ББК Ј 811.344 6642.31
УДК 621.372.542

А.Я. Білецький, І.В. Шелевицький, В.М. Шутко, Є.В. Ткаченко

СПЛАЙНОВІ БАЗИСИ В ЗАДАЧАХ СТИСНЕННЯ ЧИСЛОВИХ ДАНИХ

Запропоновано в задачах наближення даних з метою їхнього стиснення використовувати сплайнові базиси, узгоджені з амплітудним спектром даних. Продемонстровано ефективність такого підходу на прикладах наближення даних базисами з різними спектральними властивостями.

У системах передачі числових даних важливе значення для зменшення ймовірності перехоплення має скорочення їхнього обсягу. В системах телеметричних вимірювань можливе використання методів стиснення даних з певним рівнем втрат. Останнім часом спостерігається значний розвиток wavelet методів обробки даних. Ці методи базуються на наближенні (інтерполяції) даних з допомогою локальних базисних функцій, включаючи сплайни. Існує велика різноманітність wavelet базисів і така ж різноманітність прикладів даних для їхнього успішного застосування. Для кожного з базисів будується розвинута математична теорія [1]. Однак на практиці апаратні та програмні реалізації вказаних розробок зустрічаються значно рідше. Загальноприйнятий стандарт стиснення зображень (JPEG) базується на дещо інших принципах, які забезпечують універсальність, хоч і не мають досконалого теоретичного обгрунтування [2]. На наш погляд проблема полягає в чисто, математичному підході до вибору базисних функцій, який вимагає досконалого математичного обгрунтування їхніх властивостей наближення. Це обмежує вибір базисних функцій зручних для теоретичних побудов.

У даній роботі пропонується дещо інший, інженерний, підхід до вибору локальних базисних функцій. Успіх стиснення залежить від того, наскільки відрізняються між собою базисні функції та залежність, яку наближають. У часовій області нев'язка визначається диференційними властивостями функцій. Однак у практиці така інформація відсутня. Тому пропонується порівнювати базис та дані за амплітудними спектрами в частотній області. У цьому випадку отримати аналітичні вирази для нев'язки проблематично, але практично оцінити відповідність базису та даних цілком можливо.

Покажемо вплив частотних властивостей базису на успішність розв'язку задачі наближення. Як базисні функції використуємо локальні сплайни з неперервною першою похідною на регулярних сітках вузлів та даних. Сплайновий базис отримаємо як згортку локальних симетричних функцій різних класів: алгебраїчного полінома, експоненти, синусоїди. Назвемо ці функції породжуючими.

$$Fe_i = \begin{cases} \exp((i-1-n)/n)-1,\ i=\overline{n,2n}; \\ \exp((n-(i-2n))/n)-1,\ i=\overline{2n,3n}; \\ 0,\ i=\overline{1,n};\ \overline{3n,4n}; \end{cases}$$

$$Fs_i = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi\frac{(i-n-1)}{n}),\ i=\overline{n,2n}; \\ Fs_{4n-i},\ i=\overline{2n,3n}; \\ 0,\ i=\overline{1,n};\ \overline{3n,4n}. \end{cases}$$

Вигляд породжуючих функцій показано на рис.1.

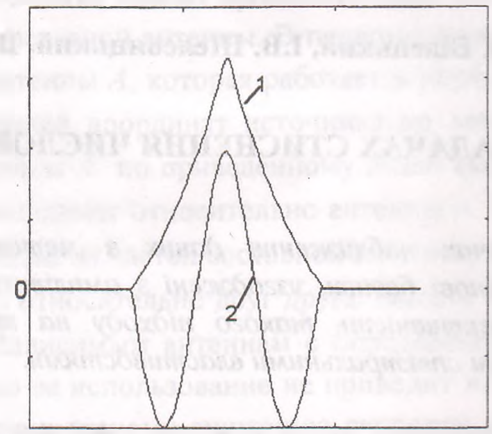

Рис. 1. Породжуючі базис функції: *1* – експоненціальна; *2* – косинусоподібна

Базиси отримаємо, виконавши дискретну лінійну згортку породжуючих функцій (рис. 2):

$$Be_i = \sum_{k=1}^{i-1} Fe_k Fe_{i-k},\ i = \overline{1,4n};$$

$$Bs_i = \sum_{k=1}^{i-1} Fs_k Fs_{i-k},\ i = \overline{1,4n}.$$

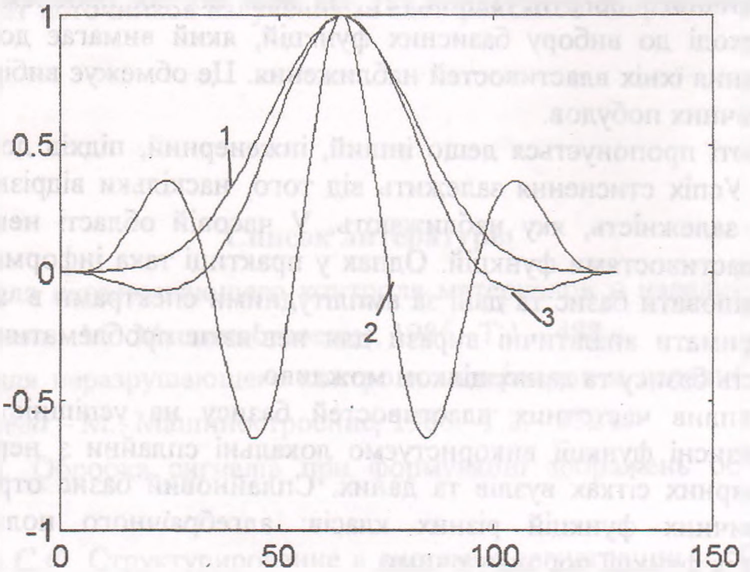

Рис. 2. Сплайнові базисні функції: *1* – експоненціальна; *2* – синусоподібна; *3* – кубічна ермітова

Знайдені функції є локальними сплайнами, що складаються з чотирьох фрагментів і мають у точках стику неперервною щонайменше першу похідну. Для кубічного сплайна скористаємося відомими виразами для кубічного ермітового сплайна [3]. Такий базис також можна отримати згорткою симетричного трикутника.

Вважаючи відліки сплайнових базисів коефіцієнтами нерекурсивного числового фільтра, побудуємо відповідні амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) (рис.3). Як бачимо, амплітудні характеристики кубічного базису та експоненціального мало відрізняються, особливо в області низьких частот. Базис, отриманий з відрізка синусоїди (назвемо його синусоподібним) має АЧХ, що суттєво відрізняється від двох інших. Отже, ці базиси повинні добре наближати дані зі схожими амплітудними спектрами.

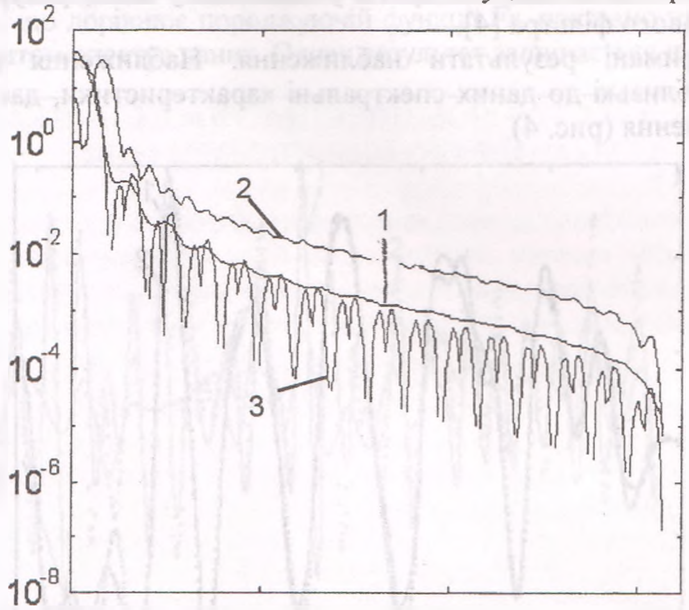

Рис. 3. Амплітудно-частотні характеристики базисів:
1 – експоненціального; *2* – синусоподібного; *3* – кубічного ермітового

Згенеруємо дві послідовності числових тестів. Для цього некорельовані нормальні дані фільтруватимемо фільтрами з імпульсними характеристиками, що є відповідними базисними сплайнами. Послідовність Y_e матиме амплітудний спектр, ідентичний спектру базису *Be*, а Y_s – спектру базису *Bs*.

Отримані послідовності апроксимуємо сплайнами за методом найменших квадратів. Для цього з функцій *Be* та *Bs* утворимо базис, змістивши їх у часі кратно *n* (одному фрагменту сплайна). Отримана система функцій є лінійно незалежною, а їхня лінійна комбінація утворює відповідні сплайни:

$$S_k = \sum_r a_r B_{r,k} = a_{j-1} B_{j-1,k} + a_{j1} B_{j,k} + a_{j+11} B_{j+1,k} + a_{j+2} B_{j+21,k},$$

де a_j – числові коефіцієнти; $B_{j,k} = Be_{jn+\mathrm{mod}(k/n)}$ – для експоненціального сплайна (для інших – аналогічно); $j = \mathrm{int}(k/n)$ – номер базисної функції (ціла частина ділення); $\mathrm{mod}(k/n)$ – номер точки на фрагменті сплайна (залишок ділення).

В матричному вигляді маємо:

$$\mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Такий базис не є ортогональним або квазіортогональним. На наш погляд, такий базис доцільно називати локальним, оскільки його обчислювальна ефективність обумовлена локальними властивостями базисних функцій.

У математиці більш уживаним є термін “фінітні функції”, проте в усіх роботах з сплайнів користуються саме терміном “локальні сплайни”.

Отже, знайдемо значення числових коефіцієнтів при базисних функціях, розв’язавши систему нормальних рівнянь:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{Y}),$$

які забезпечують

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{BA})'(\mathbf{Y} - \mathbf{BA}) \to \min,$$

де $\mathbf{Y}$ – вектор вхідних даних.

Зауважимо, що особливості сплайнових базисів дозволяють ефективно організувати розрахунки за методом найменших квадратів у побіжному вікні, рекурентно, або у вигляді нерекурсивного числового фільтра [4].

Розглянемо отримані результати наближення. Наближення даних сплайнами з базисами, що мають близькі до даних спектральні характеристики, дає близькі результати і хорошу якість наближення (рис. 4).

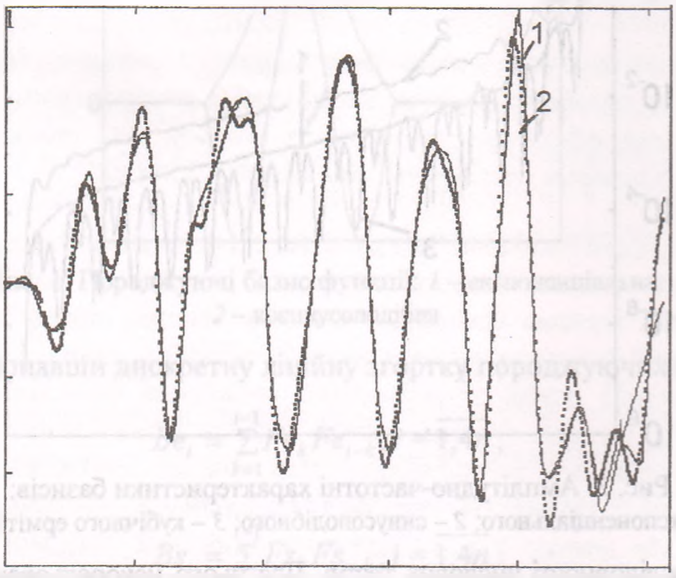

Рис.4. Приклад наближення даних:
1 – експоненціальним сплайном; *2* – кубічним ермітовим сплайном

Значне розходження праворуч обумовлене різницею в схемі розміщення вузлових точок. Якщо спробувати наблизити залежність із спектром, який значно відрізняється від спектра базису, результати наближення будуть незадовільні. Незадовільний результат наближення даних ермітовим сплайном показано на рис. 5. Наближення тих самих даних сплайном з базисом, що узгоджений зі спектром даних, дає хороші результати (рис.5). Потрібно також зазначити, що

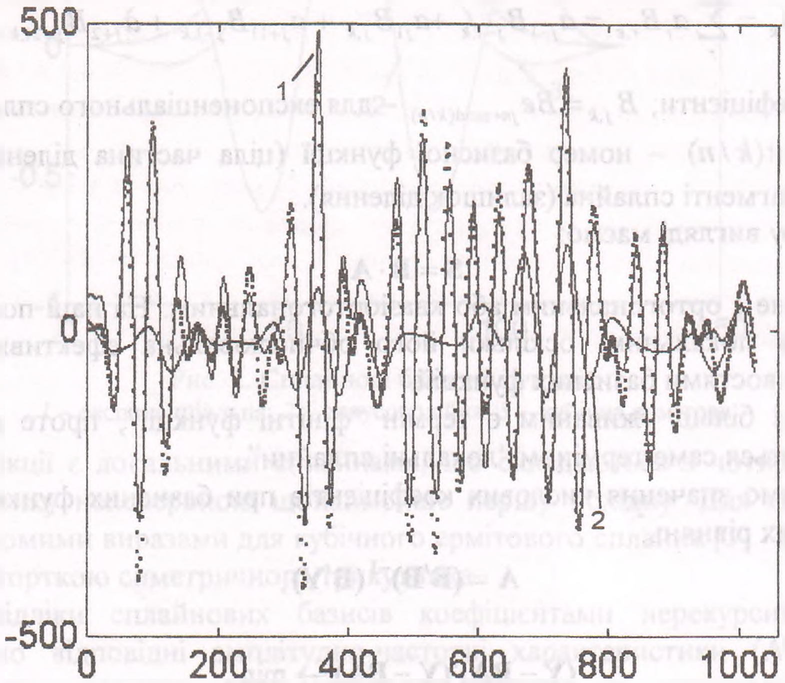

Рис. 5. Приклад наближення даних:
1 – синусоподібним сплайном; *2* – кубічним ермітовим сплайном

наближення не є надто чутливим до відповідності спектрів даних та базису. Наближення даних, отриманих як результат фільтрації нормальних некорельованих даних нерекурсивним фільтром з імпульсною функцією, що дорівнює породжуючій функції *Fs*, показано на рис. 6. Таким чином, спектра базису є квадратом спектра даних. Однак результат залишається цілком задовільним.

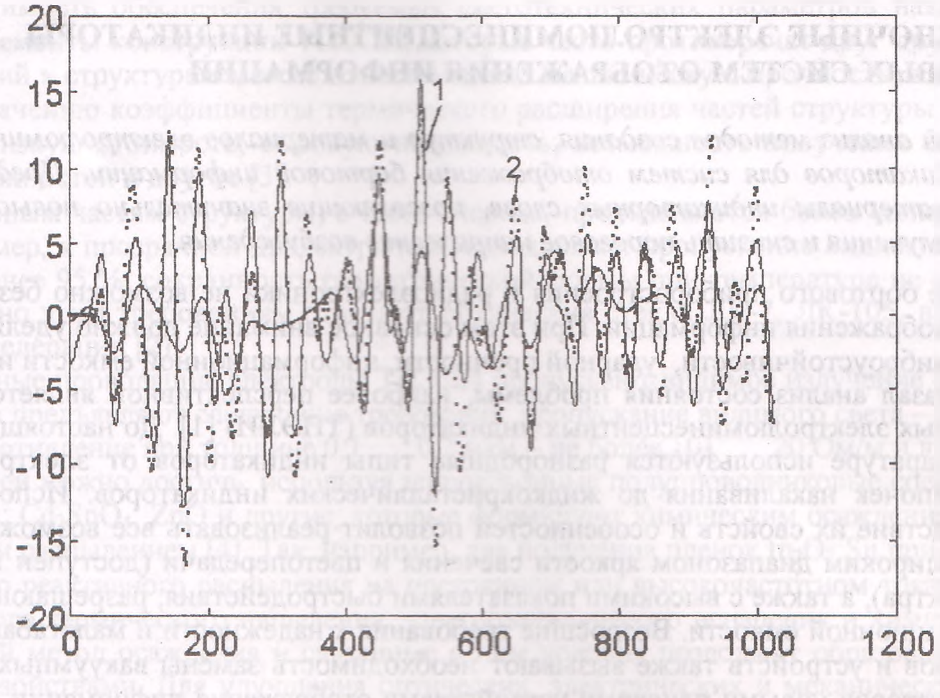

Рис.6. Приклад наближення даних:
1 – синусоподібним сплайном; *2* – кубічним ермітовим сплайном

Таким чином, проілюстровано, що узгодження сплайнового базису з амплітудним спектром даних дозволяє ефективно виконати наближення за методом найменших квадратів. Це означає, що дані можна стиснути (у даному випадку в 32 рази), а потім відновити вхідні дані з малим рівнем втрат. При цьому зовсім не обов'язково мати аналітичні вирази для сплайнових базисів, достатньо мати дискретні відліки. Це значно спрощує процедуру наближення. Основне обмеження, що стосується базисів та вхідних даних, – це можливість отримати амплітудні спектри та відповідні імпульсні функції – сплайнові базиси.

Список літератури

1. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets. CBMS Lecture Series. SIAM, 1992.

2. *Pennebaker W.B. and Mitchell J.L.* Still Image Data Compession Standart, JPEG. –New York: Van Nostrand Reihold, 1992.

3. *Турчак В.В., Шелевицький І.В., Шутко В.М.* Необмежені сплайни в задачах фільтрації та стиснення даних // Вісник КМУЦА: Зб. наук. праць. –К.: КМУЦА. – 1998. – № 1. –С. 275-279.

4. *Шелевицький І.В.* Ефективність оцінок методу найменших квадратів для сплайнової моделі // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: Зб. наук. праць. - Дніпропетровськ: Навчальна книга. – Т. 1. –1999. – С. 129-135.

Стаття надійшла до редакції 7 грудня 1999 року.