

УДК 537.874.6 (045)

8 P41.0-019 + 0571.5-554.1

Л.Я. Ільницький, д-р техн. наук
Ю.В. Пена

ДИФРАКЦІЯ РАДІОХВИЛЬ НА ЦИЛІНДРІ МАЛОГО РАДІУСА

Національний авіаційний університет, pen@nau.edu.ua

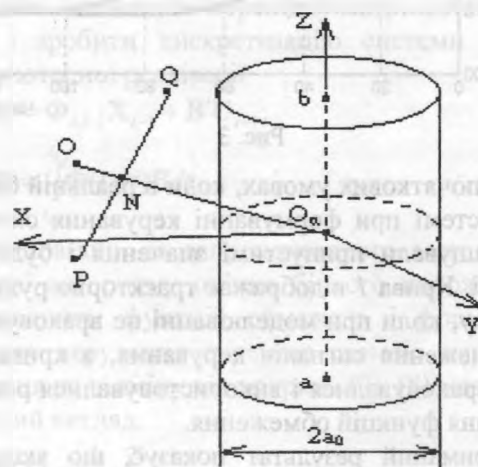
Розглянуто падіння радіохвилі на циліндричні поверхні малого радіуса. Знайдено складові поля дифракції для вертикальної і горизонтальної поляризації за відомим опромінюванням циліндра.

У зоні аеродрому є об'єкти, які можна апроксимувати геометрично правильними циліндрами (літаки). У тих випадках, коли наземні глісадні та курсові радіомаяки працюють у діапазонах метрових хвиль (MLS), такі циліндри можна вважати циліндрами малого радіуса, тобто такими, у яких радіус менший ніж 10λ (λ – довжина хвилі).

Оскільки розглядаються циліндри малого радіуса, то значення відбитої хвилі можна знайти використовуючи принцип Гюйгенса – Кірхгофа [1]. У роботі [2] розглянуто падіння радіохвилі на циліндр малого радіуса і знайдено прості розв'язки для поля дифракції в дальній зоні. Але в ближній зоні ці формули дають неправильні результати і мають великі похибки. Методи, якими вирішуються такі задачі, основані на розв'язанні інтегродиференціальних рівнянь, за якими знаходяться наведені струми, а потім за відомими струмами – поле дифракції [3]. Такі розв'язки одержані, наприклад, Вайнштейном. В інших роботах [4] є спроби знайти поле дифракції від сітки з тонких провідників або циліндрів, але в таких розв'язках не враховуються краєві хвилі на краях циліндрів, що призводить до похибок. В усіх цих роботах розглянуто падіння радіохвилі на циліндри так, що вектор напруженості електричного поля паралельний або перпендикулярний поздовжній вісі циліндра.

Отже, перший етап аналізу інтенсивності поля відбитих хвиль полягає в розрахунку амплітудно-фазового розподілу напруженості полів на поверхні циліндра.

Виберемо прямокутну систему координат так, щоб початок координат O збігся з фазовим центром випромінювача. Розглянемо циліндричний об'єкт, радіус якого задовольняє нерівності $\frac{a_0}{\lambda} < 10$. У цьому випадку дифракційні хвилі на кінцях циліндра грають помітну роль, яка зростає при зменшенні $\frac{a_0}{\lambda}$. Нехай антена знаходиться на певній відстані від циліндра (точка O на рисунку).



Геометрія задачі

Будемо вважати, що на циліндр падає локально плоска хвиля, фронт якої PQ перпендикулярний прямій OO_0 . Оскільки довжина OO_0 дорівнює r_0 , то напруженість поля в площині фронту хвилі, яка проходить через початок координат O_0 циліндричної системи, визначають як

$$\vec{E} = \vec{e}_0 \frac{A_0}{r_0} F(\theta_0, \varphi_0) = e_0 \vec{E}_0, \quad (1)$$

де \vec{e}_0 – поляризаційний вектор; r_0 , θ_0 , φ_0 – координати точки O_0 в циліндричній системі координат; $F(\theta_0, \varphi_0)$ – характеристика спрямованості антени.

Нехай хвиля в основній системі координат поляризована вертикально. Отже, паралельна вісі циліндра складова вектора напруженості електричного поля буде дорівнювати

$$E_{\parallel} = E_0 (\vec{e}_0, \vec{z}_0) = E_0 \cos \delta^E, \quad (2)$$

де \vec{z}_0 – одиничний вектор; δ^E – кут між віссю $O_0 Z$ та вектором \vec{E}_0 .

Аналогічно можна записати

$$H_{\parallel} = H_0 \cos \delta^H;$$

$$\cos \delta^H = (\vec{h}_0, \vec{z}_0),$$

де δ^H – кут між вектором напруженості магнітного поля падаючої хвилі та віссю циліндра $O_{\Pi}Z$; \vec{h}_0 – поляризаційний вектор.

Електромагнітну хвилю, вектор напруженості електричного поля якої паралельний вісі циліндра, будемо називати E -хвилею, а хвилю, вектор напруженості магнітного поля якої паралельний вісі циліндра, – H -хвилею.

Для того, щоб користуватися одною прямокутною системою координат, а саме, власною системою циліндра, яку далі будемо позначати XYZ із початком у точці O_{Π} (див. рисунок) і яка простими співвідношеннями пов'язана з циліндричною системою координат. Виразимо напруженість поля падаючої хвилі (1) у новій системі координат. Зрозуміло, що в системі координат $XYZO_{\Pi}$ вираз (1) запишемо так:

$$\vec{E} = \vec{e}_0 E_0 e^{ikr}, \quad (3)$$

де відстань r рахується від точки O_{Π} у бік початку координат основної системи $XYZO$ по нормалі до фронту хвилі PQ . Оскільки пряма OO_{Π} і нормаль до фронту хвилі r розташовані в площині $XO_{\Pi}Z$, то відстань r може визначатися через дві координати x та z :

$$r = x \sin \vartheta + z \cos \vartheta, \quad (4)$$

де x , z – координати точки N на фронті хвилі; ϑ – кут між нормаллю r до фронту хвилі та віссю $O_{\Pi}Z$.

Підставивши вираз (4) в рівняння (3), одержимо

$$\vec{E} = \vec{e}_0 E_0 e^{ik(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}. \quad (5)$$

Формулу (5) перепишемо у вигляді

$$\vec{E} = \vec{e}_0 E_0 e^{ikz \cos \vartheta} e^{ikx \sin \vartheta}.$$

Оскільки в циліндричній системі координат $z = z$ і $x = \rho \cos \psi$, то

$$\vec{E} = \vec{e}_0 E_0 e^{ikz \cos \vartheta} e^{ik\rho \sin \vartheta \cos \psi}. \quad (6)$$

Отже, за допомогою формули (6) можна знайти фазу вектора напруженості падаючої хвилі в будь-якій точці простору. При цьому для хвилі з плоским фронтом фаза змінюється за лінійним законом від аргументу x вздовж нормалі до осі циліндра і не залежить від координат ρ та ψ . Фазовий розподіл вздовж осі z антисиметричний із нульовою фазою в точці O_{Π} .

Використавши рівняння (2) та (6), напруженість електричного поля падаючої хвилі запишемо як

$$E_z^{\Pi} = E_{\parallel} e^{ikz \cos \vartheta} e^{i\beta \rho \cos \psi}, \quad (7)$$

де коефіцієнт фази хвилі в напрямку радіуса-вектора дорівнює

$$\beta = k \sin \vartheta. \quad (8)$$

Подібний вираз можна записати і для H -хвилі:

$$H_z^{\Pi} = H_{\parallel} e^{ikz \cos \vartheta} e^{i\beta \rho \cos \psi}. \quad (9)$$

На поверхні циліндра повинні виконуватися граничні умови, які забезпечують безперервність тангенціальних складових векторів напруженості поля на границі двох середовищ. Для E -хвилі граничні умови при $\rho = a_0$ мають вигляд

$$E_z^{\Pi} + E_z^{\text{Д}} = E_z^{\text{І}}; \quad (10)$$

$$H_{\psi}^{\Pi} + H_{\psi}^{\text{Д}} = H_{\psi}^{\text{І}},$$

де Π – падаюча хвиля; z – складова, паралельна вісі z ; Д – дифрагована хвиля; І – заломлена хвиля, яка розповсюджується в середині циліндра; ψ – складова, паралельна орту $\vec{\psi}_0$.

Щоб знайти дифраговану хвилю з напруженістю електричного поля $E_z^{\text{Д}}$, зобразимо плоску електричну хвилю (7), розкладену за функціями Беселя, при $\rho > a_0$:

$$E_z^{\Pi} = E_{\parallel} e^{ikz \cos \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(\beta \rho) \cos(n\psi), \quad (11)$$

де $\varepsilon_n = 1$, при $n = 0$; $\varepsilon_n = 2$, при $n = 1, 2, 3, \dots$

Права частина рівняння (8) повинна задовольняти хвильове рівняння (рівняння Гельмгольца)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (12)$$

яке в циліндричній системі координат має вигляд

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z^{\Pi}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z^{\Pi}}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 E_z^{\Pi}}{\partial z^2} + \beta^2 E_z^{\Pi} = 0. \quad (13)$$

Підставивши формулу (11) у рівняння (13), приведемо його до рівняння Беселя

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial J_n(\beta \rho)}{\partial \rho} \right) + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) J_n(\beta \rho) = 0.$$

Рівняння Беселя розв'язується також через функції Неймана і Ганкеля, які пов'язані з функціями Беселя співвідношенням

$$H_n^{(2)}(\beta \rho) = J_n(\beta \rho) - iN(\beta \rho),$$

де $H_n^{(2)}(\beta \rho)$ – функція Ганкеля, або циліндрична функція 3-го роду n -го порядку від аргументу $\beta \rho$; $N(\beta \rho)$ – функція Неймана, або циліндрична функція 2-го роду n -го порядку від аргументу $\beta \rho$.

Функції Ганкеля задовольняють умови випромінення на нескінченність, що видно з асимптотичного зображення функції Ганкеля при дуже великих значеннях $\beta \rho$:

$$H_n^{(2)}(\beta\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}} e^{-i\psi_n}, \quad (14)$$

$$\text{де } \psi_n = \beta\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}.$$

Права частина формули (14) являє собою біжучу хвилю з циліндричним фронтом, яка розповсюджується від початку координат на нескінченність. Такі властивості функцій Ганкеля дозволяють записати відбиті від циліндра хвилі у вигляді ряду при $\rho > a_0$:

$$E_z^{\text{II}} = E_{\parallel} e^{ik_z z \cos\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n i^n H_n^{(2)}(\beta\rho) \cos(n\psi), \quad (15)$$

де b_n – деякі постійні коефіцієнти розкладу формули (15), що як і у виразі (11), задовольняють хвильове рівняння (12).

Заломлену хвилю запишемо у вигляді, як і у виразі (11), але з невідомими коефіцієнтами c_n при $\rho < a_0$:

$$E_z^{\text{I}} = E_{\parallel} e^{ik_z z \cos\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon_n i^n J_n(\beta_i \rho) \cos(n\psi), \quad (16)$$

де k_i – коефіцієнт фази хвилі в циліндрі; β_i – коефіцієнт фази хвилі в циліндрі під час руху в напрямку осі $O_z X$:

$$\beta_i = k_i \sin\vartheta. \quad (17)$$

Коефіцієнт k_i знаходять із формули

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{60\sigma\lambda}{\varepsilon}\right)^2}}.$$

Для визначення векторів напруженості магнітного поля E -хвилі скористаємося другим рівнянням системи рівнянь Максвелла:

$$\dot{\vec{H}} = \frac{i}{\omega\mu_a} \text{rot}\vec{E}.$$

Враховуючи, що для E -хвилі існує тільки складова E_z , знайдемо значення вектора напруженості магнітного поля:

$$\dot{\vec{H}} = \frac{i}{\omega\mu_a} \left(\frac{\bar{\rho}_0}{\rho} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \psi} - \bar{\psi}_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \rho} \right). \quad (18)$$

Операцію $\text{rot}\vec{E}$ виконано в циліндричній системі координат.

Напруженість магнітного поля падаючої хвилі знаходимо з рівняння (16) при підстановці у формулу (18) замість E_z значення E_z^{II} з формули (11), при $\rho > a_0$:

$$\dot{\vec{H}}^{\text{II}} = -i \frac{E_{\parallel}}{\omega\mu_a} e^{ik_z z \cos\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} J_n(\beta\rho) \times \right. \\ \left. \times \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta J_n'(\beta\rho) \cos(n\psi) \right\}. \quad (19)$$

При підстановці E_z^{II} з рівняння (15) у формулу (18) визначаємо напруженість магнітного поля дифрагрованої хвилі при $\rho > a_0$:

$$\dot{\vec{H}}^{\text{II}} = -i \frac{E_{\parallel}}{\omega\mu_a} e^{ik_z z \cos\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} H_n^{(2)}(\beta\rho) \times \right. \\ \left. \times \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta H_n^{(2)'}(\beta\rho) \cos(n\psi) \right\}. \quad (20)$$

Підставивши формулу (16) у рівняння (18) знаходимо вектор напруженості магнітного поля заломленої хвилі при $\rho < a_0$:

$$\dot{\vec{H}}^{\text{I}} = -i \frac{E_{\parallel}}{\omega\mu_{ai}} e^{ik_z z \cos\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} J_n(\beta_i \rho) \times \right. \\ \left. \times \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta_i J_n(\beta_i \rho) \cos(n\psi) \right\}, \quad (21)$$

де μ_{ai} – абсолютне значення магнітної проникності матеріалу циліндра.

У формулах (19)–(21) штрихом позначена похідна циліндричної функції за аргументом.

Введемо поняття хвильового опору E -хвилі і визначимо його для зовнішнього простору

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \frac{1}{\sin\vartheta}$$

і для простору в середині циліндра

$$W_i = \sqrt{\frac{\mu_{ai}}{\varepsilon_{ai}}} \frac{1}{\sin\vartheta},$$

де ε_{ai} – діелектрична проникність матеріалу циліндра.

Видно, що

$$\frac{\beta}{\mu_a} = \frac{\omega}{W_0}; \quad \frac{\beta_i}{\mu_{ai}} = \frac{\omega}{W_i}.$$

Позначимо відношення хвильових опорів через

$$W_r = \frac{W_0}{W_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}},$$

де ε_i – відносна комплексна діелектрична проникність матеріалу циліндра:

$$\tilde{\varepsilon}_i = \sqrt{\varepsilon - i60\sigma\lambda}$$

ε – відносна діелектрична проникність циліндра; σ – провідність матеріалу циліндра; μ_i – відносна магнітна проникність матеріалу циліндра.

З урахуванням прийнятих позначень постійні коефіцієнти виразу для дифрагрованої хвилі визначають як

$$b_n = \frac{-J_n(\beta_i a_0) J_n'(\beta a_0) + W_r J_n'(\beta_i a_0) J_n'(\beta a_0)}{J_n(\beta_i a_0) H_n^{(2)'}(\beta a_0) - W_r J_n'(\beta_i a_0) H_n^{(2)}(\beta a_0)}. \quad (22)$$

У випадку ідеально провідного циліндра $\sigma \rightarrow \infty$, $W_r \rightarrow \infty$, тоді

$$b_n = \frac{J_n(\beta a_0)}{H_n^{(2)}(\beta a_0)}$$

У загальному випадку необхідно користуватися виразом (22), де β_i визначають з рівняння (17).

Розглянемо падіння на циліндр H -хвилі.

Використовуючи розклад у ряд Фур'є за функціями Беселя, перепишемо вираз (9) при $\rho > a_0$ у вигляді:

$$H_z^{\Pi} = H_{\parallel} e^{ikz \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(\beta \rho) \cos(n\psi). \quad (23)$$

Значення напруженості електричного поля хвилі знайдемо з першого рівняння системи рівнянь Максвелла

$$\vec{E} = -\frac{i}{\omega \epsilon_a} \text{rot} \vec{H}$$

Звідси в циліндричній системі координат, коли не дорівнює нулю тільки складова H_z , маємо

$$\vec{E} = -\frac{i}{\omega \epsilon_a} \left(\bar{\rho}_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \psi} - \bar{\psi}_0 \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right). \quad (24)$$

Підставляючи формулу (23) в рівняння (24), одержимо вектор напруженості електричного поля H -хвилі при $\rho > a_0$:

$$\vec{E}^{\Pi} = i \frac{H_{\parallel}}{\omega \epsilon_a} e^{ikz \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} J_n(\beta \rho) \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta J_n'(\beta \rho) \cos(n\psi) \right\}$$

Значення напруженості дифрагрованої хвилі шукаємо при $\rho > a_0$ у вигляді

$$H_z^{\text{D}} = H_{\parallel} e^{ikz \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^h \epsilon_n i^n H_n^{(2)}(\beta \rho) \cos(n\psi);$$

$$\vec{E}^{\text{D}} = i \frac{H_{\parallel}}{\omega \epsilon_a} e^{ikz \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^h \epsilon_n i^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{n}{\rho} H_n^{(2)}(\beta \rho) \times \right. \\ \left. \times \sin(n\psi) + \bar{\psi}_0 \beta H_n^{(2)'}(\beta \rho) \cos(n\psi) \right\},$$

де b_n^h – постійні коефіцієнти, значення яких знаходять із граничних умов, як і для E -хвилі.

Тільки у цьому випадку граничні умови (10) записують у вигляді

$$E_{\psi}^{\Pi} + E_{\psi}^{\text{D}} = E_{\psi}^i \text{ при } \rho = a_0;$$

$$H_z^{\Pi} + H_z^{\text{D}} = H_z^i \text{ при } \rho = a_0.$$

Значення напруженості електричного та магнітного полів дифрагованих хвиль одержано в уявленні, що протяжність циліндра вздовж осі z нескінченна. Насправді довжина циліндра скінченна. У зв'язку з цим виникає проблема використання отриманих результатів.

Розрахунок напруженості поля дифрагрованої хвилі краще виконати за допомогою еквівалентної апертури. Задавшись на деякій відстані від початку циліндричної системи координат еквівалентною апертурою, можна знайти розподіл тангенціальних складових поля в апертурі. Якщо розміри апертури набагато більші довжини хвилі, то поле в просторі з великою точністю буде визначатися за принципом Гюйгенса–Кірхгофа. У результаті повністю коректно можна врахувати довжину циліндра в розмірі еквівалентної апертури вздовж осі z . Такий спосіб дослідження електромагнітного поля використовується під час оцінок характеристик випромінювання циліндро-параболічних антен. Отже, введення еквівалентної апертури дозволить урахувати вплив скінченної довжини циліндра дифраговане поле та перейти від хвиль зі локально циліндричним фронтом до хвиль зі сферичним фронтом, що дозволить розрахувати поле дифракції в дальній зоні.

Список літератури

1. Ільницький Л.Я., Сібрук Л.В. Антени. – К.: КМУЦА, 1998. – 216 с.
2. Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. – М.: Сов. радио, 1962. – 240 с.
3. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. – М.: Сов. радио, 1966. – 431 с.
4. Боровиков В.А. Численные методы теории дифракции. – М.: Мир, 1982. – 200 с.

Стаття надійшла до редакції 19.06.03.

Л.Я. Ильницкий, Ю.В. Пепя

Дифракция радиоволн на цилиндре малого радиуса

Рассмотрено падение радиоволн на цилиндрические поверхности малого радиуса. Найдены составляющие поля дифракции для вертикальной и горизонтальной поляризации по известному облучению цилиндра.

L.Y. Pnitsky, Y.V. Pepa

Diffraction of radiowaves on the cylinder of small radius

Falling radiowaves on cylindrical surfaces of small radius is considered. Field's components of diffraction for vertical and horizontal polarization on a known irradiation of the cylinder are found.