УДК 629.7.05.001 (0.83)

В.А. Касьянов, К. Шафран

СГЛАЖИВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ СО СВЯЗЯМИ В ВИДЕ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрена задача сглаживания двух временных рядов, когда имеется априорная информация о связи между оцениваемыми величинами в виде линейного неравенства.

В отличие от случая, когда связи между оцениваемыми параметрами имеют вид равенств, нами рассматривается задача условного сглаживания двух временных рядов в том случае, когда априорная связь задается в виде некоторого неравенства. Очевидно, что и такого рода априорная информация тоже может быть использована для улучшения качества сглаживания. Хотя можно ожидать, что эффект от учета подобной связи будет меньше, чем в случае, когда связь представляет собой равенство. Проиллюстрируем эту возможность на простом примере.

Пусть, как и ранее, требуется осуществить сглаживание двух временных рядов

$$y_{1_t} = \left\{y_{1_1}, y_{1_2}, \ldots, y_{1_N}\right\}; \quad y_{2_t} = \left\{y_{2_1}, y_{2_2}, \ldots, y_{2_N}\right\},$$

полученных как результат измерения по схеме:

$$y_{i_t} = x_{i_t} + \eta_{i_t}; \quad (i \in 1,2),$$

где η_{i_t} - шум с нулевым средним, *E(.)* - математическое ожидание,

$$E\eta_{i_t} = 0; \quad E\eta_{i_t}\eta_{j_\tau} = \delta_i^2 \delta_{i_j} \delta_{t_\tau},$$

$\delta_{i_j}, \delta_{t_\tau}$ - функции Дирака.

Пусть, далее между x_{1_t} и x_{2_t} существует связь в виде неравенства

$$f\left(x_{1_t}, x_{2_t}\right) \le 0$$

Рассмотрим простейший случай, когда эта связь имеет вид:

$$x_{1_t} \le x_{2_t}. \tag{1}$$

Составим модифицированную функцию Лагранжа. Для этого введем новую переменную z_t:

$$x_{1_t} - x_{2_t} = -z_t^2 = -u_t; \quad u_t \ge 0$$

Модифицированную функцию Лагранжа зададим в виде:

$$L^* = \sum_{s=-m}^{m}\left[y_{1_s} - a_{0_1} - a_{1_1}s - a_{2_1}s^2\right]^2 + \sum_{s=-m}^{m}\left[y_{2_s} - a_{0_2} - a_{1_2}s - a_{2_2}s^2\right]^2 +$$

$$+\mu\left[a_{0_1} - a_{0_2} + \xi_0^2\right] + \sum_{s=-m}^{m}\left[z_t^2 - \xi_0 - \xi_1 s - \xi_2 s^2\right]^2.$$

Здесь принято, что $q = 2$ (порядок аппроксимирующего полинома), а также, что новая переменная $z_t^2 = u_t$ имеет тренд, аппроксимируемый, как и основные переменные, полиномом второго порядка. Измеренный временной ряд для переменной u_t есть:

$$\widetilde{u}_t = y_{1_s} - y_{2_s},$$

а тренд в окрестности точки t аппроксимируется полиномом вида

$$u(t,s) = z^2(t,s) = \xi_0(t) + \xi_1(t)s + \xi_2(t)s^2. \qquad (2)$$

Поскольку полином в правой части (9) должен быть неотрицательной величиной при любых значениях s и t, то очевидно, должны выполняться условия:

$$\xi_0 \ge 0; \quad \xi_0\xi_2 - 0.25\xi_1^2 \ge 0,$$

являющееся частным случаем условий неотрицательной определенности квадратичных форм.

Положим:

$$\xi_0 = p^2; \quad \xi_0\xi_2 - 0.25\xi_1^2 = r^2,$$

тогда формула (2) может быть переписана в виде:

$$u(t,s) = z^2(t,s) = p^2 + \xi_1 s + \frac{1}{p^2}\left(r^2 + 0.25\xi_1^2\right)s^2.$$

Следовательно, ξ_2 также неотрицательная величина. Обозначим:

$$\xi_2 = n = \frac{1}{p^2}\left(r^2 + 0.25\xi_1^2\right) \ge 0$$

Рассмотрим часть функции Лагранжа, содержащую дополнительную переменную:

$$L_1^* = \mu\left[a_{0_1} - a_{0_2} + p^2\right] + \sum_{s=-m}^{m}\left[y_{1_s} - y_{2_s} - p^2 - \xi_1 s - \frac{1}{p^2}\left(r^2 + 0.25\xi_1^2\right)s^2\right]^2 =$$

$$= \mu\left[a_{0_1} - a_{0_2} + p^2\right] + \sum_{s=-m}^{m}\left[y_{1_s} - y_{2_s} - p^2 - \xi_1 s - ns^2\right]^2.$$

Составим нормальные уравнения для коэффициентов p^2, ξ_1, n:

$$\frac{\partial L_1^*}{\partial p^2} = 0; \quad \frac{\partial L_1^*}{\partial \xi_1} = 0; \quad \frac{\partial L_1^*}{\partial n} = 0;$$

Имеем:

$$0.5\mu - \sum_{s=-m}^{m}\left(y_{1_s} - y_{2_s}\right) + p^2(2m+1) + \frac{n}{p^2}\sum_{s=-m}^{m}\left(y_{1_s} - y_{2_s}\right)s^2 - \frac{n^2}{p^2}\sum_{s=-m}^{m}s^4 = 0; \qquad (3)$$

$$\sum_{s=-m}^{m}\left(y_{1_s} - y_{2_s}\right)s + \xi_1\left[\frac{1}{2p^2}\sum_{s=-m}^{m}\left(y_{1_s} - y_{2_s}\right)s^2 - \frac{3}{2}\sum_{s=-m}^{m}s^2 - \frac{n}{2p^2}\sum_{s=-m}^{m}\left(y_{1_s} - y_{2_s}\right)s^4\right] = 0; \qquad (4)$$

$$\sum_{s=-m}^{m}\left(y_{1_s} - y_{2_s}\right)s^2 - p^2\sum_{s=-m}^{m}s^2 - n\sum_{s=-m}^{m}s^4 = 0. \qquad (5)$$

Нормальные уравнения для коэффициентов a_{i_j} получаются в виде

$$\frac{\partial L^*}{\partial a_{0_1}} = 0; \quad \frac{\partial L^*}{\partial a_{1_1}} = 0; \quad \frac{\partial L^*}{\partial a_{2_1}} = 0;$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial a_{0_2}}=0;\quad \frac{\partial L^*}{\partial a_{1_2}}=0;\quad \frac{\partial L^*}{\partial a_{2_2}}=0.$$

Оценками трендов в точке t $(s=0)$ являются коэффициенты a_{0_1} и a_{0_2}. Потому выпишем только необходимые для их определения уравнения:

$$\begin{cases} a_{0_1}(2m+1)+a_{2_1}\sum_{s=-m}^{m}s^2=\sum_{s=-m}^{m}y_{1_s}-0.5\mu; \\ a_{0_1}\sum_{s=-m}^{m}s^2+a_{2_1}\sum_{s=-m}^{m}s^4=\sum_{s=-m}^{m}y_{1_s}s^2. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_{0_2}(2m+1)+a_{2_2}\sum_{s=-m}^{m}s^2=\sum_{s=-m}^{m}y_{2_s}-0.5\mu; \\ a_{0_2}\sum_{s=-m}^{m}s^2+a_{2_2}\sum_{s=-m}^{m}s^4=\sum_{s=-m}^{m}y_{2_s}s^2. \end{cases} \quad (7)$$

Из уравнений (3) – (5) найдем выражения для p^2 и n через измерения y_{1_t} и y_{2_t}. Они могут принимать как положительное, так и отрицательное значения. В действительности p^2 и n по определению могут быть только положительными, поэтому указанные выше значения p^2 и n, выраженные через измерения, будем обозначать через p^{2*} и n^*.

Решая уравнения (3) - (5) относительно p^2 и n, найдем

$$\hat{p}^2=-0.5\mu\frac{\sum s^4}{(2m+1)\sum s^4-\left(\sum s^2\right)^2}-\frac{\sum\left(y_{1_s}-y_{2_s}\right)\left(s^2\sum s^2-\sum s^4\right)}{(2m+1)\sum s^4-\left(\sum s^2\right)^2}, \quad (8)$$

где $\hat{p}^2$ - оценка p^2.

Для нахождения множителя Лагранжа используем уравнение связи, которое принимается в приближенной форме, когда точные значения трендов и величины p^2 заменяются их оценками a_{0_1}, a_{0_2}, $\hat{p}^2$:

$$a_{0_1}-a_{0_2}+\hat{p}^2=0. \quad (9)$$

Предварительно определим a_{0_1} и a_{0_2} из уравнений (6) и (7), имеем:

$$a_{0_1}=\frac{\left(\sum y_{1_s}-0.5\mu\right)\sum s^4-\sum y_{1_s}s^2\sum s^2}{(2m+1)\sum s^4-\left(\sum s^2\right)^2}; \quad (10)$$

$$a_{0_2}=\frac{\left(\sum y_{2_s}+0.5\mu\right)\sum s^4-\sum y_{2_s}s^2\sum s^2}{(2m+1)\sum s^4-\left(\sum s^2\right)^2}; \quad (11)$$

Подставляя (8), (10) и (11) в уравнения (9), находим

$$\mu = \frac{4}{3}\frac{\sum(y_{1_s} - y_{2_s})(\sum s^4 - s^2 \sum s^2)}{\sum s^4}. \qquad (12)$$

Возвращаясь к формулам (23) и (24) получаем значения оценок a_{0_1} и a_{0_2}:

$$\hat{x}_1 = a_{0_1} = \frac{\sum\limits_{s=-m}^{m}\left(\frac{1}{3}y_{1_s} + \frac{2}{3}y_{2_s}\right)\left(\sum\limits_{s=-m}^{m}s^4 - s^2\sum\limits_{s=-m}^{m}s^2\right)}{(2m+1)\sum\limits_{s=-m}^{m}s^4 - \left(\sum\limits_{s=-m}^{m}s^2\right)^2}; \qquad (13)$$

$$\hat{x}_2 = a_{0_2} = \frac{\sum\limits_{s=-m}^{m}\left(\frac{2}{3}y_{1_s} + \frac{1}{3}y_{2_s}\right)\left(\sum\limits_{s=-m}^{m}s^4 - s^2\sum\limits_{s=-m}^{m}s^2\right)}{(2m+1)\sum\limits_{s=-m}^{m}s^4 - \left(\sum\limits_{s=-m}^{m}s^2\right)^2}. \qquad (14)$$

При этих же условиях найдем значения p^2 и n. Подставим (12) в (8), а затем полученное значение p^2 в формулу

$$n = \frac{1}{\sum s^4}\left[\sum(y_{1_s} - y_{2_s})s^2 - p^2\sum s^2\right].$$

В результате получаем:

$$p^{2*} = \frac{1}{3}\frac{\sum(y_{1_s} - y_{2_s})(\sum s^4 - s^2\sum s^2)}{(2m+1)\sum s^4 - (\sum s^2)^2}; \qquad (15)$$

$$n^* = \frac{1}{\sum s^4}\frac{\sum(y_{1_s} - e_{2_s})\left[\sum s^4(3(2m+1)s^2\sum s^2) - 2s^2(\sum s^2)^2\right]}{3\left[(2m+1)\sum s^4 - (\sum s^2)^2\right]} \qquad (16)$$

Из последних формул видно, что p^{2*} и n^* могут быть как положительными, так и отрицательными. Положим, например, что $(y_{1_s} - y_{2_s})$ не зависит от s и равно Δ. Для $\Delta > 0$ (15) будет отрицательным.

Знаменатель в (16) всегда отрицателен, поэтому $n^* < 0$. Положим теперь в исходных уравнениях:

$$n = \begin{cases} n^*, если\ n^* > 0; \\ 0, если\ n^* \le 0. \end{cases}$$

Параметр p^{2*} при аналогичных условиях также оказывается отрицательным, хотя отрицательность n^* и p^{2*} может наступать неодновременною, если иметь в виду реальные значения измерений y_{1_s} и y_{2_s}.

Если имеет место случай $n^* \le 0$, то для μ получаем:

$$\mu = \frac{2\sum(y_{1_s} - y_{2_s})\left[2(2m+1)\sum s^4 - (2m+1)s^2\sum s^2 - (\sum s^2)^2\right]}{3(2m+1)\sum s^4 - (\sum s^2)^2}$$

и, соответственно:

$$\hat{x}_1 = a_{0_1} = \frac{\sum y_{1_s}\left(\sum s^4 - s^2\sum s^2\right)}{(2m+1)\sum s^4 - \left(\sum s^2\right)^2} - 0.5\frac{\sum s^4}{(2m+1)\sum s^4 - \left(\sum s^2\right)^2}\times$$

$$\times\frac{2\sum\left(y_{1_s} - y_{2_s}\right)\left[2(2m+1)\sum s^4 - (2m+1)s^2\sum s^2 - \left(\sum s^2\right)^2\right]}{3(2m+1)\sum s^4 - \left(\sum s^2\right)^2}; \quad (17)$$

$$\hat{x}_2 = a_{0_2} = \frac{\sum y_{2_s}\left(\sum s^4 - s^2\sum s^2\right)}{(2m+1)\sum s^4 - \left(\sum s^2\right)^2} + 0.5\frac{\sum s^4}{(2m+1)\sum s^4 - \left(\sum s^2\right)^2}\times$$

$$\times\frac{2\sum\left(y_{1_s} - y_{2_s}\right)\left[2(2m+1)\sum s^4 - (2m+1)s^2\sum s^2 - \left(\sum s^2\right)^2\right]}{3(2m+1)\sum s^4 - \left(\sum s^2\right)^2}. \quad (18)$$

Для p^{2*} в этом случае получаем:

$$p^{2*} = \frac{\sum\left(y_{1_s} - y_{2_s}\right)\left(s^2\sum s^2 + \sum s^4\right)}{3(2m+1)\sum s^4 - \left(\sum s^2\right)^2}. \quad (19)$$

С учетом полученных зависимостей может быть предложен следующий алгоритм сглаживания двух временных рядов при наличие априорной связи в виде линейного неравенства:

1. Если $n^* > 0$; $p^{2*} > 0$, используются формулы (13) и (14).
2. Если $n^* \le 0$; $p^{2*} > 0$, используются формулы (17) и (18), при этом p^{2*} получается по формуле (19).
3. Если $n^* > 0$; $p^{2*} < 0$, используются формулы:

$$\hat{x}_1 = a_{0_1} = 0.5\frac{1}{\nu(m)}\sum\left(y_{1s} + y_{2s}\right)\varphi(m,s);$$

$$\hat{x}_2 = a_{0_2} = 0.5\frac{1}{\nu(m)}\sum\left(y_{2_s} + y_{1_s}\right)\varphi(m,s);$$

следовательно, $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$, где

$$\nu(m) = (2m+1)(2m-1)(2m+3);$$

$$\varphi(m,s) = 3\left(2m^2 + 3m - 1\right) - 15s^2.$$

4. Если $n^* \le 0$; $p^{2*} \le 0$, используются формулы изолированного сглаживания [1]

$$\hat{x}_i = a_{0_i} = \frac{1}{\nu(m)}\sum y_{i_s}\varphi(m,s). \quad (20)$$

5. Если $n^* \le 0$; $p^{2*} \le 0$ и p^{2*} подсчитано по формуле (19), определение $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ осуществляется в соответствии со случаем 4.

Вернемся к рассмотрению основного случая 1 и формулам (13) и (14). Параметр $n^* > 0$, когда, например, $(y_{1_s} - y_{2_s}) = \text{const} = \Delta$ и $\Delta > 0$. Пусть в этом случае $y_{1_s} = y_1$; $y_{2_s} = y_2$.

Рассмотрим пример: $\Delta = 3$; $y_1 = 18$; $y_2 = 15$.

Видно, что условие связи не соблюдаются, так как $y_1 > y_2$. В соответствии с формулами (13) и (14) новые "измерения" для определения первого и второго трендов будут соответственно:

$$v_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 = 16;$$

$$v_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 = 17.$$

Таким образом, алгоритм "исправляет" измерения так, чтобы обеспечить выполнение условий связи $(x_1 < x_2)$. Формулы (13) и (14) можно переписать в виде:

$$\hat{x}_1 = a_{0_1} = \frac{1}{\nu(m)} \sum_{s=-m}^{m} \left(\frac{1}{3} y_{1_s} + \frac{2}{3} y_{2_s} \right) \varphi(m,s);$$

$$\hat{x}_2 = a_{0_2} = \frac{1}{\nu(m)} \sum_{s=-m}^{m} \left(\frac{2}{3} y_{1_s} + \frac{1}{3} y_{2_s} \right) \varphi(m,s).$$

Исследование остаточной дисперсии и смещения с помощью предложенного алгоритма представляет самостоятельную задачу. В частности, если сглаживание производится по формулам (13) и (14) при условии, что m=2, остаточная дисперсия оценок $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ есть

$$V_1 = E\left[\left(\hat{x}_1 - E\left(\hat{x}_1\right)\right)^2\right] = 0{,}05397\left(\sigma_1^2 + 4\sigma_2^2\right);$$

$$V_2 = E\left[\left(\hat{x}_2 - E\left(\hat{x}_2\right)\right)^2\right] = 0{,}05397\left(4\sigma_1^2 + 4\sigma_2^2\right).$$

При раздельном сглаживании по формуле (20) остаточная дисперсия

$$V_{oi} = 0{,}4857\sigma_i^2.$$

Пусть погрешности η_i имеют одинаковую дисперсию $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, тогда

$$V_1 = V_2 = \mathrm{V} = 0{,}26985\sigma^2,$$

и отношение $\dfrac{V}{V_0} \cong 0{,}5556$. Следовательно, учет априорной связи в виде неравенства (1) приводит к уменьшению остаточной дисперсии оценок приблизительно в два раза.

Таким образом, установлено свойство алгоритма, обеспечивающее такую коррекцию исходных временных рядов, которая делает их более соответствующими априорному неравенству.

Список литературы

1. *Касьяков В.А., Ударцев Е.П.* Определение характеристик воздушных судов методами идентификации. - М.: Машиностроение, 1998. - 176 с.

Стаття надійшла до редакції 30 грудня 1999 року.