

УДК 519.653(045)

В 193.2

В.П. Шибицький, канд. техн. наук
І.А. БороденкоДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗКУ
СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Національний авіаційний університет, shibitskiy@csfnau.kiev.ua; snucky@svitonline.com

Запропоновано методику дослідження точності і збіжності різницьових методів розв'язку диференціальних рівнянь. Розглянуто методи Рунге–Кутта, Адамса і BDF за допомогою формули оберненого диференціювання.

Вступ

Розповсюдженими математичними моделями динамічних систем різної фізичної природи є системи диференціальних рівнянь у різних координатних базисах. Сучасні комп'ютери мають колосальні обчислювальні ресурси для організації процесів розв'язання систем диференціальних рівнянь на основі класичних математичних методів. Однак питання дослідження збіжності і точності числових методів розв'язання диференціальних рівнянь у реальному часі залишається досить актуальним при прийнятті рішень керування фізичними системами в критичних ситуаціях (зміни знака змінної, її швидкості і прискорення на малому інтервалі часу).

У цьому зв'язку дослідження точності числових методів на нелінійних ділянках зміни значень параметрів, що спостерігаються, їхніх швидкостей і прискорень є актуальним при розв'язанні задач керування нелінійними динамічними процесами.

Постановка завдання

Нехай задано звичайне диференціальне рівняння

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad (1)$$

з початковими умовами t_0 й $y(t_0) = y_0$. Вважаємо, що права частина $f(y, t)$ рівняння (1) безперервна і диференційована на деякому інтервалі з області розв'язків $[t_0, t_m]$.

Розглянемо точки розв'язків:

$$t = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_k\}, \quad (2)$$

де $t_{i+1} = t_i + h$; h – крок інтегрування; $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

Для розв'язку задачі Коші (1) на рівномірній сітці (2) за допомогою персонального комп'ютера розроблено числові методи, алгоритми і програми.

Проблемним питанням практичного застосування числових методів розв'язання задачі (1) є точність одержуваних результатів.

При цьому основним джерелом похибок обчислювального процесу є похибка методу диференціювання.

Розглянемо методику оцінювання точності методів диференціювання.

Нехай $y(t_n)$ – точний аналітичний розв'язок у точці $t = t_n$, y_n – наближений розв'язок у точці t_n , отриманий за допомогою деякого методу на основі точних значень $y(t_{n-1})$.

Порядок p точності методу визначається на підставі оцінки локальної похибки дискретизації:
$$Y_n = y(t_n) - y_n = C_{p+1} y^{p+1}(t_n) h^{p+1} + O(h^{p+2}), \quad (3)$$
де C_{p+1} – константа методу.

Значення C_{p+1} і p відомі для багатьох методів.

Для більшості задач (1) права частина $f(y, t)$ аналітично визначена, і похибкою обчислень з подвійною точністю для значень кроку $h \leq 10^{-6}$ можна зневажити.

Для розробки програм важливо знати, яким чином значення величини Y_n накопичується від кроку до кроку в обчислювальному процесі. Якщо значення величини $\sum Y_n$, $n = 0, 1, 2, \dots, m$ зменшується, то метод – стійкий (збігається). Якщо значення величини $\sum Y_n$ від кроку до кроку збільшується, то метод – нестійкий (розходиться).

Однокрокові різницьові методи

Зазначену важливу властивість стійкості розглянемо на прикладі модельної задачі:

$$y' = \lambda y; \quad t_0 = 0; \quad y(t_0) = y_0, \quad (4)$$

де λ – константа (у загальному випадку комплексне число).

Загальний розв'язок зазначеної задачі має вигляд:

$$y = y_0 e^{\lambda t}.$$

Точні значення у вузлах рівномірної сітки (2):
$$y(t_i) = y_0 e^{\lambda t_i} = y_0 (e^{\lambda h})^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Найбільш простим є метод Рунге–Кутта першого порядку [1]:

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n, t_n) = y_n (1 + h\lambda) = y_n R. \quad (6)$$

З урахуванням виразу (6) можна записати:

$$y_i = y_0 (1 + h\lambda)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Абсолютна похибка методу Рунге-Кутта першого порядку в точці $t_i = h$ має вигляд:

$$\Delta_i = |y_0 (e^{h\lambda})^i - y_0 (1+h\lambda)^i|. \quad (8)$$

Виберемо значення параметрів:

$$y_0 = 1; \lambda = -10.$$

Тоді для виразу (4) маємо

$$y' = -10y.$$

Розрахунки значень змінних для $h = 0,05$ і $h = 0,4$, виконані за формулами (5), (7), (8), зведено в табл. 1, 2.

Таблиця 1

Метод Рунге-Кутта першого порядку (стійкість)

Номер вузла i	Значення аргументу t_i	Точний розв'язок	Розв'язок методом Рунге-Кутта	Абсолютна похибка
0	0	1	1	0
1	0,05	$6,06 \times 10^{-1}$	$5,00 \times 10^{-1}$	$1,07 \times 10^{-1}$
2	0,1	$3,68 \times 10^{-1}$	$2,50 \times 10^{-1}$	$1,18 \times 10^{-1}$
3	0,15	$2,23 \times 10^{-1}$	$1,25 \times 10^{-1}$	$9,81 \times 10^{-2}$
4	0,2	$1,35 \times 10^{-1}$	$6,25 \times 10^{-2}$	$7,28 \times 10^{-2}$
5	0,25	$8,21 \times 10^{-2}$	$3,13 \times 10^{-2}$	$5,08 \times 10^{-2}$
6	0,3	$4,98 \times 10^{-2}$	$1,56 \times 10^{-2}$	$3,42 \times 10^{-2}$
7	0,35	$3,02 \times 10^{-2}$	$7,81 \times 10^{-3}$	$2,24 \times 10^{-2}$
8	0,4	$1,83 \times 10^{-2}$	$3,91 \times 10^{-3}$	$1,44 \times 10^{-2}$
9	0,45	$1,11 \times 10^{-2}$	$1,95 \times 10^{-3}$	$9,16 \times 10^{-3}$
10	0,5	$6,74 \times 10^{-3}$	$9,77 \times 10^{-4}$	$5,76 \times 10^{-3}$
11	0,55	$4,09 \times 10^{-3}$	$4,88 \times 10^{-4}$	$3,60 \times 10^{-3}$
12	0,6	$2,48 \times 10^{-3}$	$2,44 \times 10^{-4}$	$2,23 \times 10^{-3}$
13	0,65	$1,50 \times 10^{-3}$	$1,22 \times 10^{-4}$	$1,38 \times 10^{-3}$
14	0,7	$9,12 \times 10^{-4}$	$6,10 \times 10^{-5}$	$8,51 \times 10^{-4}$
15	0,75	$5,53 \times 10^{-4}$	$3,05 \times 10^{-5}$	$5,23 \times 10^{-4}$
16	0,8	$3,35 \times 10^{-4}$	$1,53 \times 10^{-5}$	$3,20 \times 10^{-4}$

Таблиця 2

Метод Рунге-Кутта першого порядку (нестійкість)

Номер вузла i	Значення аргументу t_i	Точний розв'язок	Розв'язок за методом Рунге-Кутта	Абсолютна похибка
0	0	1	1	0
1	0,4	$1,83 \times 10^{-2}$	-3	$3,01 \times 10^0$
2	0,8	$3,35 \times 10^{-4}$	9	$9,00 \times 10^0$
3	1,2	$6,14 \times 10^{-6}$	-27	$2,70 \times 10^1$

У табл. 1 наведено значення аргументів, функцій і похибок методу Рунге-Кутта першого порядку для стійкого обчислювального процесу з параметрами $h\lambda = -0,5$, $R = 0,5$

Рис. 1 ілюструє зміну точного значення розв'язку диференціального рівняння, наближеного розв'язку числовим методом Рунге-Кутта першого порядку і абсолютної похибки в дискретних точках інтервалу.

У табл. 2 наведено значення аргументів, функцій і похибок методу Рунге-Кутта першого порядку для нестійкого обчислювального процесу з параметрами $h\lambda = -4$, $R = -3$.

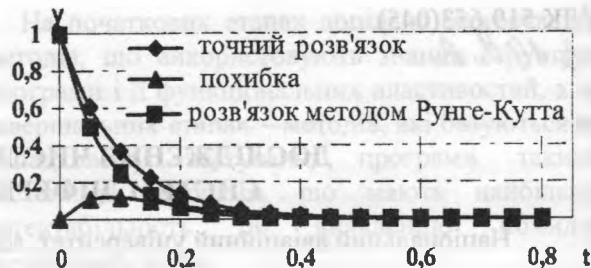


Рис. 1. Графік абсолютної похибки методу Рунге-Кутта першого порядку

Розв'язки за методом Рунге-Кутта першого порядку для $h = 0,4$ розходяться (табл. 2).

Дослідження методів для багатьох звичайних диференціальних рівнянь і навіть для великих систем звичайних диференціальних рівнянь, для яких існує матриця Якобі правої частини

$$A = dF / dY,$$

де F – вектор правої частини; Y – вектор залежних змінних, зводиться до дослідження поведінки цих методів для модельної задачі (4).

Величина критичного кроку $h_{кр}$, при якому метод Рунге-Кутта першого порядку знаходиться на границі стійкості для даного тестового рівняння, оцінюється в такий спосіб.

Вважаємо для виразу (6):

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = Z = e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) = 1 + h\lambda, \quad (9)$$

позначимо

$$h\lambda = x + jy.$$

Тоді з огляду на формулу (9) рівняння кола радіуса $r=1$, зрушеною на одиницю вліво відносно початку координат (рис. 2), має вигляд $y^2 + (x+1)^2 = 1$.

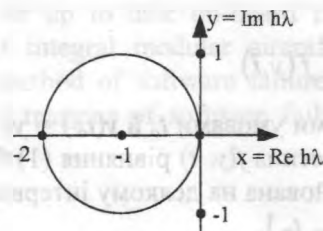


Рис. 2. Область збіжності

Для нашого випадку

$$\lambda = -10;$$

$$h_{кр} = \frac{-2}{-10} = 0,2.$$

При $0 < h < 0,2$ даний метод Рунге-Кутта сходиться для $y' = -10y$, при $h > 0,2$ – розходиться.

Аналогічний підхід застосуємо при дослідженні за методом Рунге-Кутта другого порядку точності:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(k_1 + 3k_2)}{4}; \quad (10)$$

$$k_1 = hf(y_n, x_n);$$

$$k_2 = hf\left(y_n + \frac{2}{3}k_1, x_n + \frac{2}{3}h\right). \quad (11)$$

Розрахунки обчислювального процесу за формулами (10) і (11) для випадку стійкості з параметрами $h\lambda = -0,5$, $R = 0,625$ наведено в табл. 3 і на рис. 3.

Таблиця 3

Метод Рунге-Кутта другого порядку

Номер вузла i	Значення аргументу t_i	Точний розв'язок	Розв'язок за методом Рунге-Кутта	Абсолютна похибка
0	0	1	1	0
1	0,05	$6,07 \times 10^{-1}$	$6,25 \times 10^{-1}$	$1,85 \times 10^{-2}$
2	0,1	$3,68 \times 10^{-1}$	$3,91 \times 10^{-1}$	$2,27 \times 10^{-2}$
3	0,15	$2,23 \times 10^{-1}$	$2,44 \times 10^{-1}$	$2,10 \times 10^{-2}$
4	0,2	$1,35 \times 10^{-1}$	$1,53 \times 10^{-1}$	$1,73 \times 10^{-2}$
5	0,25	$8,21 \times 10^{-2}$	$9,54 \times 10^{-2}$	$1,33 \times 10^{-2}$
6	0,3	$4,98 \times 10^{-2}$	$5,96 \times 10^{-2}$	$9,82 \times 10^{-3}$
7	0,35	$3,02 \times 10^{-2}$	$3,73 \times 10^{-2}$	$7,06 \times 10^{-3}$
8	0,4	$1,83 \times 10^{-2}$	$2,33 \times 10^{-2}$	$4,97 \times 10^{-3}$
9	0,45	$1,11 \times 10^{-2}$	$1,46 \times 10^{-2}$	$3,44 \times 10^{-3}$
10	0,5	$6,74 \times 10^{-3}$	$9,09 \times 10^{-3}$	$2,36 \times 10^{-3}$
11	0,55	$4,09 \times 10^{-3}$	$5,68 \times 10^{-3}$	$1,60 \times 10^{-3}$
12	0,6	$2,48 \times 10^{-3}$	$3,55 \times 10^{-3}$	$1,07 \times 10^{-3}$
13	0,65	$1,50 \times 10^{-3}$	$2,22 \times 10^{-3}$	$7,17 \times 10^{-4}$
14	0,7	$9,12 \times 10^{-4}$	$1,39 \times 10^{-3}$	$4,76 \times 10^{-4}$
15	0,75	$5,53 \times 10^{-4}$	$8,67 \times 10^{-4}$	$3,14 \times 10^{-4}$
16	0,8	$3,35 \times 10^{-4}$	$5,42 \times 10^{-4}$	$2,07 \times 10^{-4}$

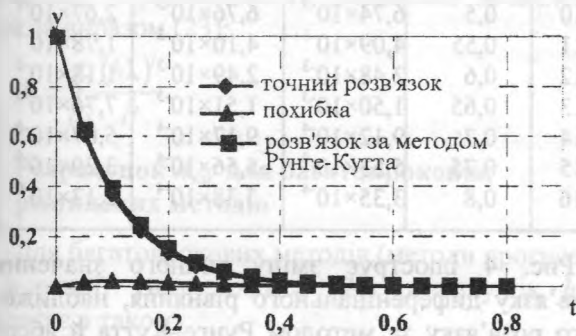


Рис. 3. Графік абсолютної похибки методу Рунге-Кутта другого порядку

Для модельної задачі отримуємо з формул (10) і (11):

$$y_{n+1} = y_n R;$$

$$R = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}.$$

Результати обчислювального процесу за методом Рунге-Кутта з параметрами $h = 0,4$, $\lambda = -10$; $h\lambda = -4$; $R = 5$ наведено в табл. 4. Величина критичного кроку $h_{кр}$ знаходиться з умови:

Таблиця 4

Метод Рунге-Кутта другого порядку (нестійкість)

Номер вузла i	Значення аргументу t_i	Точний розв'язок	Розв'язок за методом Рунге-Кутта	Абсолютна похибка
0	0	1	1	0
1	0,4	$1,83 \times 10^{-2}$	5,00	4,98
2	0,8	$3,35 \times 10^{-4}$	-9,87	9,87
3	1,2	$6,14 \times 10^{-6}$	19,75	19,75

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = Z = e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}. \quad (12)$$

З урахуванням того, що λ – дійсне число, з формули (12) для $\varphi = 0$ одержуємо:

$$h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} = 0. \quad (13)$$

При $\lambda = -10$ одержуємо з формули (13) рівняння першого ступеня відносно h :

$$1 - 5h = 0. \quad (14)$$

З рівняння (14) знаходимо $h_{кр} = 0,2$.

Для $\varphi = 180^\circ$ одержуємо:

$$2 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} = 0.$$

Звідси отримуємо, що $h_{кр}$ повинно бути комплексним. Тобто цей випадок не розглядаємо.

Рівняння третього порядку точності має вигляд (табл. 5, рис. 4):

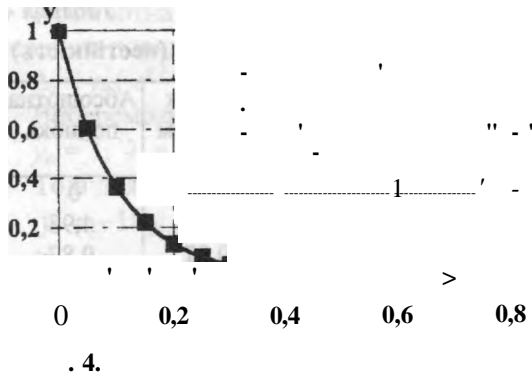
$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6; \quad (15)$$

$$k_1 = hf(y_n, x_n);$$

Таблиця 5

Метод Рунге-Кутта третього порядку ($h\lambda = -0,5$, $R = 0,604166667$)

Номер вузла i	Значення аргументу t_i	Точний розв'язок	Розв'язок за методом Рунге-Кутта	Абсолютна похибка
0	0	1	1	0
1	0,05	$6,07 \times 10^{-1}$	$6,04 \times 10^{-1}$	$2,36 \times 10^{-3}$
2	0,1	$3,68 \times 10^{-1}$	$3,65 \times 10^{-1}$	$3,01 \times 10^{-3}$
3	0,15	$2,23 \times 10^{-1}$	$2,20 \times 10^{-1}$	$2,88 \times 10^{-3}$
4	0,2	$1,35 \times 10^{-1}$	$1,33 \times 10^{-1}$	$2,44 \times 10^{-3}$
5	0,25	$8,21 \times 10^{-2}$	$8,01 \times 10^{-2}$	$1,95 \times 10^{-3}$
6	0,3	$4,98 \times 10^{-2}$	$4,83 \times 10^{-2}$	$1,49 \times 10^{-3}$
7	0,35	$3,02 \times 10^{-2}$	$2,91 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-3}$
8	0,4	$1,83 \times 10^{-2}$	$1,75 \times 10^{-2}$	$8,14 \times 10^{-4}$
9	0,45	$1,11 \times 10^{-2}$	$1,05 \times 10^{-2}$	$5,86 \times 10^{-4}$
10	0,5	$6,74 \times 10^{-3}$	$6,32 \times 10^{-3}$	$4,17 \times 10^{-4}$
11	0,55	$4,09 \times 10^{-3}$	$3,79 \times 10^{-3}$	$2,94 \times 10^{-4}$
12	0,6	$2,48 \times 10^{-3}$	$2,27 \times 10^{-3}$	$2,06 \times 10^{-4}$
13	0,65	$1,50 \times 10^{-3}$	$1,36 \times 10^{-3}$	$1,43 \times 10^{-4}$
14	0,7	$9,12 \times 10^{-4}$	$8,13 \times 10^{-4}$	$9,88 \times 10^{-5}$
15	0,75	$5,53 \times 10^{-4}$	$4,85 \times 10^{-4}$	$6,80 \times 10^{-5}$
16	0,8	$3,35 \times 10^{-4}$	$2,89 \times 10^{-4}$	$4,67 \times 10^{-5}$



$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right); \tag{16}$$

$$3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right); \tag{17}$$

$$= 0,4, X = - 10, = - 4, = - 5,67$$

0	0	1	1	0
1	0,4	1,83x10 ²	-5,67	5,68
2	0,8	3,35 10 ⁴	-17,16	17,16
3	1,2	-6	-51,48	51,48

$$= 2 - * = () + 5 () =$$

$$= 1 + \frac{()^2}{2} + \frac{()^3}{6} \tag{18}$$

$$= 0^\circ : \tag{19}$$

$$= - 10 \tag{19}$$

$$50 \cdot 2 - 15 + 3 = 0. \tag{20}$$

=180°:

$$250 \cdot 3 - 75 \cdot 2 + 15 \cdot -3 = 0,$$

$$=0,251.$$

$$(\cdot 7).$$

$$+ = + \tag{21}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right). \tag{22}$$

$$(= - 0,5, = 0,606770833)$$

0	0	1	1	0
1	0,05	6,07x10 ¹	6,07x10	2,40x10 ⁴
2	0,1	3,68x10 ²	3,68x10 ²	2,91x10 ⁴
3	0,15	2,23x10 ³	2,23x10 ³	2,65x10 ⁴
4	0,2	1,35x10 ⁴	1,36x10 ⁴	2,65x10 ⁴
5	0,25	8,21 '2	8,22 '2	1,63 '4
6	0,3	4,98x10 ²	4,99 '2	1 8 0-4
7	0,35	3,02x10 ²	3,03x10 ²	8,38 '5
8	0,4	1,83 '2	1,84 10 ²	5,81x10 ⁵
9	0,45	'2	1,11x10 ²	3,97 10 ⁵
10	0,5	6,74 '3	6,76x10 ³	2,67x10 ⁵
11	0,55	4,09x10 ³	4,10 '3	1,78x10 ⁵
12	0,6	2,48x10 ³	2,49x10 ³	1,18 10 ⁵
13	0,65	1,50x10 ³	1,51 10 ³	7,76x10 ⁶
14	0,7	9,12x10 ⁴	9 7 0-4	5,07x10 ⁶
15	0,75	5,53 10 ⁴	5,56 '4	3,29 '6
16	0,8	3,35 '4	3,38 '4	2,13 '6

$$= 2 - * = () + 5 () =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = () \tag{21} \tag{22}$$

$$) = 1 + \frac{()^2}{2} + \frac{()^3}{6} + \frac{()^4}{24}$$

$$=0,4, = - 10, = - 4, ? =5 \tag{8}$$

Таблиця 8

Метод Рунге–Кутта четвертого порядку
(нестійкість)

Номер вузла i	Значення аргументу t_i	Точний розв'язок	Розв'язок за методом Рунге–Кутта	Абсолютна похибка
0	0	1	1	0
1	0,4	$1,83 \times 10^{-2}$	5	4,98
2	0,8	$3,35 \times 10^{-4}$	25	25,00
3	1,2	$6,14 \times 10^{-6}$	125	125,00

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = Z = e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24}. \quad (23)$$

З урахуванням того, що λ – дійсне число, з формули (23) для $\varphi = 0^\circ$ одержуємо:

$$h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24} = 0. \quad (24)$$

При $\lambda = -10$ з формули (24) одержуємо рівняння третього ступеня відносно h :

$$125h^3 - 50h^2 + 15h - 3 = 0. \quad (25)$$

З рівняння (25) знаходимо $h_{кр} = 0,278$.

Тепер розглянемо випадок $\varphi = 180^\circ$. Маємо рівняння четвертого ступеня відносно h :

$$10000h^4 - 4000h^3 + 1200h^2 - 240h + 48 = 0. \quad (26)$$

Згідно з рівнянням (26) $h_{кр}$ повинно бути комплексним.

Для інших однокрокових методів порядку p величину R розраховують аналогічно обчисленням за виразом (23):

$$R = \sum_{i=1}^p \frac{(h\lambda)^i}{i!}.$$

Розрахунок $h_{кр}$ для багатокрокових різницевого методів

Для багатокрокових методів (методи прогнозу і корекції типу Адамса [2]) розрахунок $h_{кр}$ полягає в такому.

Нехай для k -крокового явного методу

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda(\alpha_n y'_n + \alpha_{n-1} y'_{n-1} + \dots + \alpha_{n-k} y'_{n-k}),$$

де α_n – коефіцієнти.

Для виразу (4)

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda = \sum_{i=1}^k \alpha_{n-i} y_{n-i}.$$

Тоді одержуємо

$$y_{n-i} = e^{-ij\varphi},$$

де $i = -1, 0, 1, \dots, k$; $j = \sqrt{-1}$; $\varphi \in (0^\circ, 360^\circ)$.

З виразів (17) і (18) для $\varphi = 0^\circ$ або $\varphi = 180^\circ$ обчислюємо $h_{кр}$.

Для тестової задачі (4), як правило, вибирається значення $\lambda < 0$. З підвищенням порядку точності p для методів Рунге–Кутта спостерігається збільшення значення $h_{кр}$, а для методів типу Адамса – зменшення $h_{кр}$.

Для більшості відомих методів оцінка величини Y_n (3) зводиться до обчислення значення C_{p+1} із застосуванням до вихідної формули розкладання в ряд Тейлора.

Метод оберненого диференціювання

На сьогодні при дослідженні перехідних процесів у динамічних системах за допомогою числових методів розв'язання диференціальних рівнянь широко застосовують формули оберненого диференціювання. Збільшення точності числових методів може бути отримано, якщо в процесі обчислень використовувати розв'язки для декількох розрахованих раніше точок інтервалу часу [3].

Для числових значень x_{j-1} , x_j , x_{j+1} у точках, що відповідають моментам часу, і шуканої точки $(t_{j+1}; x_{j+1})$ будується інтерполяційний поліном k -го порядку, за допомогою якого описується крива $u = f(t)$ (рис. 5).

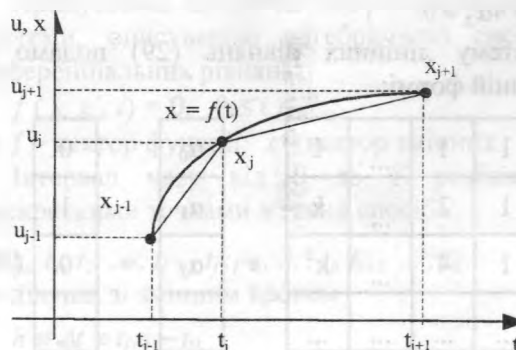


Рис. 5. Інтерполяція кривої $u = f(t)$ за допомогою полінома $x = f(t)$

Наприкінці інтервалу інтерполяції, у точці (t_{j+1}, x_{j+1}) , нахил кривої $x = f(t)$ обчислюється за допомогою формули оберненого диференціювання (BDF – backward differentiation formula) [4].

Розглянемо висновок формули оберненого диференціювання для $k=2$. Ступінь k інтерполяційного полінома називається порядком методу BDF.

Для похідної x'_{j+1} від $x = f(t)$ у момент часу t_{j+1} покладемо

$$x'_{j+1} = -\frac{1}{h}(\alpha_0 x_{j+1} + \alpha_1 x_j + \alpha_2 x_{j-1}). \quad (27)$$

При цьому на кожному інтервалі крок постійний:

$$h = t_{j+1} - t_j = t_j - t_{j-1}.$$

Для обчислення коефіцієнтів $\alpha_0 \dots \alpha_k$ упорядкуємо інтерполяційний поліном $x(t)$ другого порядку по ступенях і подамо його в такий спосіб:

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 \frac{t_{j+1} - t}{h} + \beta_2 \left(\frac{t_{j+1} - t}{h} \right)^2 \quad (28)$$

У момент t_{j-1} похідна цього рівняння

$$x'_{j+1} = -\frac{\beta_1}{h}$$

Згідно з формулою (28) обчислимо функцію $x(t)$ для декількох моментів часу:

якщо $t = t_{j+1}$, то $x_{j+1} = \beta_{\text{про}}$,

якщо $t = t_j$, то $x_j = \beta_{\text{про}} + \beta_1 + \beta_2$,

якщо $t = t_{j-1}$, то $x_{j-1} = \beta_{\text{про}} + 2\beta_1 + 4\beta_2$.

Підставимо ці значення та x'_{j+1} у формулу (27) і запишемо

$$-\frac{\beta_1}{h} = -\frac{1}{h} (\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) + \alpha_2 (\beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2)).$$

Шукані коефіцієнти α тепер можуть бути визначені з рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0; \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 1; \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Систему лінійних рівнянь (29) подамо в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & k \\ 0 & 1 & 4 & \dots & k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2^k & \dots & k^k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Як розв'язок одержуємо $\alpha_0 = -1,5$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -0,5$.

Для будь-якого значення порядку k рівняння (27) у загальному випадку можна зобразити в такий спосіб:

$$x'_{j+1} = -\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{j+1-i}$$

Коефіцієнти $\alpha_0 \dots \alpha_k$ є розв'язками системи $k+1$ лінійних рівнянь (30).

Розглянемо дослідження точності і збіжності методу BDF для обчислення похідних першого і другого порядку на одному кроці диференціювання на прикладі функції (рис. 6).

Для дослідження точності обчислень залежно від величини кроку беремо диференційовану функцію на інтервалі зміни аргументу $0 \leq t \leq 0,05$. При цьому аналізований інтервал зміни

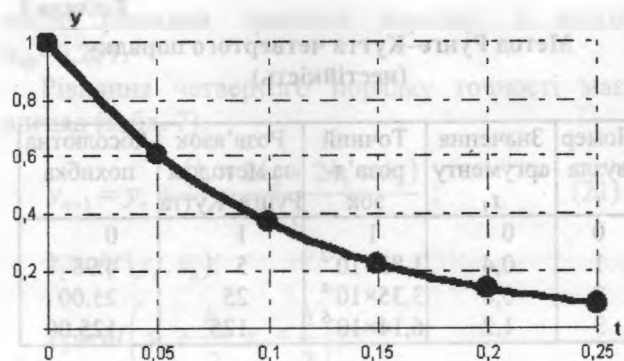


Рис. 6. Графік функції $y = e^{-\lambda t}$

аргументу розбиваємо на п'ять підінтервалів. Наближене числове значення шуканої похідної обчислюється для значення аргументу $t = 0,05$ за допомогою формул обчислення числових значень функції в точках із рівними кроками назад. Це значення порівнюється з точним аналітичним значенням похідної в тій же точці.

Дискретні значення функції дорівнюють:

$$y_1=1, y_2=0,904837, y_3=0,818731, y_4=0,740818, y_5=0,670320, y_6=0,606531$$

для відповідних значень аргументу

$$t = 0; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05.$$

Значення похідної для аргументу $t = 0,05$ (рис. 6), обчислимо використовуючи формулу (22) і значення коефіцієнтів $\alpha_0 \dots \alpha_k$ із системи (30): $y'_2 = -6,06546$.

Подібним чином розіб'ємо на частини інші ділянки функції й обчислимо значення похідних для аргументу $t = 0,1; 0,15; 0,2; 0,25$. Отримані дані занесемо в табл. 9.

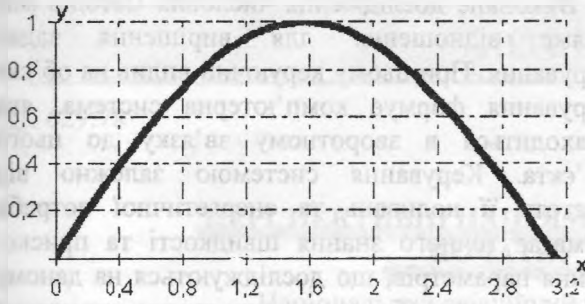
Таблиця 9

Порівняльний аналіз методу BDF для аргументу t

Номер вузла i	Значення аргументу t_i	Точне значення y'	Значення y' за методом BDF	Абсолютна похибка
1	0,05	-6,06531	-6,065	$1,5 \times 10^{-4}$
2	0,1	-3,67878	-3,678	$1,4 \times 10^{-4}$
3	0,15	-2,23130	-2,231	$1,3 \times 10^{-4}$
4	0,2	-1,35335	-1,353	9×10^{-5}
5	0,25	-0,82085	-0,820	7×10^{-5}

Під час дослідження критичних ситуацій зміни знака змінної, її швидкості і прискорення викликає інтерес дослідження точності числових методів диференціювання в момент часу, коли перша похідна і її прискорення змінюють знак або дорівнюють нулеві.

Цю ситуацію числового обчислення першої і другої похідної розглянемо на прикладі функції $y = \sin(x)$ на (рис. 7). Акцентуємо увагу на області зміни функції для інтервалу аргументу $1,2 \leq x \leq 1,6$.

Рис. 7. Графік функції $y = \sin(x)$

Обчислимо першу похідну для аргументу $x=1,6$, використовуючи інтерполяційний поліном п'ятого порядку: $y' = -0,029199$.

Результат наближеного числового обчислення значення функції за допомогою інтерполяційного полінома п'ятого порядку порівнюємо з точним аналітичним значенням похідної $y' = -0,0291995$ для аргументу $x = 1,6$. Результати обчислення першої похідної для значень аргументу $1,2 \leq x \leq 1,6$ наведено в табл. 10.

Таблиця 10

**Порівняльний аналіз методу BDF
для аргументу x_i**

Номер вузла i	Значення аргументу x_i	Точне значення y'	Значення y' за методом BDF	Абсолютна похибка
1	1,2	0,36235	0,36237	$1,9 \times 10^{-4}$
2	1,3	0,26749	0,26748	$1,7 \times 10^{-4}$
3	1,4	0,16996	0,16998	$1,5 \times 10^{-4}$
4	1,5	0,07073	0,07073	$6,0 \times 10^{-5}$
5	1,6	-0,02919	-0,02919	$5,0 \times 10^{-5}$

У разі розв'язання задач аналізу руху багатопараметричних об'єктів і виявлення критичних ситуацій у нелінійних режимах керування викликає інтерес обчислення значень другої похідної – прискорення зміни значення параметра, що спостерігається. Проведемо дослідження точності і збіжності обчислювального процесу на одному кроці диференціювання при обчисленні другої похідної функції на інтервалі зміни її аргументу, коли друга похідна змінює знак свого значення [5].

За методом BDF обчислимо значення другої похідної для функції $y = \sin(x)$ на інтервалі зміни аргументу $0,4 \leq x \leq 1,6$ (рис. 7). Наближене числове значення другої похідної для аргументу $x = 1,6$ дорівнює $y'' = -0,998437$. Точне аналітичне значення другої похідної для аргументу $x = 1,6$ має значення $y'' = -0,999574$.

Результати обчислення другої похідної для дискретної зміни значень аргументу на інтервалі $0,4 \leq x \leq 1,6$ з рівним кроком наведено в табл. 11.

Таблиця 11

Абсолютна похибка методу BDF

Номер вузла	Значення аргументу x_i	Точне значення y''	Значення y'' за методом BDF	Абсолютна похибка
1	0,4	-0,38941	-0,389233	$1,85 \times 10^{-4}$
2	0,5	-0,47942	-0,478999	$4,27 \times 10^{-4}$
3	0,6	-0,56464	-0,566256	$1,61 \times 10^{-3}$
4	0,7	-0,64421	-0,641191	$3,03 \times 10^{-3}$
5	0,8	-0,71735	-0,721168	$3,81 \times 10^{-3}$
6	0,9	-0,78332	-0,779592	$3,74 \times 10^{-3}$
7	1,0	-0,84147	-0,844254	$2,78 \times 10^{-3}$
8	1,1	-0,89120	-0,889234	$1,97 \times 10^{-3}$
9	1,2	-0,93203	-0,932698	$6,59 \times 10^{-4}$
10	1,3	-0,96355	-0,964145	$5,87 \times 10^{-4}$
11	1,4	-0,98544	-0,984046	$1,40 \times 10^{-3}$
12	1,5	-0,99749	-0,998915	$1,42 \times 10^{-3}$
13	1,6	-0,99957	-0,998437	$1,14 \times 10^{-3}$

Проведене дослідження збіжності і точності методу BDF для виконання чисельного диференціювання функцій дозволяє обґрунтувати методику побудови алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь.

Припустимо, що метод BDF застосовується до системи, описуваною алгебричною системою диференціальних рівнянь

$$f(x, x', t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (31)$$

де f – вектор функції; x – вектор змінних.

Інтервал часу від 0 до T розбивається дискретними точками в такий спосіб:

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{j-k}, t_{j-k-1}, \dots, t_j, t_{j+1}, \dots, t_n$$

на ділянці зі змінним кроком

$$h \equiv \Delta t \equiv t_{j+1} - t_j.$$

Числове диференціювання заданої системи (31) можна виконати за допомогою наступної заміни аналітичного зображення похідної x' за допомогою формули диференціювання назад інтерполяційним поліномом k -го порядку на $j+1$ кроці обчислень:

$$x'_{j+1} = -\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{j+1-i}, \quad 1 \leq k \leq 6, \quad (32)$$

яка призводить систему (31) до системи нелінійних алгебричних рівнянь, що відповідають кожній наступній часовій точці t_{j+1} .

При алгоритмічній реалізації даного методу необхідно розглянути питання вибору оптимального порядку k інтерполяційного полінома для досягнення необхідної точності обчислення числового значення похідної.

Для того, щоб зменшити величину похибок зрізання, метод BDF передбачає заміну в рівнянні (31) значень назад x_{j+1-i} різницями назад

Δx_{-i} , де $i = 1, 2, \dots, k$. Отже, формула (32) у дійсності реалізується в такому вигляді:

$$x'_{j+1} = -\frac{1}{h} \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\alpha}_i \Delta x_{j-i};$$

$$\tilde{\alpha}_j = \sum_{i=0}^j \alpha_i;$$

$$\tilde{\gamma}_i = -1 + \sum_{i=1}^j \gamma_i = -\sum_{i=j+1}^{k+1} \gamma_i.$$

Висновки

У результаті дослідження різницевого числового методу моделювання характеристик динамічних систем, точності і збіжності числових методів диференціювання запропоновано метод прогнозу числового процесу диференціювання для поліпшення його збіжності.

Комп'ютерне моделювання задач керування динамічними об'єктами накладають додаткові вимоги до збіжності та стійкості вирішенні диференціальних рівнянь числовими методами. У цих системах досліджували параметри змінюють свою швидкість та мають прискорення на заданому проміжку часу. На сьогодні функції керування формуються залежно не тільки від швидкості зміни досліджувальних параметрів, але і їх прискорень.

Виконане дослідження числових методів має пряме відношення для вирішення задач керування. При цьому керуючий вплив на об'єкт керування формує комп'ютерна система, яка знаходиться в зворотному зв'язку до цього об'єкта. Керування системою залежно від частоти її коливань та енергетичної потреби вимагає точного знання швидкості та прискорення параметрів, що досліджуються на даному проміжку часу. Тому, на нашу думку, вирішення задачі точності та збіжності числових методів має практичне значення при проектуванні динамічних систем керування.

Список літератури

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 633 с.
2. Вычислительные методы в прикладной математике / Под ред. Г.И. Марчука – Новосибирск: Наука, 1982. – 290 с.
3. Икрамов Х.Д. Численные методы линейной алгебры. – М.: Знание, 1987. – 46 с.
4. Хемминг Р.В. Численные методы / Пер. с англ. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
5. Трауб Дж. Фр. Итерационные методы решения уравнений / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 263 с.

Стаття надійшла до редакції 07.04.03.

В.П. Шибицкий, И.А. Бороденко

Исследование численных методов решения систем дифференциальных уравнений

Предложена методика исследования точности и сходимости разностных методов решения дифференциальных уравнений. Рассмотрены методы Рунге-Кутты, Адамса и BDF с помощью формулы обратного дифференцирования.

V.P. Shibitskiy, I.A. Borodenko

Research of numerical methods of the decision of systems the differential equations

The technique of research of accuracy and convergence differed methods of the decision of the differential equations is offered. Methods Runge-Kutt, Adams i BDF are examined by means of the formula of return differentiation.