in mechanics of fracture

The analysis of energetical criterions was made in mechanics of fracture. The generalized energetical Law of quantitative state of material was offered, which allows to create energetical criterions of quantitative state of material in separate cans.