УДК 519.81:621.372

[1]**В.Л. Баранов**, д-р техн. наук
[2]**І.А. Жуков**, д-р техн. наук
[3]**А.А. Засядько**, канд. техн. наук

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ГОЛОВНОГО КРИТЕРІЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

[1,2] Національний авіаційний університет
[3] Черкаський державний технологічний університет, sagita @ukr. net

Розглянуто результати теоретичних і числових досліджень, які показали подібність методу головного критерію і методу Тихонова при розв'язанні некоректних задач відновлення сигналів за властивостями: чутливість розв'язку до знаходження параметра регуляризації, стійкість до похибок вимірювання сигналу, збіжність обчислювального процесу. Перевага методу головного критерію над методом Тихонова полягає у відмінності знаходження параметра регуляризації.

Постановка проблеми

Важливим класом задач цифрової обробки сигналів є задача відновлення, коли необхідно за результатами експерименту відтворити початковий сигнал, спотворений вимірювальною апаратурою.

Проблема знаходження початкового сигналу полягає в тому, що інтегральне (або операторне) рівняння, яким зображується задача відновлення, є некоректним.

Аналіз публікацій

При розв'язанні інтегрального рівняння використовують методи Тихонова, Фрідмана, Іванова, Лаврентьєва, збудовані на введенні параметра регуляризації, метод перетворення Фур'є для різницевих ядер, метод власних функцій [1].

Головна проблема цих методів полягає в знаходженні оптимального параметра регуляризації, при якому отримується прийнятий розв'язок задачі відновлення сигналів.

Крім того, відомі методи регуляризації некоректних задач вимагають великого обсягу обчислень на ПЕОМ.

У роботі [2] розроблена модель методу головного критерію (МГК) для задачі відновлення сигналів і наведено результати моделювання на модельному прикладі.

Некоректність розглянутої задачі полягає в тому, що система лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), якою може бути ця задача – погано обумовлена.

Якщо вимірювальний сигнал заданий неточно, у такому разі проявляється інший вид некоректності за Адамаром, коли малим похибкам вихідного сигналу відповідають значні похибки вхідного сигналу.

Цю проблему і було досліджено.

Постановка задачі

Задача відновлення зображень і сигналів описується інтегральним рівнянням (ІР) Фредгольма першого роду [1; 3]:

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), x \in [c,d], s \in [a,b]. \qquad (1)$$

Розв'язати задачу відновлення сигналу для рівняння (1) означає знайти вигляд сигналу $y(s)$, спотвореного вимірювальною апаратурою з апаратною функцією $K(x,s)$ у сигнал $f(x)$. Після дискретизації рівняння (1) зводиться до СЛАР

$$Ay = f. \qquad (2)$$

Коли СЛАР (2) вироджена або погано обумовлена, то обернений оператор A^{-1} не існує або необмежений, а задача є некоректною. Це призводить до того, що розв'язок неєдиний чи нестійкий. Оскільки при розв'язанні рівняння (1) отримується множина розв'язків, то вибирається той з них, при якому похибка розв'язку (1) має вигляд

$$\delta_y = \frac{\left\|y_\alpha - \overline{y}\right\|_{L_2}}{\left\|\overline{y}\right\|_{L_2}} \to \min,$$

де $y_\alpha, \overline{y}$ – відповідно отриманий і точний розв'язок рівняння (1).

Теоретичні дослідження

Розглянемо вид некоректності, коли розв'язок чутливий до похибок правої частини рівнянь (1) або (2). Нехай рівняння $A_y=f$ замінене рівнянням $A_y=f_\delta$ так, що $\rho_f(f_\delta, f)\le\delta$.

Наближений розв'язок шукаємо в класі Q_δ елементів $y \in F$, для яких $\rho_f(A_y, f_\delta)\le\delta$. Для добору із широкої множини Q_δ можливих розв'язків Тихонов увів стабілізуючий функціонал $\Omega[y]$, визначений на підмножині $F_{1,\delta}=F_1 \cap Q_\delta$. При використанні такого варіаційного методу пошук регуляризованого наближеного розв'язку $Ay=f_\delta$ для задачі знаходження наближеного розв'язку y_δ полягає у визначенні елемента y_δ, мінімізуючого функціонал $\Omega[y]$ для

$$F_{1,\delta} = Q_\delta \cap F_1 = \{y,\ y \in F_1,\ \rho_f(Ay, f_\delta) \le \delta\}, \qquad (3)$$

де

$$Q_\delta = \{y,\ \rho_f(Ay, f_\delta) \le \delta\}.$$

Тоді задача нелінійного програмування (ЗНП) знаходження розв'язку для рівняння (3) за А.М.Тихоновим [3] набуває вигляду

$$\min_y \Omega[y] \ \text{при}\ |\rho_f| \le \delta. \qquad (4)$$

Розв'язувати ЗНП вигляду (4) у ряді випадків (наприклад, при великій розмірності) важко. Тому А.М.Тихонов заміняє ЗНП (4) варіаційною задачею з обмеженнями у вигляді рівностей

$$\rho_f(A_y, f_\delta)=\delta$$

і потім застосовує метод невизначених множників Лагранжа. Заміна $\min_y \Omega[y]$ при $|\rho_f|=\delta$ або $(|\rho_f|-\delta)^2=0$ утворює класичну задачу умовної оптимізації.

Отже, після застосування методу Лагранжа (4) ЗНП записується як

$$\min M^\alpha[y, f_\delta]=\rho_f^2(Ay, f_\delta) + \alpha_T\Omega[y], \qquad (5)$$

де α визначається за умови $\rho_f(Ay_\alpha, f_\delta)=\delta$. Тобто необхідно розв'язати параметричну задачу оптимізації, що супроводжується значними труднощами. Крім того, ставиться під сумнів знаходження оптимального параметра регуляризації, оскільки за визначенням у загальному випадку його потрібно шукати з нескінченною точністю на проміжку $0 \le \alpha \le 1$.

У роботі [4] розглянуто метод, що використовує багатокритеріальну оптимізацію для отримання стійкого розв'язку некоректної задачі (2). Багатокритеріальні задачі належать до класу задач, що важко розв'язувати, оскільки їхня обчислювальна складність лінійно залежить від розмірності векторного критерію і експоненціально від розмірності вектора шуканого розв'язку, однак у роботах [5; 6] доведено ефективність застосування багатокритеріальної оптимізації для широкого класу задач.

Зниження обчислювальної складності досягається за рахунок використання нелінійної схеми компромісів [1; 3] за допомогою спеціальної згортки частинних критеріїв у скалярний критерій.

У статтях [2; 4] розглянуті частинні критерії задачі (3) для використання багатокритеріальної оптимізації. Для некоректних задач роль стабілізуючого функціонала $\Omega[y]$ відіграє нормальний розв'язок

$$\min_y \| y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

введений А.М. Тихоновим [3].

Отже, перший критерій

$$I_1(y)=\Omega[y]$$

необхідно оптимізувати:

$$\min_y I_1 = \min_y \| y \|.$$

Другий критерій відповідає за мінімізацію відхилення отриманого розв'язку [2; 4]:

$$I_2(y)=|\rho_f| \le \delta > 0$$

або $I_2=\rho_f^2(Ay, f_\delta)$.

Зобразимо задачу мінімізації функціонала M^α у виразі (5) як задачу багатокритеріальної оптимізації векторного критерію $I(y)$, що складається з s частинних критеріїв $I_k(y)$:

$$I(y)=\{I_k(y)\}^s_{k=1} \subset F_1,\ s=2.$$

Сума $I_2+\alpha_T I_1$ утворить скалярний критерій

$$I(y, f_\delta)=M^\alpha[y, f_\delta].$$

Тоді вираз (5) запишемо як

$$\min_y I^T(y, f_\delta) = \alpha_T I_1 + I_2, \qquad (6)$$

що є лінійною згорткою або моделлю інтегральної оптимальності, яка реалізує метод Тихонова (МТ). Тут невідомий параметр регуляризації за Тихоновим α_T, і задача є параметричною. Це значить, що необхідно багаторазово розв'язувати ЗНП (6) для різних α_T і вибрати те, при якому відхилення $\varepsilon = \rho_f(Ay, f_\delta) = \min$.

На практиці часто використовують прийом, коли для оптимізації із сукупності I_k, $k \in [1,s]$ вибирають як критерій тільки один (наприклад, перший), а інші критерії переводять у розряд обмежень, тобто вихідну багатокритеріальну задачу штучно замінюють однокритеріальною з обмеженнями:

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} I_1(y),\ 0 \le I_{km},\ k \in [I, s]. \qquad (7)$$

Модель (7) реалізує метод головного критерію (МГК). Розв'язок y^* за такою схемою буде не оптимальним, тобто таким, що лежить поза областю Парето (далі – множина P). Хоча використання даного методу виправдано для оптимізації дуже складних систем, коли виконати навіть таке найпростіше узгодження суперечливих критеріїв удається далеко не просто, можна стверджувати, що некоректна задача також є складною системою [1; 3], і зведення багатокритеріальної оптимізації до однокритеріальної за формулою (7) буде доречним.

Запишемо формулу (7) для розв'язання рівнянь (1) або (2). Задача знаходження мінімального сумарного відхиленняення для розв'язку має вигляд

$$\min_{y} I_2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \tag{8}$$

за умови

$$0 \le I_2 \le I_{2\mathrm{m}} = n10^{-2l}$$

або

$$0 \le I_2 \le I_{2m} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = n\delta^2 ; \tag{9}$$

$$I^{*} \le I_1 \le I_{1\mathrm{m}} = R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i\max}^2} ;$$

$$I^{*} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2} , \tag{10}$$

де I – довжина розрядної сітки вихідних даних; n – кількість рівнянь; R – радіус сфери, у якій знаходиться розв'язок.

Проте на практиці задача ускладнюється тим, що невідомий радіус сфери, в якій знаходиться розв'язок, тобто невідомий $I_{2\mathrm{m}}$. Отже, на відміну від параметра регуляризації α_{T} для задачі (5) як параметри регуляризації для МГК (7)–(10) виступають обмеження на критерії $I_{k\mathrm{m}}$.

На відміну від МГК, в якого розв'язок не більше ніж задані граничні обмеження $I_{k\mathrm{m}}$, МТ завжди отримує відхилення на обмеженнях $\rho_f = \delta$. У найгіршому випадку МГК гарантує розв'язок, одержаний МТ.

Числовий експеримент

Порівняємо властивості регуляризації і збіжність МТ і МГК при числовому експерименті. Розглянемо модельний приклад, яким можна зобразити типову задачу відновлення сигналів:

$$K(x,s) = 0{,}18\ [\cos(3s - 3x) - 1{,}2\ (x - s)^2 + 3{,}4] ;$$

$$y(s) = \cos(2{,}5s)^2 - s^4 + 0{,}4 ;$$

$$s = x \in [-1;1] ; \tag{11}$$

$$f(x) = -0{,}26097\ x^2 + 0{,}48287\ \cos(x)^3 - $$
$$- 0{,}36215\ \cos(x) + 0{,}70475 .$$

Тут вузький вхідний сигнал $y(s)$ спотворений ядром в широкий вихідний сигнал $f(x)$.

Для дискретизації модельного приклада (11) використано квадратури (рис. 1). Розмірність отриманої СЛАР $n = 12$, обумовленість дискредитованого квадратурами ядра $\mathrm{cond}(K) = 1{,}6145 \cdot 10^{17}$.

Задача знаходження розв'язку $y(s)$ відомими методами розв'язання ІР (11) є коректною (не будемо враховувати некоректність приклада (11) через погану обумовленість СЛАР), оскільки $f(x)$ – відоме і є аналітичною функцією.

Помилки дискретизації можна звести до мінімуму, зображуючи дискретизовані значення ядра і правої частини в прикладі (11) дробами (наприклад, режим зображення чисел "Rational numeric format" середовища MatLab).

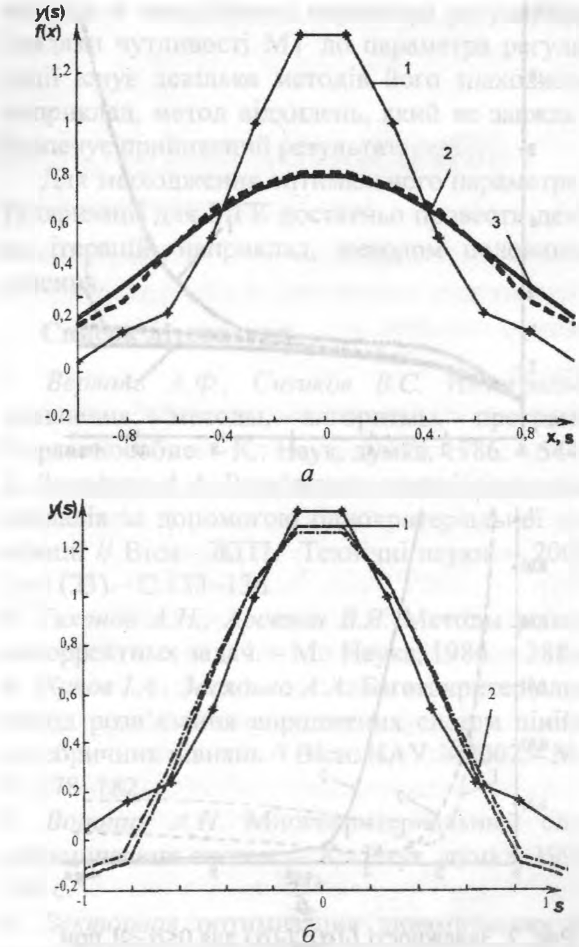


Рис. 1. Параметри модельного прикладу та його розв'язок МГК і МТ при оптимальних параметрах регуляризації для δ=0,12:
а: *1* – $y(s)$; *2* – $f(x)$ для δ = 0,12; *3* – $f(x)$ для δ = 0;
б: *1* – $y_{\mathrm{V}}(s)$; *2* – $y_{\mathrm{T}}(s)$

Перетворимо коректну задачу (11) в некоректну. Замінимо праву частину на апроксимуючу функцію f_a^1, задану таблично (у процесі проведення експерименту вимірювальний сигнал задається таблично), так, що

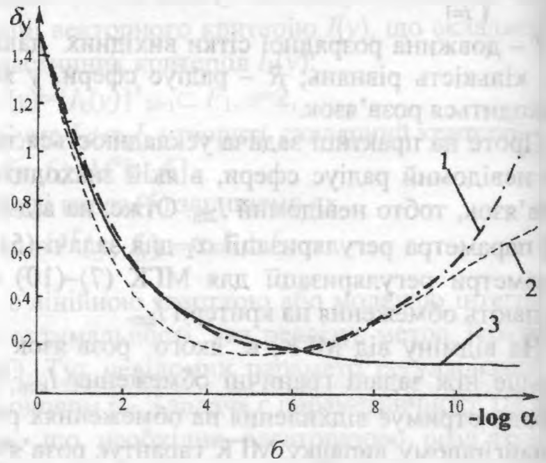
$$\| f - f_a^1 \| = \delta_{f1} = 0{,}097,$$

$$\| f - f_a^2 \| = \delta_{f2} = 0{,}11 .$$

Розв'язуючи при певних δ_f, отримуємо похибки розв'язку δ_y.

Результати розв'язання приклада (11) при різних похибках правої частини для МТ і МГК наведено на рис. 1–3 і в таблиці.

Спочатку розглянемо вплив параметрів регуляризації для МТ і МГК для δ_f=0 (рис. 2, 3). У порівнянні з розв'язками $y_{\mathrm{T}}(s)$ безумовної задачі МТ для МГК розв'язки $y_{\mathrm{V}}(s)$ практично не змінюються для заданого рівня відхилення $I_{2\mathrm{m}} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$. Тобто можна стверджувати, що чис-



б

$, I_{2m}$
0,1
I_2, I_{2m}
0,01

відхиленні I_{1m} і I_{2m}. Проте I_{2m} вибирається за заданими похибками вимірювання сигналу δ_f. Головна задача при застосуванні МГК – завдання обмежень по нормі I_{1m} на межі зриву стійкості, при якому I_2=min, тобто, коли I_{1m} наближається до норми точного розв'язку або своєї нижньої межі, як показано в таблиці і на рис. 2, 3. Опорне значення I_{1m} легко знаходиться: сумою квадратів максимальних обмежень фізичних змінних (по технічному завданню). Це число треба змінювати до зриву стійкості, виконуючи декілька ітерацій. Для цього можна використовувати метод половинного ділення. Можна стверджувати, що МГК – грубий до завдання критерію I_{1m} (межу I_{1m} можна змінювати декілька разів), який є параметром регуляризації за аналогією з α_T у МТ, у той час, як МТ – чутливий до завдання α_T.

Висновки

При розв'язанні некоректної задачі відновлення сигналів використовували МГК і МТ і досліджували такі властивості: чутливість розв'язку до знаходженню параметра регуляризації, стійкість до похибок вимірювання сигналу (похибки правої частини СЛАР або ІР), збіжність обчислювального процесу на всьому діапазоні існування параметра регуляризації.

Наведені результати теоретичних і числових досліджень показали подібність МГК і МТ по цим властивостям при похибках правої частини СЛАР або ІР. Принципова відмінність МТ і МГК полягає в знаходженні параметра регуляризації. Завдяки чутливості МТ до параметра регуляризації існує декілька методів його знаходження, наприклад, метод відхилень, який не завжди забезпечує прийнятний результат.

Для знаходження оптимального параметра регуляризації для МГК достатньо провести декілька ітерацій, наприклад, методом половинного ділення.

Список літератури

1. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справ. пособие. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.

2. *Засядько А.А.* Розв'язання задачі відновлення сигналів за допомогою однокритеріальної оптимізації // Вісн. ЖІТІ. Технічні науки. – 2002. – № 4 (23).– С.133–136.

3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

4. *Жуков І.А., Засядько А.А.* Багатокритеріальний метод розв'язання вироджених систем лінійних алгебричних рівнянь // Вісн. НАУ. – 2002.– № 3.– С. 178–182.

5. *Воронин А.Н.* Многокритериальный синтез динамических систем. – К.: Наук. думка, 1992. – 160 с.

6. *Векторная* оптимизация динамических систем /А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, О.И. Козлов, В.С. Чабанюк / Под ред. А.Н. Воронина. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.

Стаття надійшла до редакції 25.04.03.

В.Л. Баранов, И.А. Жуков, А.А. Засядько

Использование метода главного критерия для решения задачи восстановления сигналов

Рассмотрены результаты теоретических и численных исследований, которые показали подобие метода главного критерия и метода Тихонова при решении некорректных задач восстановления сигналов по следующим свойствам: чувствительности решения к нахождению параметра регуляризации, устойчивости к погрешностям измерения сигнала, сходимости вычислительного процесса. Преимущество метода главного критерия над методом Тихонова состоит в простоте нахождения параметра регуляризации.

V.L. Baranov, I.A. Zhukov, A.A. Zasyad'ko

Utilization of the major criterion's method for solving of the signal restoring problem

Theoretical and practical researches which are presented in this work have shown the similarity of the major criterion method to the Tikhonov's method in solving ill-prosed problems of the signals regeneration by properties. The main features are: the sensitivity of solution to finding regularization parameter, stability to signals measurement errors, convergence of the calculations process. The advantage of the major criterion method over the Tikhonov's method is in simple finding regularization's parameter.