УДК 621.372

В.А. Игнатов, Ю.Г. Лега, С.М. Первунинский

ОЦЕНКА ВЕКТОРНОГО ПАРАМЕТРА МЕТОДОМ МАКСИМИЗАЦИИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕННОГО ПОЛИНОМА

Рассмотрен алгоритм определения оценки векторного параметра методом максимизации среднего значения степенного функционального полинома. Разработанный алгоритм обеспечивает более простые программные и технические реализации устройств оценки.

Задача оценки векторного параметра $\vec{\theta} = [\vartheta_r]_{r=\overline{1,P}}$ мерности p в работах [1,2] решается в предположении, что наблюдаемый скалярный стационарный в узком смысле с порядком стационарности 2S случайный процесс $\xi(t)$ на интервале $-T \le t \le T$ имеет априорно известные значения моментов $m_i\left(0;\vec{\theta}\right)$, $i=\overline{1,2S}$ одномоментного распределения и значения моментных функций $m_i\left(0,\tau;\vec{\theta}\right)$ двухмоментного распределения, зависящие от векторного оцениваемого параметра $\vec{\theta}$.

За оценку $\hat{\theta} = \left[\hat{\vartheta}_r\right]_{r=\overline{1,P}}$ принимается вектор $\vec{\theta}$, при котором обеспечивается максимальное значение сформированных из процесса $\xi\left(t,\bar{\theta}_0\right)p$ функциональных стохастических полиномов

$$\ell_{S,r}\left[\xi\left(t,\bar{\theta}_0\right)\right] = H_r Z_S - h_{0,r}(\vartheta_r), r=\overline{1,P}, \tag{1}$$

где $H_r = \left[h_{r,i}(\vartheta_r)\right]^{i=\overline{1,S}}$ – матрица-строка, образованная элементами $h_{r,i}(\vartheta_r) = \int\limits_{a_r}^{b_r} k_{r,i}(\vartheta)d\vartheta$; $Z_S = [\varsigma_i]_{i=\overline{1,S}}$ – матрица-столбец, образованная элементами $\varsigma_i = \int\limits_{-T}^{T} \xi^i\left(t,\bar{\theta}_0\right)dt$; $h_{0,r}(\vartheta_r) = 2T\sum\limits_{i=1}^{S}\int\limits_{a_r}^{b_r} k_{r,i}(\vartheta)m_i\left(0;\vec{\theta}\right)d\vartheta$; $k_{r,i}(\vartheta)$ – неизвестные ядра полинома; $\bar{\theta}_0 = \left[\vartheta_{r,0}\right]_{r=\overline{1,P}}$ – истинное значение вектора $\vec{\theta}$, $\vartheta_{r,0} \in [a_r, b_r]$.

Полученная из данного условия оценка $\vec{\theta} \to \bar{\theta}_0$ при $T \to \infty$ по вероятности и находится из решения матричного равенства

$$K\left(\vec{\theta}\right)Y\left(\vec{\theta}\right)\Big|_{\vec{\theta}=\hat{\theta}} = 0, \tag{2}$$

где $K\left(\vec{\theta}\right) = \left[k_{r,i}(\vartheta)\right]^{i=\overline{1,S}}_{r=\overline{1,P}}$ – матрица оптимальных ядер полиномов $\ell_{S,r}[.]$;

$Y\left(\vec{\theta}\right)=\left[y_i\left(\vec{\theta}\right)\right]_{i=\overline{1,S}}$ – вектор с элементами $y_i\left(\vec{\theta}\right)=\frac{1}{2T}\varsigma_i-m_i\left(\vec{\theta}\right)$.

Определение корня уравнения (2) связано с выполнением значительного объема вычислений. Поэтому, как правило, решение ищется с применением рекуррентных методов [3, 4]. Получаемая при этом дисперсия оценок зависит от элементов вектора $\vec{\theta}_0$.

Отмеченные особенности метода приводят к сложным техническим реализациям устройств оценки, а зависимость дисперсии оценок $\sigma^2_{\vartheta r}$, $r=\overline{1,P}$ от вектора $\vec{\theta}_0$ затрудняет сравнение полученных результатов с другими методами. С целью упрощения анализа при тех же исходных предположениях о процессе $\xi\left(t,\vec{\theta}_0\right)$ рассмотрим оценку вектора $\vec{\theta}_0$ из условия определения совместного максимума для p усредненных значений полиномов вида

$$\bar{\ell}_{S,r}\left[\xi\left(t,\vec{\theta}\right)\right]=\int_{a_r}^{b_r}\omega\left(\vartheta_{r,0}\right)\ell_{S,r}\left[\xi\left(t,\vec{\theta}_0\right)\right]d\vartheta_{r,0},\quad r=\overline{1,P}, \tag{3}$$

где $\omega\left(\vartheta_{r,0}\right)$ – плотность распределения элемента $\vartheta_{r,0}\in\left[a_r,b_r\right]$.

В отличие от выражения (1) в уравнении (3) примем, что ядра

$$k_{r,i}(\vartheta)=k_{r,i}\varphi(\vartheta), \tag{4}$$

где константы $k_{r,j}(\vartheta)$, $r=\overline{1,P}$, $i=\overline{1,S}$ и функции $\varphi(\vartheta_r)$ неизвестны и подлежат определению.

Определение указанных элементов (4) выполним из условия минимума дисперсии оценки $\sigma^2_{\vartheta_r}=M\left\{\left(\vartheta_r-\vartheta_{r,0}\right)^2\right\}$ $r=\overline{1,P}$, найденной при условии, что все остальные составляющие параметра $\vec{\theta}$, кроме ϑ_r, известны и равны $\vartheta_{j,0}, j\neq r, j=\overline{1,P}$. Более того, оценка должна быть несмещенной относительно $\vec{\theta}_0$. Возможность одновременного удовлетворения этим требованиям видна из следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть случайный стационарный процесс $\xi\left(t,\vec{\theta}_0\right)$ с порядком стационарности 2S для всех $\vec{\theta}_0\in\vec{\theta}$ является эргодическим, имеет дифференцируемые по ϑ_r начальные моменты $m_i\left(0;\vec{\theta}\right), i=\overline{1,S}$, функции $\varphi(\vartheta_r)$ дифференцируемы, причем $\varphi(\vartheta_r)>0\forall\vartheta_r\in\vec{\theta}$, а $k_{r,i}$ таковы, что

$$0<\sum k_{r,i}\frac{\partial m_i\left(0;\vec{\theta}\right)}{\partial\vartheta_r}<\infty,\ r=\overline{1,P}.$$

Тогда элементы $\bar{\ell}_{S,r}\left[\xi\left(t,\vec{\theta}\right)\right]$ как функции параметров $\vartheta_{j,0}$ $j=\overline{1,P}$, $j\neq r$ при 2T, значительно превышающем интервал корреляции процесса $\xi\left(t,\vec{\theta}_0\right)$, имеет максимум в точке $\hat{\theta}$ окрестности $\vec{\theta}_0$, а коэффициенты $k_{r,i}$ дополнительно связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{S} k_{r,i} \int_{-T}^{T} \left[\xi^i\left(t;\vec{\theta}_0\right) - m_i\left(0;\vec{\theta}\right) \right] dt \Bigg|_{\vec{\theta}=\hat{\theta}} = 0, \quad r = \overline{1,P} \tag{5}$$

Доказательство утверждения для каждого $r = \overline{1,P}$ проводится по схеме доказательства аналогичного утверждения, рассмотренного в работе [1] при оценке скалярного параметра ($p = 1$), и здесь не приводится.

Утверждение 2. Если стационарный процесс $\xi\left(t,\vec{\theta}_0\right)$ эргодичен для всех $\vec{\theta}_0 \in \vec{\theta}$ по отношению к $M\left\{\frac{1}{2T}\ell_{S,r}\left[\xi\left(t,\vec{\theta}\right)\right]\right\}$, $r = \overline{1,P}$, то оценка $\hat{\theta}$, найденная из системы (5), при $T \to \infty$ по вероятности сходится к $\vec{\theta}_0$.

Из условия эргодичности стационарного процесса $\xi\left(t,\vec{\theta}_0\right)$ можно записать, что

$$M\left\{\frac{1}{2T}\sum_{i=1}^{S} k_{r,i} \int_{-T}^{T} \left[\xi^i\left(t;\vec{\theta}_0\right) - m_i\left(0;\vec{\theta}\right) \right] dt \right\} = \sum_{i=1}^{S} k_{r,i} \left[m_i\left(0;\vec{\theta}_0\right) - m_i\left(0;\vec{\theta}\right) \right], \quad r = \overline{1,P}.$$

Сравнивая приведенную систему с системой (5), можно заметить, что одним из решений системы (5) будет корень $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0$. Кроме того, из эргодичности $\xi\left(t,\vec{\theta}\right)$ по отношению к $M\left\{\frac{1}{2T}\ell_{S,r}\left[\xi\left(t,\vec{\theta}\right)\right]\right\}, r = \overline{1,P}$ при всех $\vec{\theta}_0 \in \vec{\theta}$ следует согласно работе [1] сходимость по вероятности величины $\frac{1}{2T}\ell_{S,r}\left[\xi\left(t,\vec{\theta}\right)\right]$ при $T \to \infty$ к $M\left\{\frac{1}{2T}\ell_{S,r}\left[\xi\left(t,\vec{\theta}\right)\right]\right\}$. Следовательно, корень системы уравнений (5) при $T \to \infty$ по вероятности сходится к $\vec{\theta}_0$.

Утверждение 3. Пусть выполняются условия утверждения 2, а коэффициенты $k_{r,j}$ найдены из решения системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{S} k_{r,i} \overline{F}_{i,j}\left(\vartheta_r\right) = V_{r,j}, \quad r = \overline{1,P}, \quad j = \overline{1,S}, \tag{6}$$

где $\overline{F}_{i,j}\left(\vartheta_r\right) = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right)\chi_{i,j}\left(\tau,\overline{\vartheta}_r\right)d\tau$; $\quad V_{r,j} = \int_{a_r}^{b_r}\omega\left(\vartheta_r\right)\frac{\partial m_j\left(0;\vec{\theta}\right)}{\partial\vartheta_r}d\vartheta_r$;

$\chi_{i,j}\left(\tau,\overline{\vartheta}_r\right) = \left\langle \xi^i\left(0,\overline{\vartheta}_r\right), \xi^j\left(\tau,\overline{\vartheta}_r\right)\right\rangle$ – кумулянтные функции случайных процессов $\xi^n\left(\tau,\overline{\vartheta}_r\right) = \int_{a_r}^{b_r}\omega\left(\vartheta_r\right)\xi^n\left(\tau,\overline{\vartheta}_r\right)d\vartheta_r$, $n = \{i; j\}$.

Тогда дисперсии оценок асимптотически определяются выражениями

$$\sigma_{\vartheta_r}^2 \approx \frac{\sum_{i,j=1}^{S} k_{r,i}k_{r,j}\overline{F}_{i,j}\left(\vartheta_r\right)}{2T\left(\sum_{i=1}^{S} k_{r,i}V_{r,i}\right)^2} = V_{r,j}, \quad r = \overline{1,P}, \tag{7}$$

и имеют минимальное значение.

Несложно показать, что система (5) имеет единственное решение при $P \leq S$ и определитель матриц $F_r = \left[\overline{F_{i,j}(\vartheta_r)}\right]_{i,j=\overline{1,S}}$ $r = \overline{1,P}$ отличен от нуля. При выполнении данных условий, разлагая полином $\bar{\ell}_{S,r}\left[\xi\left(t,\vec{\theta}\right)\right]$ для фиксированного $r = \overline{1,P}$ в ряд Тейлора в окрестности $\vartheta_{r,0}$ с ограничением ряда остаточным членом в форме Коши, получим асимптотическое значение дисперсии оценки в виде выражения (7). Минимальное значение величины $\sigma^2_{\vartheta_r}$ при $\det|F_r| > 0$ подтверждается путем вариации вектора $K_r = \left[k_{r,i}\right]_{i=\overline{1,S}}$ на величину δK_r. В этом случае величина $\sigma^2_{\vartheta r}(\alpha)$ может быть записана в матричной форме

$$\sigma^2_{\vartheta r}(\alpha) = \frac{(K_r + \alpha\delta K_r)F_r(K_r + \alpha\delta K_r)^T}{2T\left[(K_r + \alpha\delta K_r)^T V_r\right]^2},$$

где $V_r = \left[V_{r,i}\right]_{i=\overline{1,S}}$ - матрица-столбец; α -некоторая константа.

Легко установить, что при выполнении системы (6) величина $\left.\frac{d\sigma^2_{\vartheta r}(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$, а $\frac{d^2\sigma^2_{\vartheta r}(\alpha)}{d\alpha^2} > 0$. Последнее указывает на экстремум типа минимума величины дисперсии оценки (7).

Выводы. Получен алгоритм определения оценки векторного параметра методом максимизации среднего значения степенного функционального полинома. Приведенный алгоритм определения оценки из соотношения (5) требует выполнения меньшего количества вычислений, чем при определении оценки векторного параметра из равенства (2). Найденные дисперсии оценок элементов векторного параметра зависят от среднего значения оцениваемого элемента.

Список литературы

1. КУНЧЕНКО Ю.П. Нелинейная оценка параметров негауссовых радиофизических сигналов. – К.: Вища шк., 1987. – 192 с.

2. КУНЧЕНКО Ю.П., ЛЕГА Ю.Г. Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома. – К.: Наук. думка, 1992. – 180 с.

3. ИГНАТОВ В. А., БОГОЛЮБОВ Н.В. Оценка качества избыточных иерархических систем обработки сигналов и управления//Статистические методы обработки информации в авиационных радиоэлектронных системах – К.: КИИГА, 1987. – С.114-119.

4. А.с.1457155.(СССР). Способ допускового контроля сигналов/ В.А. Игнатов, Н.В. Боголюбов, В.В. Уланский и др. //БИ, № 5, 1989. – С. 251.

Стаття надійшла до редакції 3 квітня 2000 року.