

## ІНФОРМАЦІЙНО-ДІАГНОСТИЧНІ СИСТЕМИ

УДК 621.317

28113

В.П. Бабак, чл.-кор. НАН України  
Ю.В. Куд, канд. техн. наукМЕТОД ОДНОЗНАЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ  
ВЕЛИКИХ ФАЗОВИХ ЗСУВІВ СИГНАЛІВ

Національний авіаційний університет, iidsu@ukrpost.net

Обґрунтовано використання багаточастотного методу усунення неоднозначності при вимірюванні великих фазових зсувів із застосуванням методів теорії чисел. Наведено умови, які дають можливість звести задачу усунення неоднозначності до задачі відновлення цілого числа, зображеного лишком за певною системою модулів, і здійснити контроль правильності розв'язку задачі багатозначності.

## Вступ

Фазові методи вимірювання широко застосовуються в науці і техніці, зокрема, у машинобудуванні, геодезії, навігації, оптиці, радіотехніці та інших галузях для вимірювання різних фізичних величин – відстаней, переміщення, часової затримки в разі розповсюдження сигналів у певному середовищі тощо. При цьому фазовий зсув  $\varphi \in [0, 2\pi)$  між сигналами пов'язаний із фізичною величиною  $g$  певною функціональною залежністю  $\varphi = f(g)$ . Наприклад, під час вимірювання відстані  $D$  і розповсюдження синусоїдального сигналу з частотою  $f$  вздовж цієї відстані в прямому і зворотному напрямках,

$$\varphi(D) = \frac{2Df}{v} 2\pi = \frac{2D}{\lambda} 2\pi;$$

$$D \in \left[0, \frac{\lambda}{2}\right), \varphi \in [0, 2\pi),$$

де  $v, \lambda$  – відповідно швидкість розповсюдження сигналу та довжина хвилі.

Розширення діапазону вимірюваної відстані  $D > \frac{\lambda}{2}$  при збереженні розрізняльної здатності вимагає збільшення діапазону однозначного вимірювання фазових зсувів сигналів за межі інтервалу  $[0, 2\pi)$ , тобто вимірювання фазових зсувів виду  $\Phi = 2\pi n + \varphi$ , де  $n$  – ціле число,  $n \in N$ . Одним із відомих способів усунення неоднозначності, тобто визначення  $n$ , є багаточастотний спосіб [1; 2], який передбачає вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів на  $m$  частотах  $f_1, \dots, f_m$ , формування множини вимірних значень фазових зсувів  $\{\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m\}$ ,  $\hat{\varphi}_i < 2\pi$ , обчислення за цими даними оцінки  $\hat{n}$ .

Визначення  $\hat{n}$  можливе за умови формування однозначного результату хоча б на одній із робочих частот, наприклад, на низькій частоті  $f_1$ , для якої виконується умова  $D_{\max} < \lambda_1$ , де  $\lambda_1$  – довжина хвилі на низькій частоті (сигнал із цією частотою може бути реалізованим фізично або бути утвореним штучно для сигналів різницевої частоти, наприклад,  $f_i - f_{i-1}$ ). Застосування такого способу забезпечує високу точність, яка властива фазовим вимірюванням із малою довжиною хвилі, і широкий діапазон вимірювання з великою довжиною хвилі. Сутність багаточастотного методу полягає в тому, що через допоміжне вимірювання фазового зсуву на низькій частоті  $f_1$  визначається оцінка числа повних фазових циклів  $2\pi$ , що міститься у фазовому зсуві сигналів високої частоти  $f_m > f_1$ :

$$\hat{n} = \left[ \frac{f_m \hat{\varphi}_1}{f_1 2\pi} - \frac{\hat{\varphi}_m}{2\pi} + 0,5 \right]^+,$$

де  $[\cdot]^+$  – операція виділення цілої частини числа.

Процес розв'язку задачі неоднозначності вимірювання фазових зсувів можна проілюструвати рис. 1.

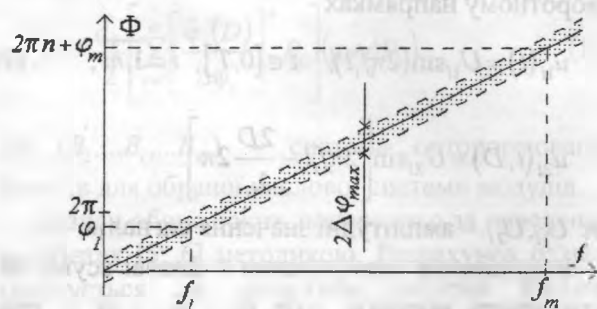


Рис. 1. Розв'язок задачі багатозначності вимірювання фазових зсувів

Результати фазових вимірювань з урахуванням дії завад і шумів спотворені похибками вимірювання  $\pm\Delta\phi$  (на рис. 1 позначено максимальне значення похибки  $\Delta\phi_{\max}$ ) і мають випадковий характер. Тому у разі визначення  $\hat{n}$  завжди існує ймовірність отримання помилки під час розв'язання задачі фазової неоднозначності. Умова, за якою розв'язок задачі неоднозначності здійснюється без помилок, має вигляд

$$\left[ \frac{\Delta\phi_1 f_m}{2\pi f_1} - \frac{\Delta\phi_m}{2\pi} + 0,5 \right]^+ = 0, \quad (1)$$

де  $\Delta\phi_1, \Delta\phi_m$  – похибки вимірювання фазових зсувів відповідно на низькій і високій частотах.

Збільшення різниці між значеннями частот збільшує ризик порушення умови (1), отже, збільшує ризик отримання результату з грубими помилками визначення  $n$ . Тому під час визначення великих значень  $\Phi$  виникає необхідність вимірювання фазових зсувів на проміжних частотах  $f_i, f_1 < f_i < f_m$  і послідовного перерахунку результатів вимірювань однієї частоти на іншу (від меншої частоти до більшої чи навпаки [2]). Але цей спосіб не виключає можливості появи грубих помилок у разі визначення  $n$ .

Мета роботи – підвищення вірогідності безпомилкового розв'язку задачі неоднозначності під час застосування багаточастотного методу усунення неоднозначності вимірювання фазових зсувів, що перевищують  $2\pi$ .

### Постановка задачі

Необхідно визначити фіксоване значення відстані в інтервалі  $D \in (0, D_{\max})$  незмінної на інтервалі часу спостереження  $T$  з дискретним кроком  $d_0$ . Вимірювання здійснюється фазовим багаточастотним методом на  $m$  частотах  $\{f_i, i = \overline{1, m}\}$  із довжинами хвиль  $\lambda_i < D_{\max}$ . На кожній частоті спостерігається пара гармонічних сигналів, різниця фаз між якими утворена при розповсюдженні коливання вздовж відстані  $D$  в прямому і зворотному напрямках

$$u_{1i}(t) = U_{1i} \sin(2\pi f_i t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, m}; \quad (2)$$

$$u_{2i}(t, D) = U_{2i} \sin \left[ 2\pi f_i t - \frac{2D}{\lambda_i} 2\pi \right].$$

де  $U_{1i}, U_{2i}$  – амплітудні значення сигналів.

Результатом вимірювання є фазові зсуви, які утворюють вектор  $\overline{\phi}_m = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_i, \dots, \hat{\phi}_m)$ , причому  $\hat{\phi}_i < 2\pi, i = \overline{1, m}$ .

### Розв'язок

Оскільки фазовий зсув  $\hat{\phi}_i(D)$  між сигналами (2) однозначно визначається лише в межах інтервалу  $[0, 2\pi)$ , для  $i$ -го фазового зсуву є таке рівняння:

$$\hat{\phi}_i(D) \equiv \frac{2D}{\lambda_i} 2\pi \pmod{2\pi}, \quad (3)$$

тобто величини  $\hat{\phi}_i(D)$  та  $\frac{2D}{\lambda_i} 2\pi$  порівнювані за модулем  $2\pi$ . Це означає, що величини мають однакові остачі при діленні на  $2\pi$ . Отже вимірювання фазового зсуву між сигналами (2) на одній частоті  $f_i$  дозволяє визначити лише лишок числа  $\frac{2D}{\lambda_i} 2\pi$  за модулем  $2\pi$ .

Згідно з теорією чисел відома така властивість порівнянь двох чисел: обидві частини порівняння і модуль можна домножувати на те саме ціле число [3]. Неважко впевнитись у тому, що ця властивість виконується і у випадку множення на довільне дійсне число. Нехай виконується рівняння

$$a \equiv b \pmod{p}, \quad (4)$$

де  $a, b, p$  – цілі числа.

Вираз (4) можна записати так:

$$a = b + kp, \quad (5)$$

де  $k$  – ціле число у теорії чисел  $k$  має назву неповної частини.

Множимо ліву і праву частини рівняння (5) на довільне дійсне число  $\beta$

$$a\beta = b\beta + kp\beta. \quad (6)$$

З урахуванням того, що  $a\beta < p\beta, b\beta < p\beta$  з рівності (6) можна скласти рівняння

$$a\beta \equiv b\beta \pmod{p\beta},$$

що і доводить указану властивість.

Множимо рівняння (3) на  $\frac{p_i}{2\pi}$

$$\frac{\hat{\phi}_i(D)}{2\pi} p_i \equiv \frac{2D}{\lambda_i} p_i \pmod{p_i}, \quad (7)$$

де  $p_i$  – ціле число.

Аналогічні рівняння можна ввести для фазових зсувів сигналів для кожної  $i$ -ї ( $i = \overline{1, m}$ ) частоти. Відповідно до робіт [4; 5] виберемо значення довжини хвиль на всіх  $m$  частотах кратними взаємно простим числам  $p_i, i = \overline{1, m}$ , тобто

$$\lambda_i = p_i d_0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Цим довжинам хвиль відповідають частоти

$$f_i = \frac{v}{p_i d_0}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

Множина сигналів з частотами (9) є множиною з ортогональними компонентами на часовому інтервалі

$$T_{\text{орт}} = \frac{d_0}{v} \prod_{i=1}^m p_i,$$

що дозволяє виконувати фазові вимірювання як послідовно в часі, так і одночасно на всіх частотах, тобто застосовувати як вимірювальний полігармонічний сигнал, що зображається сумою гармонічних складових із частотами (9).

Виберемо також дискретний крок вимірювання фазових зсувів сигналів (2), які розповсюджуються вздовж вимірюваної відстані  $D$ , обернено пропорційними числам  $p_i$ :

$$\Delta\varphi_i = \frac{2\pi}{p_i}. \quad (10)$$

З урахуванням умов (8), (10) і рівняння (7) можна записати

$$\frac{\hat{\varphi}_i(D)}{\Delta\varphi_i} \equiv \frac{2D}{d_0} \pmod{p_i}.$$

Результат вимірювання фазового зсуву з точністю до  $\pm 0,5\Delta\varphi_i$  можна зобразити як

$$\varphi_i(D) = \alpha_i(D)\Delta\varphi_i,$$

де ціле число  $\alpha_i(D) \in [0, p_i)$  знаходять як

$$\alpha_i(D) = \left[ \frac{\hat{\varphi}_i(D)}{\Delta\varphi_i} \right]^+, \quad (11)$$

З точністю до  $\pm 0,5d_0$  вимірювану відстань можна зобразити як

$$D = A(D) \frac{d_0}{2},$$

де ціле число  $A(D)$  є функцією відстані  $D$ :

$$A(D) = \left[ \frac{2D}{d_0} \right]^+.$$

З урахуванням таких припущень та формули (11) для всіх  $i = \overline{1, m}$  частот можна скласти систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1(D) \equiv A(D) \pmod{p_1}; \\ \dots \\ \alpha_i(D) \equiv A(D) \pmod{p_i}; \\ \dots \\ \alpha_m(D) \equiv A(D) \pmod{p_m}. \end{cases} \quad (12)$$

Праві частини рівнянь (12) уявляють число  $A(D)$ , що дорівнює кількості відрізків  $0,5d_0$ , яка вкладається на вимірюваній відстані, а ліві частини – лишки цього числа за модулями  $p_i, i = \overline{1, m}$ . Отже, накладені на вибір частот та дискретність вимірювання фазових зсувів початкові умови (9) та (10) дозволяють зобразити числовий результат вимірювання  $A(D)$  лишками цього числа за системою модулів  $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_m)$  тобто зобразити число  $A(D)$  у системі залишкових класів (СЗК) і звести задачу розв'язку неоднозначності фазових вимірювань до задачі відновлення в позиційній системі цілого числа

$$A(D) = (a_1(D), \dots, a_i(D), \dots, a_m(D)).$$

Процес утворення лишків  $a_i(D)$  для вимірювальних сигналів на різних частотах ілюстровано на рис. 2.

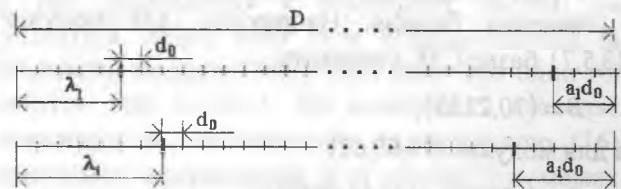


Рис. 2. Утворення лишків  $a_i(D)$

Для однозначного відновлення числа  $A$  в позиційній системі числення необхідно виконання таких умов [5]:

- модулі системи  $p_i, i = \overline{1, m}$  - взаємно прості числа;
- максимальне відновлюване число

$$A_{\text{max}} = P_p - 1 = \prod_{i=1}^m p_i - 1.$$

Ці умови забезпечуються відповідним вибором значень модулів  $p_i$  та їх кількості  $m$ . При належному виборі  $p_i$  та  $m$  результат вимірювання відстані обчислюють як

$$D = \frac{d_0}{2} \left[ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\hat{\varphi}_i(D)}{\Delta\varphi_i} \right]^+ B_i \right] \pmod{P_p}. \quad (13)$$

де  $(B_1, \dots, B_i, \dots, B_m)$  - система ортонормованих базисів для обраної числової системи модулів.

Базиси обчислюють попередньо за наведеною в роботах [5; 6] методикою. Розрахунок базисів ґрунтується на розв'язку системи рівнянь. Наведену програму розрахунку ортонормованих базисів, складено в системі MatLab:

```

function B=bszk(P)
%P- вектор модулів СЗК
%B- вектор ортонормованих
базисів СЗК
N=length(P);
PP=prod(P);
for l=1:N
    p=P(l);
    d=mod(PP/p,p);
    m=1;
    while mod(m*d,p)~=1
        m=m+1;
    end
    B(l)=m*PP/p;
end
if y~=1
    B(1:N)=NaN;
    sprintf('%s', 'ПОМИЛКА!!!!')
end

```

У разі збільшення значень модулів зростають і значення базисів. Наприклад, для модулів (3,5,7) базис СЗК становить

$$B = (70, 21, 15),$$

а для модулів (59,60,61)

$$B = (109800, 212341, 109740).$$

У виразі (13) останній множник являє собою фазовий зсув сигналу  $i$ -ї частоти, поділений на  $\Delta\phi_i$ :

$$\left[ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\hat{\phi}_i(D)}{\Delta\phi_i} \right]^+ B_i \right] (\text{mod } P_p) = \left[ \frac{\hat{\Phi}_i(D)}{\Delta\phi_i} \right]^+ = \left[ \frac{2\pi n_i(D) + \hat{\phi}_i(D)}{\Delta\phi_i} \right]^+.$$

Отже, у запропонованому способі вимірювання на відміну від відомих не виконуються додаткові операції, спрямовані на визначення числа цілих фазових циклів. Виміряне значення  $\hat{\Phi}_i$ , яке містить кількість цілих фазових циклів і фазовий зсув у інтервалі  $[0, 2\pi)$ , знаходять за результатами одночасної обробки результатів вимірювань фазових зсувів на всіх частотах. Тобто кожне зі значень множини  $\{\hat{\phi}_i, i = \overline{1, m}\}$  має інформацію і про  $n_i$ , і про  $\phi_i$ .

Фазові зсуви  $\phi_i, (i = \overline{1, m})$  внаслідок дії шумів і завад та скінченної точності апаратних засобів вимірювання визначаються з похибками. Розрахунки підтверджують той факт, що при збільшенні значень похибок вимірювань збільшується ймовірність виникнення помилок у визначенні лишків (11), і, як наслідок, грубих

помилку у разі розв'язання неоднозначності і визначенні відстані (13). У той же час запропонована організація вимірювального процесу при визначенні відстаней (затримок, великих фазових зсувів) на відміну від усіх відомих дозволяє здійснити контроль та корекцію правильності розв'язку задачі неоднозначності. Такий контроль може бути виконаний шляхом здійснення допоміжного вимірювання на додатковій частоті  $\omega_{j+1}$  (одній чи декількох) і визначення додаткового контрольного лишку  $a_{i+1}$  (чи декількох лишків). Теоретичним обґрунтуванням такої перевірки є теорема наведена в роботі [6].

Доповнимо систему модулів  $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_m)$  додатковим модулем  $p_{m+1} > p_i, i \in [1, m]$  взаємно простим із довільним модулем  $p_i, i \in [1, m]$ . Надалі інтервал зображення чисел  $[0, P_p)$ , обмежений значенням  $P_p = \prod_{i=1}^m p_i$ , будемо називати робочим діапазоном, цілі числа з інтервалу  $[0, P_p)$  – правильними числами, інтервал  $[0, P_n)$ , обмежений значенням  $P_n = \prod_{i=1}^{m+1} p_i$ , – повним діапазоном, цілі числа з інтервалу  $[P_p, P_n)$  – неправильними. Використавши теоретичні положення роботи [6] доведемо теорему.

#### Теорема

Нехай модулі системи залишкових класів

$$p_1, p_2, \dots, p_m, p_{m+1} \quad (14)$$

є взаємно простими числами і задовольняють умови

$$p_i < p_{m+1}, i \in (1, m). \quad (15)$$

Нехай  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$  – правильне число. Тоді число  $\tilde{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \tilde{\alpha}_k \neq \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$  є неправильним.

Доведення. Оскільки число  $A$  правильне, то

$$A(\text{mod } P_n) < P_p = \frac{P_n}{p_{m+1}}.$$

Оскільки в числі  $\tilde{A}$  в системі залишкових класів спотворено лише один  $k$ -й лишок, а решта лишків залишилась незмінною, то в позиційній системі числення число  $\tilde{A}$  є сумою числа  $A$  і такого цілого числа, яке ділиться без остачі на всі модулі  $p_1, \dots, p_{m+1}$  за винятком модуля  $p_k$ , ділення на який дає остачу  $\alpha \in [0, p_k)$ . З урахуванням того, що всі модулі є взаємно простими числами, маємо

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= (A + p_1 p_2 \dots (p_k + \alpha) \dots p_{m+1}) \pmod{P_n} = \\ &= \left( A + \alpha \frac{P_n}{p_k} \right) \pmod{P_n}. \end{aligned}$$

Покажемо, що  $\tilde{A} < P_n$ . Найскладніше виконати цю умову для максимального значення лишку  $\alpha = p_k - 1$ . У цьому випадку з урахуванням нерівності (15) маємо

$$A + P_n \left( \frac{p_k - 1}{p_k} \right) < \frac{P_n}{p_{m+1}} + P_n - \frac{P_n}{p_k} < P_n.$$

Тепер покажемо, що  $\tilde{A} > P_p$ . Для цього достатньо показати, що ця нерівність виконується при мінімальному значенні правильного числа, тобто при  $A = 0$ :

$$P_n \frac{\alpha}{p_k} = P_p \alpha \frac{p_{m+1}}{p_k} > P_p.$$

Отже доведено, що неправильне число  $\tilde{A}$  належить інтервалу  $[P_p, P_n)$ .

Таким чином, довільне спотворення одного з лишків, якими є число  $A < P_p$  в СЗК переводить його при відновленні в позиційній системі в інтервал  $[P_p, P_n)$ . З цієї теореми витікає важливий практичний наслідок: існує лише одне єдине значення лишку  $\alpha_k$ , яке повертає відновлене в позиційній системі число  $A$  в робочий діапазон  $[0, P_p)$ . Процес переходу в повний діапазон неправильного числа при спотворенні одного лишку і повернення числа в робочий діапазон після виправлення лишку показано на рис. 3.

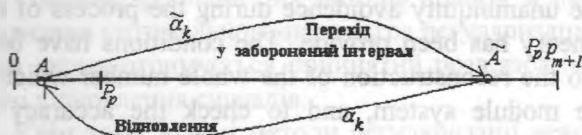


Рис. 3. Процес спотворення і відновлення правильного числа

Зазначена теорема дає теоретичне обґрунтування для побудови багаточастотних фазових вимірювальних систем із виявленням і виправленням помилок у разі розв'язання задачі неоднозначності фазових вимірювань. Критерієм правильного розв'язання задачі неоднозначності є виконання умови

$$A = \left[ \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i B_i \right] \pmod{P_n} < P_p, \quad (16)$$

тобто належність обчисленого значення числа  $A$  робочому діапазону  $[0, P_p)$ . Невиконання цієї умови свідчить про наявність помилки в одному чи декількох лишках.

Найпростішим способом виправлення спотвореного лишку є перебір всіх можливих значень лишків. Зауважимо, що кількість всіх можливих

переворів становить  $\sum_{i=1}^{m+1} p_i - m$  і є незрівнянно меншою за загальну кількість можливих значень

$A$ , яка дорівнює  $\prod_{i=1}^m p_i - 1$ . Якщо припустити,

що помилка при обчисленні  $k$ -го лишку становить  $\pm 1$ , то кількість можливих переворів зменшується до  $2(m+1)$ .

Пошук і відновлення правильного числа  $A$  з неправильного числа  $\tilde{A}$  можна значно спростити, якщо виявити спотворений лишок. З роботи [6] відомо, що зображене в СЗК за системою модулів (14) правильне число

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$$

у разі відновлення в позиційній системі не зміниться, якщо воно буде відновлюватися за системою модулів (14), з якої вилучено один  $i$ -й модуль при  $i < m+1$ . Ця властивість дозволяє максимум за  $m$  обрахунків за формулою (16) визначити спотворений  $k$ -й лишок і в межах цього лишку за  $p_k - 1$  кроків виправити помилку шляхом перебору усіх значень лишку за  $k$ -м модулем. Зауважимо, що кожній модифікованій системі модулів

$$(p_2, p_3, \dots, p_{m+1}), (p_1, p_3, \dots, p_{m+1}), (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

відповідає певна система ортонормованих базисів, яка обчислюється і задається попередньо на етапі розробки вимірювальної системи.

Указаний спосіб фазових вимірювань дозволяє суттєво підвищити вірогідність правильного розв'язку задачі неоднозначності фазових вимірювань.

За даними роботи [6], введення лише одного контрольного модуля дозволяє виявити довільну помилку в одному розряді наведеного в СЗК числа і 95% помилок, які одночасно виникають у двох розрядах.

При збільшенні кількості контрольних модулів (кількості частот) значною мірою підвищується вірогідність правильного розв'язку задачі багатозначності і визначення великих фазових зсувів при виконанні багаточастотних фазових вимірювань. Але таке введення додаткових модулів приведе до значного збільшення часу вимірювання, додаткових енергетичних витрат і може бути виправдано лише при проведенні найбільш відповідальних вимірювальних експериментів.

### Висновки

Під час використання багаточастотного методу визначення багатозначності фазових вимірювань відповідний вибір частот та кроків квантування фазових зсувів дозволяє звести задачу вимірювання великих фазових зсувів до задачі відновлення цілих чисел, заданих у СЗК.

Зображення результатів багаточастотних фазових вимірювань в СЗК дозволяє підвищити вірогідність правильного розв'язку задачі неоднозначності шляхом проведення додаткових фазових вимірювань на одній чи декількох допоміжних частотах, реалізації контролю правильності розв'язку задачі неоднозначності, пошуку помилкових значень лишків (помилкових результатів вимірювань фазових зсувів на окремих частотах) і їх виправлення.

Використання запропонованого способу вимірювання та обробки найбільш доцільно у фазових вимірювальних системах, які призначені для вимірювання фазових зсувів гармонічних сигналів, що значно перевищують  $2\pi$  при співвідношенні сигнал/шум, яке наближається до одиниці.

В.П. Бабак, Ю.В. Куц

Метод однозначного определения больших фазовых сдвигов сигналов

Обосновано использование многочастотного метода устранения неоднозначности при измерении больших фазовых сдвигов с применением методов теории чисел. Приведены условия, позволяющие свести задачу устранения неоднозначности к задаче восстановления целых чисел, представленных остатками по выбранной системе модулей, и выполнить контроль правильности решения задачи многозначности.

V. P. Babak, U.V. Kuts

Method of big phase shift unambiguity determination

The application of the multifrequency method of the unambiguity avoidance during the process of big phase shift measuring on the basis of the numerical theory has been provide. The conditions have been discussed to bring the task of unambiguity avoidance to the reconstruction of the whole number which is presented by its deduction according to the definite module system, and to check the accuracy of unambiguity avoidance.

### Список літератури

1. Кинкулькин И.Е., Рубцов В.Д., Фабрик М.А. Фазовый метод определения координат. – М.: Сов. радио, 1979. – 280 с.
2. Маевский С.М., Баженев В.Г., Батуревич Е.К., Куц Ю.В. Применение методов фазометрии для прецизионного измерения расстояний. – К.: Вища шк., 1983. – 84 с.
3. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
4. Бабак В.П., Куц Ю.В. Застосування алгебри залишкових числових класів у задачах фазових вимірювань // Матеріали IV Міжнар. наук.-техн. конф. "Авіа-2002". 23–25 квіт. 2002 р. Т. 1. Інформаційно-діагностичні системи. Секція Інформаційно-вимірювальні системи. – С.11.1–11.4.
5. Куц Ю.В. Вимірювання кумулятивних фазових зсувів // Технічна електродинаміка. – 2001. – №5. – С. 67–72.
6. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. – М.: Сов. радио, 1968. – 438 с.

Стаття надійшла до редакції 24. 03.03.