СУЧАСНІ АВІАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.63:629.735.015(045)

в 192, 12

В.М. Синєглазов, д-р техн. наук
Ю.М. Кеменяш

РОЗРАХУНОК ВЛАСНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В НЕПОВНІСТЮ ЗАПОВНЕНИХ БАКАХ (ПОВЗДОВЖНІ КОЛИВАННЯ)

Національний авіаційний університет, cvm@nau.edu.ua

Розглянуто метод розв'язання задач про коливання рідини з використанням гармонічних функцій. Як базовий використано метод принцип Гамільтона–Остроградського. Розрахунок адаптовано до баків конкретної форми.

Вступ

Математичні моделі жорсткого літака описуються системою диференціальних рівнянь у частинних похідних, що ускладнює синтез відповідних законів керування передусім при особливих режимах польоту, наприклад, у процесі гасіння пожежі. Додатковими трудношами при цьому є необхідність урахування коливання рідини (розчину для гасіння пожежі) у баках, форма і конструкція яких може змінюватись. Основним засобом створення регуляторів мінімальної складності є спрощення математичної моделі за рахунок застосування методу зважених відхилів, зокрема, методу Галеркіна з використанням якості пробні функції власних форми коливань (власних форм жорстких коливань конструкції та рідини в неповністю заповнених баках).

Власні форми жорстких коливань конструкції встановлюються у результаті частотних випробувань повітряного судна, тому числовий розрахунок власних форм коливань рідини (розчину для гасіння пожежі) в неповністю заповнених баках є важливим.

Відомі числові методи розрахунку власних форм коливань рідини мають такі недоліки [1]:

– неточність обчислень;
– не розглядались рівні заповнення баків;
– розв'язок функцій має нерівномірну збіжність.

Отже, необхідна розробка нових числових схем для розрахунку власних форм коливань, що забезпечить створення пасивних (розміщення необхідних у баці перекладинок) і активних (синтез оптимальних регуляторів для спрощення моделі) технічних засобів. Це дозволить гасити жорсткі коливання і підвищити безпеку польотів.

Постановка задачі

Розрахунок збуреного руху системи тіло-рідина зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь, які описують рух тіла в повздовжніх та поперечних площинах [1]. Рівняння збуреного руху твердого тіла з ємностями, частково заповненими рідиною наведено в роботі [2].

Знаходження власних форм коливань рідини шукаємо у вигляді системи гармонічних функцій:

$$\Phi(r,z,\theta)=e^{kz}J_m(kr)_{\cos}^{\sin}m\theta$$

або для k-комплексного:

$$\Phi(r,z,\theta)=_{\cos}^{\sin}kzI_m(kr)_{\cos}^{\sin}m\theta\,, \qquad (1)$$

де r,z,θ – циліндричні координати; J_m – проста функція Бесселя; I_m – модифікована функція Бесселя.

Система функцій (1) повинна задовольняти початкові і граничні умови:

$$\nabla^2\Phi(r,z,\theta)=0\,;$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0\,;$$

$$\nabla\varphi=0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\,;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0\,,$$

де ∇ – оператор Лапласа.

Перша множина не відповідає умові, оскільки $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$. На кожній парі бічних поверхонь тільки одна поверхня може дорівнювати нулю.

Друга система функцій (циліндричні гармоніки) повинна бути доповнена сукупністю вироджених розв'язків [3]:

$$\Phi_{\text{ом}}(r,z,\theta)=(a+bz)\left(Ar^m+\frac{B}{r^m}\right)_{\cos}^{\sin}m\theta\,;$$

$$\Phi_{\text{оо}}(r,z,\theta)=(a+bz)(A+B\ln r)(a_1+b_1\theta)\,.$$

Полюсні особливості випускаємо, оскільки при $r=0$ сингулярності механічної задачі немає. Член bz також випускаємо, оскільки він відповідає потоку зі сталою швидкістю по осі z. Аналогічно член $b_1\theta$ також відповідає якомусь потоку обертання. У результаті залишається множина $\left(r^m\right)_{\cos}^{\sin} m\theta$, яка визначає поперечну форму.

Другу множину отримуємо при $m=0$, тобто ${}_{\cos}^{\sin} kzI_0(kr)$. Це – повздовжня форма. Для цієї форми $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$, тобто руху в площині $m=\text{const}$ немає. Отже, форма повздовжня.

Розв'язок

Для розв'язування задачі розрахунку власних форм повздовжніх коливань слід звернути особливу увагу на множину повздовжніх функцій.

Розглянемо множину повздовжніх функцій:

$$\psi_{\text{пов}}(z,\theta)=\psi_k(z)_{\cos}^{\sin} m\theta kzI_0(kr). \quad (2)$$

Необхідно, щоб множина (2) влаштовувала граничним умовам $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$, тобто умова непротікання на внутршній вертикальній перекладинці:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\pm a}=\frac{\partial}{\partial z}\left[I_0(kr)_{\cos}^{\sin} kz\right]_{z=\pm a}=$$

$$=kI_0(kr)_{-\sin}^{\cos} kz\big|_{z=\pm a}=0.$$

Виберемо $k=\frac{\pi k}{2a}$. Тоді $\cos\frac{\pi ka}{2a}$ для k-непарних підходить $\sin\frac{\pi ka}{2a}$, для k-парних – $\cos\frac{\pi kx}{2a}$ (k – довільна константа, яку можна визначити краєвими умовами). У результаті отримаємо функції $\sin\frac{\pi x}{2a}$, $\cos\frac{\pi x}{a}$, $\sin\frac{3\pi x}{2a}$, $\cos\frac{2\pi x}{a}$, які звернемо у форму:

$$\sin\left[\frac{\pi kx}{2a}-\frac{\pi a}{2a}(k-1)\right]=\sin\frac{\pi kx}{2a} \text{ при } k=1,$$

$$\sin\left[\frac{\pi 2x}{2a}-\frac{\pi}{2}\right]=\cos\frac{\pi x}{a} \text{ при } k=2,$$

$$\sin\left(\frac{\pi 3x}{2a}-\frac{\pi}{2}2\right)=-\sin\frac{3x}{2a} \text{ при } k=3,$$

$$\sin\left(\frac{\pi 4x}{2a}-\frac{\pi}{2}3\right)=-\cos 2\pi x \text{ при } k=4,$$

яку можна зобразити у вигляді:

$$\sin\left[\frac{\pi kx}{2a}-\frac{\pi}{2}(k-1)\right].$$

Перетворимо аргумент:

$$\left[\frac{\pi kx}{2a}-\frac{\pi a}{2a}(k-1)\right]=\frac{\pi kx-\pi ax-\pi a}{2a}=$$

$$=\frac{\pi k(x-a)}{2a}+\frac{\pi}{2}.$$

У результаті маємо:

$$\sin\left[\frac{\pi k(x-a)}{2a}+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\frac{\pi k(x-a)}{2a}. \quad (3)$$

Перевіримо виконання граничної умови:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\cos\frac{\pi k(x-a)}{2a}\right]=-\frac{\pi k}{2a}\sin\left[\frac{\pi k(x-a)}{2a}\right].$$

За умови, що $x=a$ та $x=-a$, вираз (3) прямує до нуля:

$$\sin\left[\frac{\pi k(-a-a)}{2a}\right]=\sin(-\pi k)=0.$$

Отже, другу множину зручно уявити у вигляді:

$$I_0\left(\frac{\pi k}{2a}r\right)\cos\frac{\pi k}{2a}(z-a), \quad k=1,2,...$$

У результаті маємо множину функцій для повздовжніх коливань:

$$\psi_k=I_0\left(\frac{\pi k}{2a}r\right)\cos\frac{\pi k}{2a}(z-a).$$

Перейдемо до обчислення елементів матриць a_{ij} і b_{ij}:

$$a_{ij}=\int_\tau \nabla\psi_i\nabla\psi_j d\tau;$$

$$b_{ij}=\int_\tau \psi_i\psi_j ds. \quad (4)$$

Для обчислення інтегралів (4) необхідно записати рівняння бічної поверхні бака як функцію r від θ, тобто $r=r(\theta)$. Функція повинна бути неперервна при $\theta=0$, $\theta=\pi$ (рис. 1) [4].

Обчислення інтегралів наведено в роботі [2]. У результаті маємо:

$$r^*=r(\theta)=$$

$$=\sqrt{R^2-(R-h)^2\sin^2\theta}-(R-h)\cos\theta. \quad (5)$$

Форма розв'язання (5) загальна для обох випадків заповнення (рис. 2, де *1*, *2* – рівні заповнення).

Отже,

$$\int_\tau \nabla\psi_i\nabla\psi_j d\tau=\int_a^a\int_0^{\pi/2}\int_0^{r^*}\nabla\psi_i\nabla\psi_j rdrd\theta dz.$$

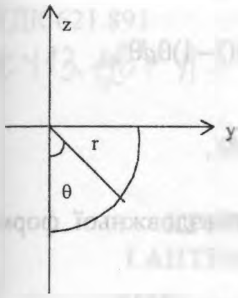

Рис. 1

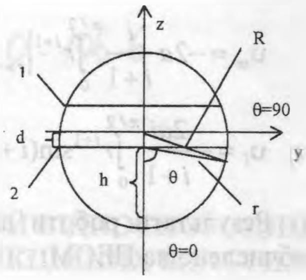

Рис. 2

Знайдемо a_{ij} і b_{ij} для множини координатних функцій:

$$\psi_i = I_0\left(\frac{\pi k}{2a}r\right)\cos\frac{\pi k}{2a}(z-a).$$

Визначимо $\nabla\psi_i\nabla\psi_j$:

$$\nabla\psi_i = \left\{\frac{dI_0}{dr}\frac{\pi i}{2a}\cos\frac{\pi i}{2a}(z-a);\quad 0;\quad -I_0\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)\frac{\pi r}{2a}\sin\frac{\pi r}{2a}(z-a)\right\};$$

$$\nabla\psi_i\nabla\psi_j = \frac{\pi i}{2a}\frac{\pi j}{2a}I_1\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)I_1\left(\frac{\pi j r}{2a}\right)\cos\frac{\pi i}{2a} * (z-a)\cos\frac{\pi j}{2a}(z-a) + \frac{\pi i}{2a}\frac{\pi j}{2a}I_0\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)I_0\left(\frac{\pi j r}{2a}\right) * \sin\frac{\pi i}{2a}(z-a)\sin\frac{\pi j}{2a}(z-a);$$

$$\int_\tau \nabla\psi_i\nabla\psi_j d\tau = \int_a^a\int_0^{\pi/2}\int_0^{r^*}\nabla\psi_i\nabla\psi_j r dr d\theta dz;$$

$$\int_a^a\int_0^{\pi/2}\int_0^{r^*}\left\{\frac{\pi i}{2a}\frac{\pi j}{2a}I_1\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)I_1\left(\frac{\pi j r}{2a}\right)\cos\frac{\pi i}{2a}(z-a) * \cos\frac{\pi j}{2a}(z-a) + \frac{\pi i}{2a}\frac{\pi j}{2a}I_o\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)I_0\left(\frac{\pi j r}{2a}\right) * \sin\frac{\pi i}{2a}(z-a)\sin\frac{\pi j}{2a}(z-a)\right\}dzrdrd\,\theta;$$

$$\int_{-a}^a \cos\frac{\pi i}{2a}(z-a)\cos\frac{\pi j}{2a}(z-a)dz = \frac{1}{2} * \int_{-a}^a\left[\cos\frac{\pi(i-j)}{2a}(z-a) + \cos\frac{\pi(i+j)}{2a} * (z-a)\right]dz = 0$$ для ij.

Для $i = j \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-a}^a 1dz = 0$.

Аналогічно вираз може бути отримано для синусів:

$$a_{ij} = \delta_{ij}\int_0^{\pi/2}\int_0^{r^*}\left(\frac{\pi i}{2a}\right)^2\left[I_1^2\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)^2 + I_0\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)^2\right] r dr d\theta =$$

$$= \delta_{ij}\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)^2 a\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{r^2}{2}\left[I_1^2 - I_0^2\right] + \frac{r}{a}I_1 I_0 + \frac{r^2}{2}\left[I_0^2 - I_1^2\right]\right\}d\theta,$$

де δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases}0, \text{якщо } i \neq j;\\ 1, \text{якщо } i = j.\end{cases}$$

У результаті маємо:

$$a_{ij} = \delta_{ij}\left(\frac{\pi i}{2a}\right)^2\int_0^{\pi/2} r^* I_0\left(\frac{\pi i r^*}{2a}\right)^2 I_1\left(\frac{\pi i r^*}{2a}\right)^2 d\theta,$$

де

$$r^* = \sqrt{R^2 - (R-h)^2\sin^2\theta} - (R-h)\cos\theta.$$

Для розрахунку коефіцієнта b_{ij} визначимо статичне зміщення α_i:

$$\psi_i = I_0\left(\frac{\pi k}{2a}r\right)\cos\frac{\pi k}{2a}(z-a);$$

$$\int_s \psi_i ds = \alpha_i \int_s ds;$$

$$\int_{-a}^a dz\int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} I_0\left(\frac{\pi k}{2a}r\right)\cos\frac{\pi k}{2a}(z-a)\,drdz = \alpha_i\int_{-a}^a dz\int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} drdz;$$

$$\int_{-a}^a \cos\frac{\pi i}{2a}(z-a)dz = \frac{2a}{\pi i}\sin\frac{\pi i}{2a}(z-a)\Big|_{-a}^{a} = 0 + \frac{2a}{\pi i}\sin\frac{\pi i}{2a}2a = 0.$$

Отже, для повздовжніх коливань $\alpha_i = 0$. Тоді:

$$b_{ij} = \int_{-a}^a dz\int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} I_0\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)\cos\frac{\pi i}{2a}(z-a)I_0\left(\frac{\pi j r}{2a}\right) * \cos\frac{\pi j}{2a}(z-a)drdz = \left|\int_{-a}^a \cos\frac{\pi i}{2a}(z-a)\cos\frac{\pi j}{2a} * (z-a)dz = \delta_{ij}\right| = \delta_{ij}\int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} I_0\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)dr.$$

Отже,

$$b_{ij} = \delta_{ij}\int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} I_0\left(\frac{\pi i r}{2a}\right)dr.$$

Зведення матриць a_{ij} і b_{ij} до діагональної форми свідчить про дуже вдалий вибір координатних функцій, оскільки фактично ψ_i це вже розв'язок задачі.

Задачу визначення потенціалу Стокса-Жуковського наведено в роботі [2]. Повздовжні коливання збурюються обертанням навколо осі.

Маємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\upsilon} = \pm r; \quad z = \pm a;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\upsilon} = -z\upsilon_r \text{ на } S_{\text{біч}};$$

$$d_i = \int_{S_{тор}} I_0\left(\frac{\pi ir}{2a}\right)\cos\frac{\pi i(z-a)}{2a}\Big|_{z=a} r ds - \int_{S_{тор}} I_0\left(\frac{\pi ir}{2a}\right)\cos\frac{\pi i(z-a)}{2a}\Big|_{z=a} r ds + \int_{S_{біч}} z\upsilon_r I_0\left(\frac{\pi ir}{2a}\right)\cos\frac{\pi i}{2a}(z-a)ds =$$

$$= [1-(-1)^i]\int_0^{\pi/2}\int_0^{r^*} I_0\left(\frac{\pi ir}{2a}\right)^2 r^2 dr d\theta - \left(\frac{2a}{\pi i}\right)^2 * \int_0^{\pi/2}\frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\pi ir}{2a}\right) r d\theta;$$

де $S_{біч}$ – площа бічної поверхні; d_i – коефіцієнт рівняння руху; $S_{\text{тор}}$– площа торцевої поверхні.

Отже, ненульові тільки непарні.

Приєднані маси рідини мають вигляд:

$$\lambda_n = \sum_{m=1}^{k} a_m\upsilon_m;$$

$$\lambda_{om} = \sum_{m=1}^{k}\sum_{p=1}^{k} a_m b_p \upsilon_{mp};$$

$$\mu_n = (Aa, a) = \omega_n^2(Ba, a);$$

$$J = (d, b),$$

де a – власні вектори; B – розв'язок неоднорідної алгебричної задачі; A – права частина цієї задачі.

Допоміжні коефіцієнти розраховуються як у роботі [2]. У результаті маємо для повздовжніх коливань:

$$\upsilon_m = \int_\tau \frac{d\psi}{dx} d\tau;$$

$$\upsilon_m = -2a\frac{i}{i+1}\int_0^{\pi/2} r^{i+1}\Big|_{r=r^*}\sin(i-1)\theta d\theta;$$

$$\upsilon_i = -\frac{2ai}{i+1}\int_0^{\pi/2} r^{i+1}\sin(i+1)\theta d\theta.$$

Результати роботи для повздовжньої форми обчислено на ПЕОМ:

$V = 5{,}3946$; $\sigma_n^2 = 0{,}9696$; $\mu = 1{,}8618$;

$\lambda_0 = 2{,}3317$; $J = 46{,}2638$; $\lambda_n = -1{,}2698$.

Висновки

Обґрунтованість необхідності підвищення точності розрахунку власних форм коливань рідини в неповністю заповнених баках є важливим для створення систем керування, систем демпфірування. Існуючі методи мають загальний характер і не дають іженерних підходів для створення розрахункових схем.

Запропонований метод дає можливість провести відповідні числові розрахунки баків конкретної форми, що робить його корисним при використанні фахівцями систем оптимального керування.

Список літератури

1. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.

2. *Синєглазов В.М., Кеменяш Ю.М.* Розрахунок власних форм коливань рідини в неповністю заповнених баках (поперечні коливання) // Вісн. НАУ. – 2001. – №4. – С. 78–82.

3. *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательного апарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.

4. *Лимарченко О.С.* Прямой метод решения нелинейных задач динамики резервуара, несущего жидкость // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – Вып. II. – С. 999–1002.

Стаття надійшла до редакції 02.04.03.

В.М. Синеглазов, Ю.М. Кеменяш

Расчет собственных форм колебаний жидкости в неполностью заполненных баках (продольные колебания)

Предложен метод решения задач о колебании жидкости с использованием гармонических функций. В качестве базового метода использован принцип Гамильтона–Остроградского. Расчет адаптирован к бакам конкретной формы.

V.M. Sineglazov, U.M. Kemenyash

Calculation of proper bonus of liquid oseilation in not totally filled tanks (longitudiwal oscilation)

Considered is the method of solution of problems of liqued oscielation by appllying the systems of garmonical functions. Me Hamilton–Ostrogradsky principale was used as the basic one. Calculation is adapted to concrete forms of tanks.