

УДК 533.6,629.7.01

0530-011.68631.7

<sup>1</sup>А.Н. Балакірєв<sup>2</sup>В.А. Удовенко, канд. техн. наук<sup>3</sup>О.В. Швець

## ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЗБУРЕНОГО РУХУ ЛІТАКА ПРІ НЕЛІНІЙНІЙ ЗМІНІ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

<sup>1,2</sup>Харківський інститут Військово-повітряних сил імені Івана Кожедуба<sup>3</sup>Національний авіаційний університет

Розглянуто приклад розрахунку збуреного поздовжнього руху легкого літака. Показано доцільність моделювання поздовжнього руху на основі розв'язку повної системи рівнянь при нелінійній зміні аеродинамічних характеристик у порівнянні з традиційним підходом – розв'язанням рівнянь короткоперіодичного руху.

### Вступ

Традиційний підхід до розв'язання задачі динаміки збуреного поздовжнього руху літального апарата (ЛА), зводиться до лінеаризації рівнянь поздовжнього руху та виділення з них рівнянь, відображаючих короткоперіодичний рух. Аналітичні розв'язання, що утворюються при цьому, зв'язані з припущеннями, які можуть в окремих випадках призводити до неточного розрахунку.

### Постановка завдання

На прикладі аналізу збуреного руху легкого літака дорівнюється відомий спосіб із запропонованим підходом, заснованим на покроковому моделюванні поздовжнього руху з одночасним визначенням нелінійних аеродинамічних характеристик літака на кожному розрахунковому кроці з урахуванням змінних кінематичних параметрів руху.

### Аналіз рівнянь поздовжнього короткоперіодичного руху

Як відомо, рівняння поздовжнього руху літака при симетричному польоті (без ковзання та крену) можуть бути отримані з загальних рівнянь просторового руху, а потім досліджуватися ізольовано. Ці рівняння запишемо у зв'язаній системі координат [1]:

$$\begin{aligned} m \frac{dV_x}{dt} &= P \cos \varphi_{\text{дв}} - X - G \sin \vartheta; \\ m \left( \frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x \right) &= P \sin \varphi_{\text{дв}} + Y - G \cos \vartheta; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z; \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z; \\ \frac{dH}{dt} &= V \sin(\vartheta - \alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $V_x = V \cos \alpha$ ;  $V_y = -V \sin \alpha$ .

Після переходу до змінних швидкості  $V$  та кута атаки  $\alpha$  за умови, що літак стійкий, збурений рух пов'язаний з обертанням щодо поперечної осі, у більшості літаків згасає за 1,5–2 с. У цьому випадку звичайно є припущення про те, що швидкість та щільність повітря за цей час залишаються незмінними ( $dV/dt = 0$ ,  $d\rho/dt = 0$ ), а політ близький до горизонтального, тоді

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{g}{V} \left[ \frac{P}{G} \sin(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + \frac{q}{G/S} C_y - 1 \right] + \omega_z; \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{q S b_a}{I_z} m_z; \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z; \\ \frac{dH}{dt} &= V \sin(\vartheta - \alpha). \end{aligned} \quad (2)$$

Перші два рівняння описують короткоперіодичний рух, тобто швидку його складову, обумовлену обертанням літака щодо центру мас та зміною кута атаки (перевантаження). Через швидкоплинність процесу згасання збурення при аналізі його перших секунд руху, вважається достатнім розглядати тільки рівняння короткоперіодичного руху.

При  $V = \text{const}$  коефіцієнт  $\frac{P}{G} \sin(\alpha + \varphi_{\text{дв}})$  значно

менше ніж  $\frac{q}{G/S} C_y$ , тому їм можна знехтувати.

Тоді система (2) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{g}{V} \left[ \frac{q}{G/S} (C_y(\alpha) + \Delta C_y(\alpha, \varphi)) - 1 \right] + \omega_z; \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{q S b_a}{I_z} \left[ m_z(\alpha) + m_z^{\omega_z}(\alpha) \frac{b_a}{V} \omega_z + \right. \\ &\quad \left. + m_z^{\dot{\alpha}}(\alpha) \frac{b_a}{V} \dot{\alpha} + \Delta m_z(\alpha, \varphi) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\Delta C_y(\alpha, \varphi)$  та  $\Delta m_z(\alpha, \varphi)$  – збільшення аеродинамічної сили та моменту, через відхилення керуючої поверхні.

Під час дослідження короткоперіодичного руху, коли  $C_y$  та  $m_z$  мають лінійний характер, систему (3) можна лінеаризувати:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{g}{V} \left[ \frac{q}{G/S} (C_y^\alpha \alpha + C_y^\varphi \varphi) \right] + \omega_z; \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{qSb_a}{I_z} \left[ m_z^{C_y} C_y^\alpha \alpha + m_z^{\omega_z}(\alpha) \frac{b_a}{V} \omega_z + \right. \\ &\quad \left. + m_z^{\dot{\alpha}}(\alpha) \frac{b_a}{V} \dot{\alpha} + m_z^\varphi \varphi \right], \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\omega_z$  – збільшення параметрів руху та керування від їхніх значень на опорній траєкторії.

Систему (4) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{g}{V} n_y^\alpha \alpha - \frac{g}{V} n_y^\varphi \varphi + \omega_z; \\ \dot{\omega}_z &= \bar{M}_z^\alpha \alpha + \bar{M}_z^{\omega_z} \omega_z + \bar{M}_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \bar{M}_z^\varphi \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $n_y = \frac{q}{G/S} C_y$ ;  $\bar{M}_z^i = \frac{qSb_a}{I_z} m_z^i$ ;  $i = \alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, \varphi$

Розв'язання системи (5) зводиться до характеристичного рівняння та визначення його коренів [1]:

$$\begin{aligned} p^2 + \underbrace{\left( \frac{g}{V} n_y^\alpha - \bar{M}_z^{\omega_z} - \bar{M}_z^{\dot{\alpha}} \right)}_{2\xi} p - \underbrace{\bar{M}_z^\alpha - \bar{M}_z^{\omega_z} \frac{g}{V} n_y^\alpha}_{\omega_0^2} &= \\ = p^2 + 2\xi p + \omega_0^2 = 0; \lambda_{1,2} &= -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

У випадку комплексно-спряжених коренів перехідний процес має згасаючий коливальний характер з часом згасання та періодом коливань, що дорівнює відповідно:

$$t_{\text{зг}} = \frac{3}{\xi}; T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}}. \quad (7)$$

Тоді перехідний процес на ступеневе відхилення органа керування  $\varphi_0$  за перевантаженням можна описати рівнянням:

$$n_y(t) = n_{y\text{уст}} \left[ 1 - e^{-\xi t} \frac{\cos(\omega t + \chi)}{\cos \chi} \right], \quad (8)$$

де  $n_{y\text{уст}} = \frac{\bar{M}_z^\varphi \left( 1 + \frac{m_z^{C_y}}{L_{\text{ГО}}} \right) \varphi_0 n_y^\alpha}{\omega_0^2}$ ;  $\chi = \arctg \frac{\xi}{\omega}$ ;

$$n_y^\alpha = C_y^\alpha \frac{q}{G/S}; n_y^\varphi = C_y^\varphi \frac{q}{G/S}; m_z^{C_y} \approx \frac{m_z^\alpha}{C_y}$$

Аналогічним способом описується перехідний процес за кутом атаки та кутової швидкості тангажа. З аналізу наведених рівнянь поздовжнього короткоперіодичного руху (1)–(8) випливає, що одержуваний розв'язок правомірний у випадку виконання прийнятих припущень:

$$\begin{aligned} dV/dt &= 0, \\ \frac{P}{G} \sin(\alpha + \varphi_{\text{де}}) &\ll \frac{q}{G/S} C_y, \quad \sin(\vartheta - \alpha) \approx 0. \end{aligned}$$

Значення коефіцієнтів аеродинамічних похідних вищих порядків ( $C_y^\alpha, m_z^\alpha$ ), як правило, через невідомості параметрів перехідного процесу задаються з умови числа Струхала  $Pr^* \rightarrow 0$  або взагалі не враховуються ( $C_y^\alpha$ ).

У той же час із льотного експерименту [2] впливає, що під час швидких коливань літака в поздовжньому русі спостерігається істотна нелінійність залежно від  $C_y = f(\dot{\alpha} - \omega_z)$  та наявності гістерезису в протіканні аеродинамічних характеристик.

#### Математична модель динаміки руху при нелінійній зміні аеродинамічних характеристик

У разі розрахунку просторового руху ЛА розглядається як абсолютно тверде тіло. У цьому випадку рівняння динаміки руху мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned} m \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\Omega} \vec{V} \right) &= \vec{R}_{\text{аер}} + \vec{G}(\vartheta, \psi, \gamma) + \vec{P}_T; \\ \frac{d(J\vec{\Omega})}{dt} + \vec{\Omega} J \vec{\Omega} &= \vec{M}_{\text{аер}} + \vec{M}_T + \vec{M}_r. \end{aligned} \quad (9)$$

Крім того, використовують рівняння кінематичного зв'язку:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \operatorname{tg} \vartheta; \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma}{\cos \vartheta}; \\ \frac{dx_0}{dt} &= V \cos \Theta \cos \varphi; \\ \frac{dy_0}{dt} &= V \sin \Theta; \quad \frac{dz_0}{dt} = -V \cos \Theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Для розв'язання системи рівнянь (9) необхідно в кожний момент часу знати величини, що входять до правих частин: аеродинамічну силу  $\vec{R}_{\text{аер}}(t)$ , тягу двигунів  $\vec{P}_T(t)$ , гравітаційну силу  $\vec{G}$ , момент від аеродинамічних сил  $\vec{M}_{\text{аер}}(t)$ , момент



Кожна вихрова рамка, ребрами якої є прямолінійні відрізки, індукує в просторі поле швидкостей відповідно до закону Біо-Савара для кожного із цих відрізків. Ця швидкість у випадку чотирикутної рамки з радіусами-векторами вершин  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_4$  для точки простору  $\vec{r}$  визначається за формулою [3]

$$\vec{w}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{(\vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k)(\vec{r}_k - \vec{r})}{(\vec{r}_k - \vec{r})^2 (\vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k)^2 - [(\vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k)(\vec{r}_k - \vec{r})]^2} \times \left( \frac{(\vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k)(\vec{r}_{k+1} - \vec{r})}{|\vec{r}_{k+1} - \vec{r}|} - \frac{(\vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k)(\vec{r}_k - \vec{r})}{|\vec{r}_k - \vec{r}|} \right)$$

Коротко зупинимось на способі задоволення граничні умови.

Рівняння Лапласа (11) для потенціалу  $\phi$ , визначеного рівнянням (14) виконано автоматично, оскільки гармонійним є потенціал від кожної окремої рамки. Також виконана й умова убування збурень на нескінченності (13).

Кінематичну умову сумісності течії виконано, оскільки при переході через вихровий шар терпить розрив лише дотичний компонент швидкості. А динамічна умова (безперервність тиску на  $\sigma$ ), як звичайно в методі дискретних вихорів, задовольняє алгоритмічно те, що кожна точка пелени рухається з місцевою швидкістю течії. Це є наслідком теореми Жуковського "у малому" [3].

Умова Чаплигіна-Жуковського на лініях сходу пелени служить для визначення циркуляції комірок, що сходять у потік на кожному часовому кроку розрахунку.

З формули (17) випливає, що для знаходження поля швидкостей необхідно знати циркуляції вихрових комірок як на поверхні  $S$ , так та на  $\sigma$ . Для визначення цих циркуляцій на підставі умови (12) про рівність нулю нормальної швидкості до поверхні  $S$  у точках колокації прийдемо до системи лінійних алгебричних рівнянь щодо циркуляцій  $\Gamma_S$ , яку у матричній формі у загальному випадку запишемо у вигляді:

$$W_S \Gamma_S = f_S - W_S^\sigma \Gamma_\sigma,$$

де  $W_S$  – матриця скосів від вихрових рамок, розташованих на  $S$  у точках колокації;  $W_S^\sigma$  – матриця скосів від вихрових рамок пелени в точках колокації поверхні  $S$ ;  $\Gamma_\sigma$  – величина циркуляції вихрових рамок пелени.

Вплив швидкості незбуреного потоку, що набігає та кутової швидкості обертання ЛА запишемо у вигляді

$$f_{Si} = -\bar{U}_0 \bar{n}(\vec{r}_i) + \bar{\Omega} \vec{r}_i \bar{n}(\vec{r}_i),$$

де  $\bar{\Omega}$  – кутова швидкість обертання ЛА;  $\vec{r}_i$  – радіус-вектор точок поверхні  $S$ .

Отже, математичну модель динаміки просторового руху досліджуваного ЛА та розвиток його вихрового сліду описують системою рівнянь (9), (10), (15), (16), (17). З аналізу цих рівнянь видно складний взаємозв'язок вхідних у них параметрів. Так, рух ЛА залежить від діючого на нього аеродинамічного навантаження. Розвиток вихрового сліду, у свою чергу, залежить від руху ЛА, а на аеродинамічне навантаження впливає рух ЛА та розвиток вихрового сліду.

У числовій реалізації спільне розв'язання задачі аеродинаміки та динаміки руху здійснюється поперемінним розв'язком рівнянь динаміки руху та нелінійної нестационарної аеродинаміки крок за кроком за часом.

### Порівняльний аналіз

Як об'єкт дослідження розглядався літак, аеродинамічні характеристики якого у випадку горизонтального усталеного польоту наведено в роботі [6] із такими інерційно-масовими та геометричними характеристиками:

$$m=520 \text{ кг}, I_x=585 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, b_{\text{САХ}}=1,1 \text{ м}, S_{\text{кр}}=10,5 \text{ м}^2.$$

Порівняння двох розглянутих підходів здійснювалося на прикладі розрахунку збуреного руху літака при ступеневому відхиленні руля висоти на  $\delta_{p.v} = -5$  град. Аеродинамічні похідні ЛА, необхідні для розв'язання характеристичного рівняння короткоперіодичного руху (6), були розраховані за теорією стаціонарності та гармонійності [7] і для розглянутого літака мають величини:

$$C_y^\alpha = 5,9; m_z^\alpha = -1,2; m_z^\alpha = -1,5;$$

$$m_z^{\omega z} = -5,6; C_y^{\delta p.v} = 0,7; m_z^{\delta p.v} = -2.$$

Для розрахунку аеродинамічних характеристик із використанням нелінійної нестационарної теорії необхідно схематизувати геометричну поверхню ЛА. На рис. 2 показано розрахункову вихрову схему літака, яка складається з тілесного фюзеляжу, апроксимованого 350 вихровими рамками, та тонких несучих поверхонь – крила, змодельованого 274 вихровими рамками, та горизонтального оперення (з рулем висоти, що відхиляється), схематизованого 64 вихровими рамками.

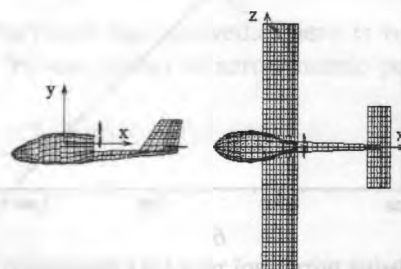


Рис. 2. Розрахункова вихрова схема

Отже, при виводі рівнянь короткоперіодичного руху був прийнятий ряд припущень (постулатів). У запропонованому підході до розв'язання задачі динаміки просторового руху з безпосереднім розрахунком аеродинамічних характеристик можна змоделювати прийняті припущення та тим самим досліджувати їхній вплив на параметри руху. З цією метою проводилися розрахунки для трьох варіантів законів зміни тяги силової установки:

$$P = \text{const}; P = X_A = C_{Xa} \frac{\rho V^2}{2} S / \cos \alpha;$$

$$P = P_3 = C_{Xa} \frac{\rho V^2}{2} S / \cos \alpha + mg \sin \Theta / \cos \alpha.$$

Перший закон відповідає умові невтручання в керування силовою установкою пілотом та завдання величини тяги, потрібної для горизонтального збалансованого польоту перед відхиленням руля висоти.

Другий закон забезпечує завдання розміру тяги, що компенсує опір літака, у процесі його просторового неусталеного руху, у швидкісній системі координат, але без урахування кутів Ейлера, тобто без проекції ваги літака на швидкісну систему координат.

Третій закон виконує умова  $V = \text{const}$  та тим самим забезпечує адекватність порівняння одержуваних результатів із розв'язанням рівнянь короткоперіодичного руху.

У результаті розрахунків за розглянутими методиками були отримані залежності зміни основних параметрів збуреного руху за часом (рис. 3, 4).

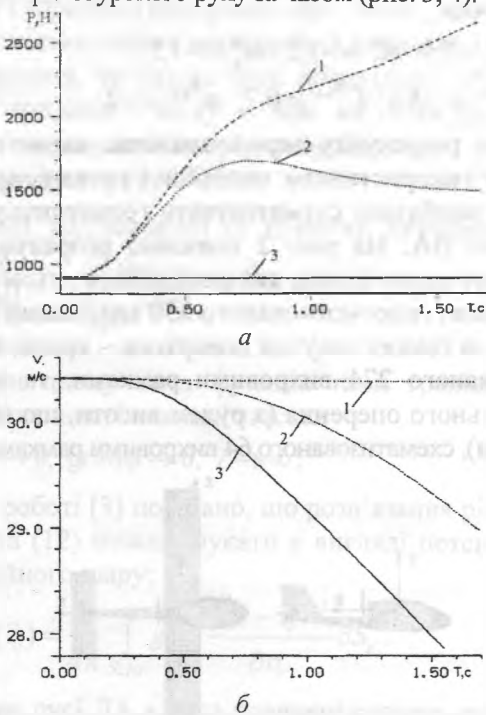


Рис. 3. Зміна потрібної тяги (а) і швидкості (б): 1 -  $P_{ДВ} = X_3$ ; 2 -  $P_{ДВ} = X_a$ ; 3 -  $P_{ДВ} = X_3$

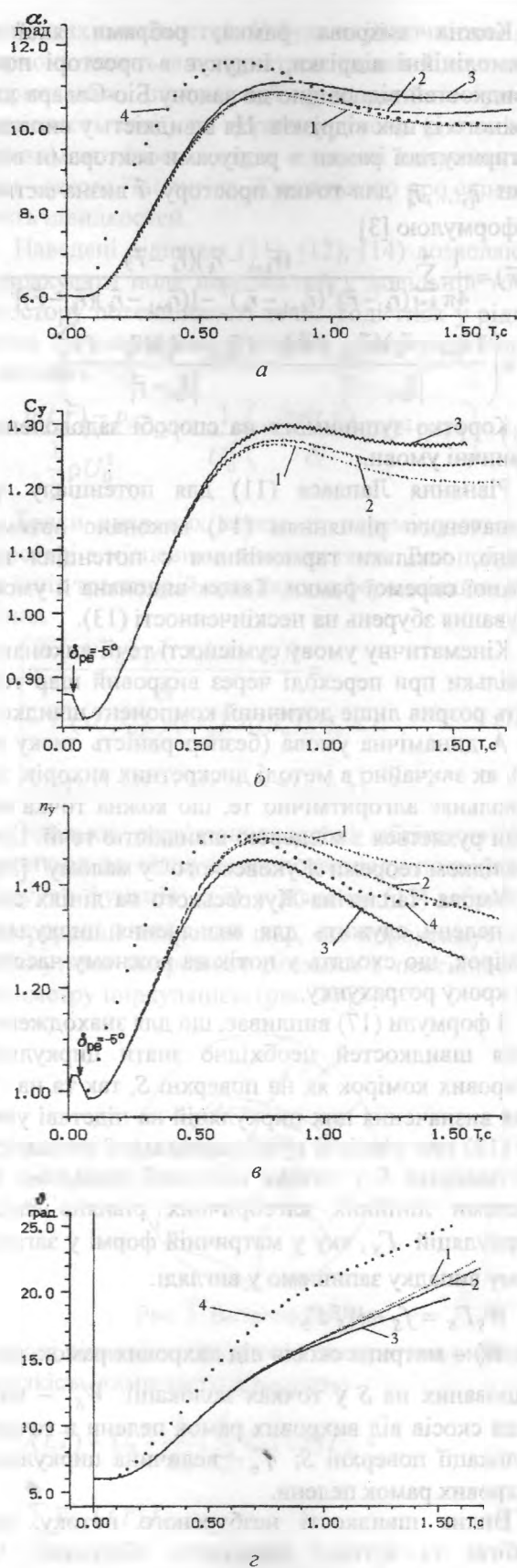


Рис. 4. Зміна кута атаки (а), коефіцієнта піднімальної сили (б), нормального перевантаження (в), кута нахилу тангажа (г) при перехідному процесі: 1 -  $P_{ДВ} = X_3$ ; 2 -  $P_{ДВ} = X_a$ ; 3 -  $P_{ДВ} = \text{const}$ ; 4 - теорія



З аналізу наведених залежностей випливає, що параметри руху, отримані при розрахунку з використанням рівнянь поздовжнього короткоперіодичного руху, відмінні від отриманих за запропонованим підходом до розрахунку збуреного руху навіть при виконанні умови  $V=\text{const}$ .

Цей факт свідчить про доцільність розв'язання даного класу задач саме покроковим моделюванням, у процесі якого враховується нелінійність зміни параметрів, що впливають на рух ЛА.

При дослідженні поздовжнього збуреного руху літака, що має малі інерційні характеристики та, як наслідок, інтенсивний обертальний рух навколо центру мас, необхідно застосувати метод, який враховує нелінійну зміну швидкості польоту. Це пояснюється тим, що швидка зміна кутів атаки та нахилу траєкторії призводить до інтенсивного росту індуктивного опору та збільшенню проекції сили тяжіння на поздовжню вісь літака, що веде до значної зміни, як швидкості польоту, так й кута атаки та перевантаження.

#### Висновки

Запропонований підхід поширений на довільний просторовий неусталений рух та, як окремий випадок, може бути застосований для розрахунку характеристик бічного збуреного руху.

Крім того, розроблений програмний продукт дозволяє моделювати роботу рушія у вигляді повітряного гвинта або реактивного струменя з урахуванням його інтерференції з несучими поверхнями в процесі збуреного руху. Тим самим є можливість проведення числового

експерименту по дослідженню впливу рушія на динаміку руху ЛА в цілому.

Автори дякують проф. Є.П. Ударцеву за співробітництво у вирішенні задачі.

#### Список літератури

1. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Аэродинамика самолёта. Динамика продольного и бокового движения. – М.: Машиностроение, 1979. – 352 с.
2. Касьянов В.А., Ударцев Е.П. Определение характеристик воздушных судов методами идентификации. – М.: Машиностроение, 1988. – 170 с.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 253 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
5. Апаринов В.А., Дворак А.В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками // Тр. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. – 1986. Вып. 1313. – С. 424–432.
6. Удовенко В.А. Аэродинамическое проектирование летательного аппарата с использованием математического моделирования // Вопр. проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. – Харьков: Гос. аэрокосмический ун-т им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". 2001. – Вып. 26 (3). – С. 63–70.
7. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. – М.: Наука, 1975. – 424 с.

Стаття надійшла до редакції 03.02.03.

А.Н. Балакирев, В.А. Удовенко, О.В. Швец

Численное моделирование динамики возмущённого движения самолёта при нелинейном изменении аэродинамических характеристик

Рассмотрен пример расчёта возмущённого продольного движения лёгкого самолёта. Показана целесообразность моделирования продольного движения на основе решения полной системы уравнений при нелинейном изменении аэродинамических характеристик в сравнении с традиционным подходом – решением уравнений короткопериодического движения.

A.N. Balakirev, V.A. Udoenko, O.V. Shvets

Numerical modeling of dynamic indignation plane flight by un linear modification of aerodynamics characteristics

Calculation of indignation longitudinal motion of the light plane had showed. There is reason to use nonlinear modification aerodynamic performances instead off linear model of aerodynamic performances. The graphic results are presented.