УДК 519.725+681.32

А.Я. Білецький, д-р техн. наук
Є.А. Білецький

СИНТЕЗ СИМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ДИСКРЕТНИХ СТЕПЕНЕВИХ ФУНКЦІЙ

Національний авіаційний університет, abel@nau.edu.ua

Розглянуто методику формування симетричних матриць, утворюючих системи базисних дискретних степеневих функцій, і особливості їх застосування в задачах спектрального аналізу сигналів.

Вступ

Одним із головних елементів цифрової обробки сигналів є процесор дискретного перетворення Фур'є. За останнє десятиліття значно розширився інтерес до досліджень, пов'язаних із застосуванням алгоритмів швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). З просуванням ШПФ в область цифрової обробки надширокосмугових сигналів постає необхідність у розробці нових базисних систем, які надають більшу в порівнянні з класичним базисом дискретних експоненційних функцій (ДЕФ) швидкість обчислення спектру. Відомо, що максимальну швидкодію процесора ШПФ може забезпечити базис систем функцій Уолша [1]. Час виконання дискретного перетворення Уолша майже на порядок менше часу виконання ДПФ того ж самого масиву даних [2; 3].

Постановка задачі

Дискретний базис має, по-перше, надає процесору ШПФ швидкість обчислень спектру не меншу, ніж базис Уолша, по-друге, зберігати лінійну зв'язаність частотних шкал процесора і, по-третє, забезпечувати більшу ефективність виявлення гармонічних сигналів на фоні завад у порівнянні з ефективністю виявлення в базисі функцій Уолша. За такий базис пропонується базис дискретних степеневих функцій (ДСФ), в якому модулі дійсної та уявної складових фазового (повертального) множника (ФМ) набувають значення 2^{-m}, $m = 0,1,...$. При таких значеннях складових ФМ операції комплексного множення зводяться до простих операцій складання, оскільки множення операнда на 2^{-m} еквівалентно зсуву цього операнда на m розрядів праворуч, тобто в сторону молодших розрядів.

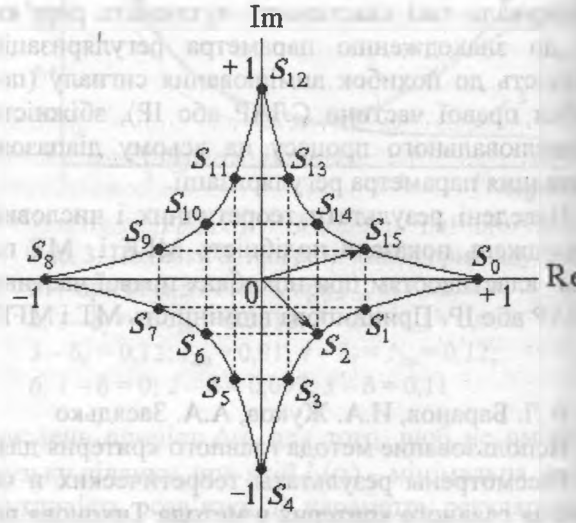
Загальні співвідношення

До базису дискретних степеневих функцій можна прийти в результаті заміни фазових множників базису ДЕФ системою лінійних степеневих функцій:

$$\xi(m) = 2^{-m}, \quad m = 0,1,.., \qquad (1)$$

включаючи значення, яке дорівнює нулю.

Базис, складений із функцій (1), будемо називати базисом дискретних степеневих функцій. Загальний вигляд діаграми ФМ у базисі ДСФ $S_k \left(k = \overline{0,N-1}\right)$, на комплексній площині для обсягу вибірки вхідного сигналу $N = 16$ зображено на рисунку. Для того, щоб не затінити діаграму, на рисунку зображено лише вектори ФМ S_2 і S_{15}. Вершини інших множників позначені точками.



Векторна діаграма ФМ у базисі ДСФ для $N = 16$

Оболонка ФМ базису ДСФ відрізняється не тільки від форми одиничного околу, яка характерна для базису ДЕФ, але і від форми квадрата, як у базисі дискретних трикутних функцій (ДТФ) [4]. Така трансформація форми оболонки ФМ у базисі ДСФ повинна викликати певні негативні наслідки.

Розглянемо в подальшому системи ДСФ на двійково-раціональному інтервалі N .

При $N = 4$ базис ДСФ збігається з базисом ДЕФ, а якщо $N = 8$, то він відповідає базису ДТФ. Введемо позначення $\mathrm{S}_N = s(k,n)$ для квадратної матриці ДСФ порядку $N \times N$, і нехай $s(k,n)$ – k-та базисна функція системи ДСФ, в якій n – дискретний нормований час (аргумент функції). Тоді

$$
\mathbf{S}_N = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cdots \\ N-1 \\ k \end{array}
\begin{array}{c} 0 \quad\quad 1 \quad\quad \cdots \quad N-1 \quad n \\
\begin{bmatrix} s(0,0) & s(0,1) & \cdots & s(0,N-1) \\ s(1,0) & s(1,1) & \cdots & s(1,N-1) \\ s(2,0) & s(2,1) & \cdots & s(2,N-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ s(N-1,0) & s(N-1,1) & \cdots & s(N-1,N-1) \end{bmatrix} \\ \end{array}.
$$

Кожний k-й рядок матриці $\mathbf{S}_N$ утворює k-ту базисну функцію системи ДСФ. Нульова базисна функція системи $\mathbf{S}_N$ тривіальна і має вигляд:

$$s(0,n) = (1,0)\,, \qquad n = \overline{0, N-1}\,. \tag{2}$$

У правій частині функції (2) використано загальноприйняте позначення для комплексної величини

$$a + jb = (a,b)\,,$$

яке не слід плутати з позначенням скалярного добутку змінних a і b.

Функція $s(1,n)$ складається з послідовності ФМ (див. рисунок) базису за правилом:

$$s(1,n) = S_n \,, \quad n = \overline{0, N-1}\,. \tag{3}$$

У таблиці як приклад наведено значення дійсної Re і уявної Im частин перших п'яти ФМ S_n для $N = 16$.

Компоненти фазових множників

n	0	1	2	3	4
Re_n	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	0
Im_n	0	$-1/8$	$-1/4$	$-1/2$	-1

За допомогою рисунку також легко можуть бути виписані компоненти залишку ФМ S_n, $n = \overline{5,15}$.

Усі базисні функції $s(k,n)$, починаючи з $k \geq 2$, містяться в першій функції і визначаються співвідношенням:

$$s(k,n) = s\big(1, \mathrm{mod}(kn, N)\big)\,, \tag{4}$$

де $\mathrm{mod}(x,m)$ – функція модульної арифметики, яка дорівнює залишку від ділення числа x на m (x, m – цілі числа).

Синтез симетричних матриць дискретних степеневих функцій

Легко впевнитись у тому, що матриці ДТФ двійково-раціонального порядку N, побудовані за формулами (2)–(4), є симетричними. Назвемо такі матриці базовими (або основними) матрицями (системами) ДСФ і введемо для них позначення $\mathbf{S}_N^{(0)}$. Рядки матриць $\mathbf{S}_N^{(0)}$ утворюють повну систему базисних взаємно ортогональних дискретних функцій.

Система $\mathbf{S}_N^{(0)}$ не єдина симетрична система ДСФ. Як і в базисах ДЕФ і ДТФ, загальне число симетричних матриць ДСФ дорівнює $N/2$. Назвемо доповнення основної системи $\mathbf{S}_N^{(0)}$ в повній множині симетричних матриць ДСФ підмножиною дочірніх симетричних систем і позначимо їх через $\mathbf{S}_N^{(m)}$, $m = \overline{1, N/2-1}$.

Синтез дочірніх симетричних матриць ДСФ базується на теоремі, доведеній у роботі [5], згідно з якою матриці $\mathbf{S}_N^{(m)}$ ($m \geq 1$) утворюються в результаті перестановок базисних функцій основної матриці $\mathbf{S}_N^{(0)}$ із кроком $h^{(m)} = (1+2m)$, причому нульова функція $s(0,n)$ у всіх системах тримає фіксоване положення (перший рядок матриці). У результаті вказаних перестановок послідовність $k^{(m)}$-х базисних функцій $s\left(k^{(m)}, n\right)$ основної матриці $\mathbf{S}_N^{(0)}$, де

$$k^{(m)} = \mathrm{mod}(k(1+2m), N)\,, \qquad k = \overline{0, N-1}\,,$$

створює m-ю дочірню симетричну матрицю $\mathbf{S}_N^{(m)}$, $m = \overline{1, N/2-1}$, у базисі ДСФ.

Відмітимо основні властивості симетричних систем ДСФ.

Базис ДТФ N-го порядку містить $l = N/8 + 1$ різних за модулем A_k фазових множників, причому $A_0 = 1$, а для $k = \overline{1, l}$

$$A_k = \sqrt{2^{-2k} + 2^{-2(2l-k)}}\,. \tag{5}$$

Дискретна степенева функція є періодичною функцією з періодом N двійково-раціональним числом:

$$s(k, n + mN) = s(k,n)\,, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

При всіх $k \neq 0$ ДСФ має нульове середнє значення

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(k,n) = 0\,.$$

Система ДСФ ортогональна на інтервалі визначення N, тобто

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(k,n)\, s^*(l,n) = \begin{cases} 0, l \neq k; \\ E_k, l = k, \end{cases}$$

де s^* – комплексно-спряжена функція; E_k – енергія k-й функції.

Енергія k-й ДСФ є функцією k та N. Як наслідок базис ДСФ не ортонормований.

На інтервалі $N = 8$ система ДСФ мультиплікативна, тобто результат поелементного добутку двох рядків матриці ДСФ є рядком тієї ж самої матриці:

$$s(k,n)s(l,n) = s(m,n),$$

де $m = \mathrm{mod}(k + l, 8)$.

Починаючи з $N \geq 16$ системи ДСФ втрачають властивість мультиплікативності.

Оскільки на інтервалі визначення N система ДСФ складається з N ортогональних функцій, то її неможливо доповнити на цьому інтервалі жодною новою функцією, яка б була ортогональна одночасно до всіх функцій, що входять в систему. Тому система ДСФ є повною.

Базис ДСФ надає лінійну зв'язність частотним шкалам процесора ШПФ. Це означає, що для цілочислових значень m нормованої частоти вхідного дискретного комплексного сигналу

$$\dot{x}_m(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

номер k частотного каналу процесора з максимальним за амплітудою відкликом однозначно визначає частоту сигналу, тобто при вказаних умовах $m = k$.

Висновки

Застосування в спектроаналізаторах ДСФ потребує менших апаратних або програмних ресурсів у порівнянні з спектроаналізаторами в базисах ДЕФ або ДТФ, оскільки операції комплексного множення ірраціональних чисел у базисі ДЕФ або операції множення на цілочислові величини в базисі ДТФ зводяться в базисі ДСФ до простих операцій зсуву. Проте практичне використання базису ДСФ при $N \geq 16$ дуже сумнівне з таких причин. Розглянемо співвідношення (5). Мінімальне значення $A_{\min}$ модуля ФМ досягається при $k = l = n/8$, тобто

$$A_{\min} = \sqrt{2}/2^{N/8}.$$

У ліміті маємо

$$\lim_{N\to\infty} A_{\min} = 0.$$

Разом з $A_{\min}$ при $N \to \infty$ спадають до нуля модулі всіх інших ФМ, за винятком тих, які містяться на координатних вісях комплексної площини. А це означає, що яким би великим не був обсяг вибірки N дискретних сигналів, процесор ДТФ формує тільки чотири гармоніки на частотах

$$m = kN/4, \quad k = \overline{0{,}3}.$$

Інші гармоніки дорівнюють нулю або близькі до цього значення.

Базис ДСФ може статися більш потрібним в тих прикладах, форма яких близька до форми континуального базису степеневих функцій.

Список літератури

1. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.

2. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразование Уолша: Теория и применение. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1987. – 344 с.

3. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье. Уолша, Хаара и их применение в управлении. связи и других областях. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1989. – 496 с.

4. *Белецкий А.Я., Белецкий Е.А.* Синтез симметрических систем дискретных треугольных функций // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. – Д.: ДНУ, 2002. – Т.6. – С. 12–21.

Стаття надійшла до редакції 11.04.03.

А.Я. Белецкий, Е.А. Белецкий

Синтез симметрических систем дискретных степенных функций

Приведена методика формирования симметрических матриц, образующих системы базисных дискретных степенных функций, и рассмотрены особенности их применения в задачах спектрального анализа сигналов.

A.Y. Beletsky, E.A. Beletsky

Synthesis of symmetrical systems of discrete power functions

The procedure of building up symmetrical matrixes, which form systems of basis digital power functions, is worked out and some peculiarities of using them for the spectral analysis of signals are discussed.