ББК О58Ф.3-4-5-Ф5 8661.3
УДК 656.7.052.001.57(045)

Е.В. Коба

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СЛОЖНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Рассмотрена задача моделирования сложной системы с входящим потоком сложных заявок. Разработан ускоренный алгоритм нахождения вероятности перекрытия сложных заявок. Аналитически выведены верхняя и нижняя оценки функции ущерба, которая связана с перекрытием сложных случайных заявок. Отмечена связь с задачами моделирования в системах управления воздушным движением.

Одной из важнейших характеристик технических систем обслуживания и, в частности, автоматизированных систем управления воздушным движением (АС УВД) является их пропускная способность. В гражданской авиации под пропусной способностью понимают максимально возможные интенсивности потоков воздушных судов (ВС), при которых обеспечиваются нормативные требования к безопасности полетов.

В простейшей постановке задача о пропускной способности системы формулируется как некоторая задача теории массового обслуживания (ТМО). Поток обьектов, который обслуживается, схематизируется как поток однородных событий. Определяются такие основные понятия, как канал обслуживания, время обслуживания, дисциплина ожидания и обслуживания, критерий качества обслуживания (допустимое время ожидания, допустимая вероятность потери требования и т.п.). Затем находится связь между параметрами системы и значением критерия в зависимости от интенсивности потока.

Однако в системах УВД каждая заявка, в отличие от классической ТМО, имеет сложный характер, поскольку состоит из отдельных частей, каждая из которых требует соответствующего обслуживания. Такая множественность обслуживания заявок характерна для процессов обслуживания в системах УВД за счет прерывности снятия информации с бортов самолетов.

В данном случае результаты ТМО [1], недостаточно адекватно отображают реальные процессы, поэтому применяются методы статистического моделирования. Однако процесс моделирования такой системы намного сложнее, чем в случае одиночных заявок [2]. Поэтому возникает задача замены системы со сложными заявками, эквивалентной в смысле того или другого критерия, системой одиночных заявок. В случае, когда эквивалентная замена невозможна, возникает необходимость в разработке удобного математического вероятностного аппарата описания и анализа системы массового обслуживания (СМО) с множественными заявками, а также поиск возможного упрощения формул и статистических моделей для характеристик качества обслуживания при сравнительно малых (что характерно для процессов в УВД) вероятностях перекрытия заявок.

Приведем алгоритм для аналитико-статистической оценки вероятности и средних значений, связанных с пересечением сложных случайных заявок (множеств). Алгоритм разработан автором и основан на "протяжке" одного множества через другое и автоматизации расчета лебеговой меры множества сдвигов, при которых имеет место пересечение. Благодаря разработанному алгоритму нет необходимости длительное время моделировать весь поток входящих заявок, чтобы получить показатели эффективности функционирования системы. Достаточно смоделировать две, в крайнем случае, три заявки.

Сформулируем задачу. Пусть имеется пуассоновский поток однородных событий-заявок. С каждой заявкой возникает случайная величина импульсов (сигналов). Множества импульсов различных заявок независимы. Возможные информационные потери вследствие перекрытия (пересечения) заявок формализуются понятием ущерба f. Ущерб данной заявке, – в общем случае, случайная величина, которая зависит от количества остальных заявок, что пересекаются с ней, и параметров их взаимного размещения. Поставим вопрос о математическом ожидании величины ущерба в расчете на одну заявку.

Пусть задано два числовых множества:

$$U = \bigcup_{i=1}^{\nu}(a_i, b_i) \quad \text{и} \quad V = \bigcup_{k=1}^{\mu}(c_k, d_k),$$

где $0 = a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < b_\nu$, $0 = c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \ldots < d_\mu$, ν, μ – натуральные числа. Интервалом пересечения (и.п) множеств U и V назовем множество тех чисел τ любого знака, для которых множество U имеет хотя бы одну точку пересечения с множеством $V + \tau = \bigcup_{k=1}^{\mu}(c + \tau, d + \tau)$.

Алгоритм вычисления меры T_{UV} интервала пересечения состоит в следующем. Обозначим:

$$(\text{и.п}) = \bigcup_{i=1}^{\nu}\bigcup_{k=1}^{\mu}\bigcup_{\tau}\{\tau : (a_i, b_i)\bigcap(c_k + \tau, d_k + \tau) \neq \text{Ш} \}.$$

Рассмотрим любые заданные i и k. .Определим τ, для которых

$$(a_i, b_i)\bigcap(c_k + \tau, d_k + \tau) \neq \text{Ш}.$$

Наименьшим значением τ является то, при котором $(c_k + \tau, d_k + \tau)$ примыкает к (a_i, b_i) слева, наибольшим – справа. Тогда имеем $d_k + \tau = a_i$ и $c_k + \tau = b_i$. Таким образом, τ должно входить в интервал $W_{ik} = (a_i - d_k, b_i - c_k)$. Длина такого интервала для τ

$$T_{ik} = (b_i - a_i) + (d_k - c_k). \tag{1}$$

Суммируя (1) по всем i и k, получим:

$$T_{UV} \le \mu\sum_{i=1}^{\nu}(b_i - a_i) + \nu\sum_{k=1}^{\mu}(d_k - c_k) \quad . \tag{2}$$

Если лебегову меру множества обозначить $|\ |$, то выражение можно переписать так:

$$T_{UV} \le \mu|U| + \nu|V| \tag{3}$$

Во многих случаях оценка (3) либо абсолютно точна, либо имеет малую относительную погрешность. Поэтому приведем алгоритм точного расчета значения T_{UV}.

Положим

$$\tau_{ik} = a_i - d_k,\ \tau'_{ik} = b_i - c_k. \tag{4}$$

Рассмотрим множество

$$S = \bigcup_{i=1}^{\nu}\bigcup_{k=1}^{\mu}\{\tau_{ik}, \tau'_{ik}\}$$

и упорядочим числа (4), переобозначив их $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2\nu\mu}$. Если $x_j \in \{\tau_{ik}\}$, положим $\omega_j = 1$. Если $x_j \in \{\tau_{ik}\}$, то $\omega_j = -1$. Тогда искомое T_{UV} можно вычислить по формуле:

$$T_{UV} = \sum_{j=1}^{2\nu\mu}(x_{j+1} - x_j)\cdot \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{j}\omega_i\right), \tag{5}$$

где $\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0; \\ 0, & \text{если } a = 0; \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

Прокомментировать выражение (5) можно так. До момента x_j включительно "началось" столько интервалов (τ_{ik}, τ'_{ik}), сколько единиц в ряду $\omega_1, \ldots, \omega_j$ и "закончилось" столько, сколько единиц со знаком минус. Следовательно, x_j принадлежит одному из этих интервалов тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{j} \omega_i > 0$, т.е. $\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{j} \omega_i\right) = 1$. Однако тогда длину интервала (x_j, x_{j+1}) надо включать в сумму, что и показано в формуле (5). В противном случае $\operatorname{sgn}(\bullet)$ равно нулю и не может быть равно минус единице. Алгоритм обоснован.

После определения меры множества сдвигов можно решать задачу об оценке вероятности перекрытия сложных случайных заявок.

Рассмотрим пуассоновский поток заявок с параметром λ. С каждой заявкой ассоциируется случайное множество $U = \bigcup_{i=1}^{\nu} (a_i, b_i)$, где $0 = a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < b_\nu$; величины ν, a_i, b_i – случайные: они определяются общим элементарным событием $\omega \in \Omega$, где Ω – пространство элементарных событий. Элемент ω реализуется по мере $P(A)$ на некоторой σ - алгебре событий $\mathfrak{I}$.

Реализуем множество U. Вычислим методом Монте-Карло вероятности q перекрытия между данной и какой-либо другой сложной заявкой (точнее, вероятности перекрытия хотя бы одного U-импульса с одним V-импульсом). Обозначим λ^* интенсивность потока забытых заявок. Из теории Хинчина потоков однородных событий [3] следует, что

$$q = \frac{\lambda^*}{\lambda}.$$

Событие "появления в интервале длины dt заявки, которой суждено быть забитой", равно пересечению следующих двух событий:

"появление в интервале $(t_0, t_0 + dt)$ заявки со случайным множеством U";

"появление в интервале $(t_0 + \tau, t_0 + \tau + d\tau)$ заявки со случайным множеством ν",

где U и V – независимые, причем такие, что U и $V + \tau$ пересекаются. Если U и V фиксировать, то вероятность пересечения указанных двух событий равна $\lambda dt \cdot \lambda d\tau$ при пересечении U с $V + \tau$, и равна нулю в противном случае.

Интегрируя по всем τ, получим $\lambda^2 T dt$. Усредняя по V и U (а ними определяется T) выводим формулу

$$\lambda^* \le \lambda^2 M T_{UV},$$

откуда

$$q \le \lambda M T_{UV}.$$

Зная вероятность пересечения множественной заявки с любой другой заявкой, можно говорить о нахождении верхней и нижней оценки математического ожидания величины ущерба от этого пересечения.

Обозначим

$$\xi = f(U, \{V_i\})$$

случайную величину ущерба заявки с множеством U, которая определяется совокупностью действия всех множеств V_i, пересекающихся с U; $f^* < \infty$ – максимально возможное значение ущерба ($f \le f^*$). Оценочный ущерб равен ущербу от пересечения U с некоторым V, либо ущербу от пересечения хотя бы с двумя множествами V_1 и V_2. Отсюда следует, что

$$M\xi \le MI_1 + MI_2,$$

где MI_1 – средний ущерб от перекрытия U некоторым случайным множеством V, MI_2 – средний ущерб, связанный с перекрытием U с каждым из двух множеств V_1 и V_2. Реализуем случайное множество U и независимое от него V, а также их взаимную "протяжку", т.е. определим интервал пересечения как множество тех τ, для которых U пересекается с $V+\tau$. Для каждого $\tau \in (\text{и.п})$ определим значения $f_\tau = f(U, V+\tau)$. Тогда получим:

$$I_1 = \lambda \int\limits_{(\text{и.п})} f_\tau d\tau .$$

Множества U и V уже реализованы. Реализуем V', независимое от (U,V). Вычислим T_{UV} и $T_{UV'}$. Тогда при фиксированных U, V и V' вероятность пересечения U одновременно множествами V и V' будет не больше величины $\lambda^2 T_{UV} T_{UV'}$. Отсюда

$$I_2 \le f^* \lambda^2 T_{UV} T_{UV'} .$$

Следовательно, имеем:

$$M\xi \le \lambda M \int\limits_{(\text{и.п})} f_\tau d\tau + f^* \lambda^2 M(T_{UV} T_{UV'}) . \qquad (6)$$

Нижняя оценка математического ожидания ущерба заявки имеет вид:

$$M\xi \ge \lambda M \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|\tau|} f_\tau d\tau - f^* \lambda^2 M(T_{UV} T_{UV'}) . \qquad (7)$$

Вывод этой оценки основан на свойстве монотонности функционала ущерба и свойствах стационарного пуассоновского потока [4].

Таким образом, формулы (6) и (7) позволяют оценить математическое ожидание ущерба сложной заявки от пересечения с другими сложными заявками с двух сторон, что позволяет судить о точности оценок.

Список литературы

1. *Лифшиц А.Л., Мальц Э.А.* Статистическое моделирование систем массового обслуживания.– М.: Сов. радио, 1978. – 248 с.

2. *Коба Е.В.* Оценка вероятности наложения сигналов бортовых ответчиков методом статистического моделирования / Повышение эффективности автоматизированных систем управления.– К.: КИИГА, 1992 .– С. 22-25.

3. *Хинчин А.Я.* Работы по теории массового обслуживания.– М.: Физматгиз, 1963.– 278 с.

4. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания.– М.: Изд-во Российского университета дружбы народов, 1995. – 528 с.

Стаття надійшла до редакції 18 грудня 1999 року.