ББК 052-04-021,1 В 647
УДК 656.7.052

А.Ф.Приставка, И.В. Мозговая,А.В. Миначева

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СРЕДА ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ АВИАЦИОННЫХ АГРЕГАТОВ

Предложена схема оценки характеристик надежности авиационных агрегатов. Рассмотрены решения задач идентификации, восстановления и аппроксимации смесей распределений.

При оценке характеристик надежности авиационных агрегатов следует учитывать не только отказы, приведшие к летным происшествиям, но и отказы, которые не создают аварийную ситуацию. Тем самым накопленный эксплуатационный массив данных является неоднородным, что определяет использование смесей и сплайн-распределений. Использование смесей

$$F(x,\bar{\theta}) = 1 - \sum_{i=1}^{l} C_i F_i(x,\bar{\theta}_i),\quad \sum_{i=1}^{l} C_i = 1, 0 < C_1 < 1$$

обосновывается физикой отказов авиационных агрегатов, т.е. имеются два типа отказов: внезапные и постепенные, связанные с износом и усталостными накоплениями.

Ввиду сложности вычислительных процедур на практике используют смеси двух распределений. Наиболее распространенными при решении задач надежности являются смеси распределений :

нормальных: $$F_i(x,\bar{\theta}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-(t-m_i)^2 / 2\sigma_i^2\right) dt;$$

экспоненциальных: $F_i(x,\bar{\theta}_i) = 1 - \exp(-\lambda_i x)$;

Вейбулла: $F(x,\bar{\theta}_i) = 1 - \exp(-x^{\beta_i}/\alpha_i)$.

К наиболее распространенным типам сплайн-распределений могут быть отнесены нормальное, экспоненциальное,Вейбулла, логарифмически нормальное.

Предлагаемая схема оценки характеристик надежности состоит из этапов идентификации, восстановления и аппроксимации смесей распределений. Схема решения задачи идентификации смесей по статистическим данным $\{x_i, F_n(x_i), i=\overline{1,n}\}$ основана на графическом методе и робастных коэффициентах вариации:

$$\gamma_l' = \frac{\int_0^\infty F^l(x,\bar{\theta})(1-F(x,\bar{\theta}))\,dx}{E\{\xi\}},\ \gamma_l'' = \frac{\int_0^\infty F(x,\bar{\theta})(1-F(x,\bar{\theta}))^l\,dx}{E\{\xi\}},\ l=1,2,\dots,\gamma_1' = \gamma_1'' = \gamma_1,$$

где $E\{\xi\}$ – математическое ожидание случайной величины ξ, имеющей функцию распределения $F(x,\bar{\theta})$.

Для вычислительной схемы разграничения смесей достаточно $l \le 2$.

Сравнительный анализ свойств коэффициентов вариации Пирсона W, робастных коэффициентов вариации смеси экспоненциальных распределений [1], диапазона варьирования робастных коэффициентов для смеси Вейбулла, определенного по результатам вычислительного эксперимента $-0.5 \le \gamma_1 \le 1, -3.5 \le \gamma_2' \le 4, -3 \le \gamma_2'' \le 2$ и схемы идентификации смеси нормальных распределений [2], позволяет предложить алгоритм идентификации смесей распределений (см. рисунок).

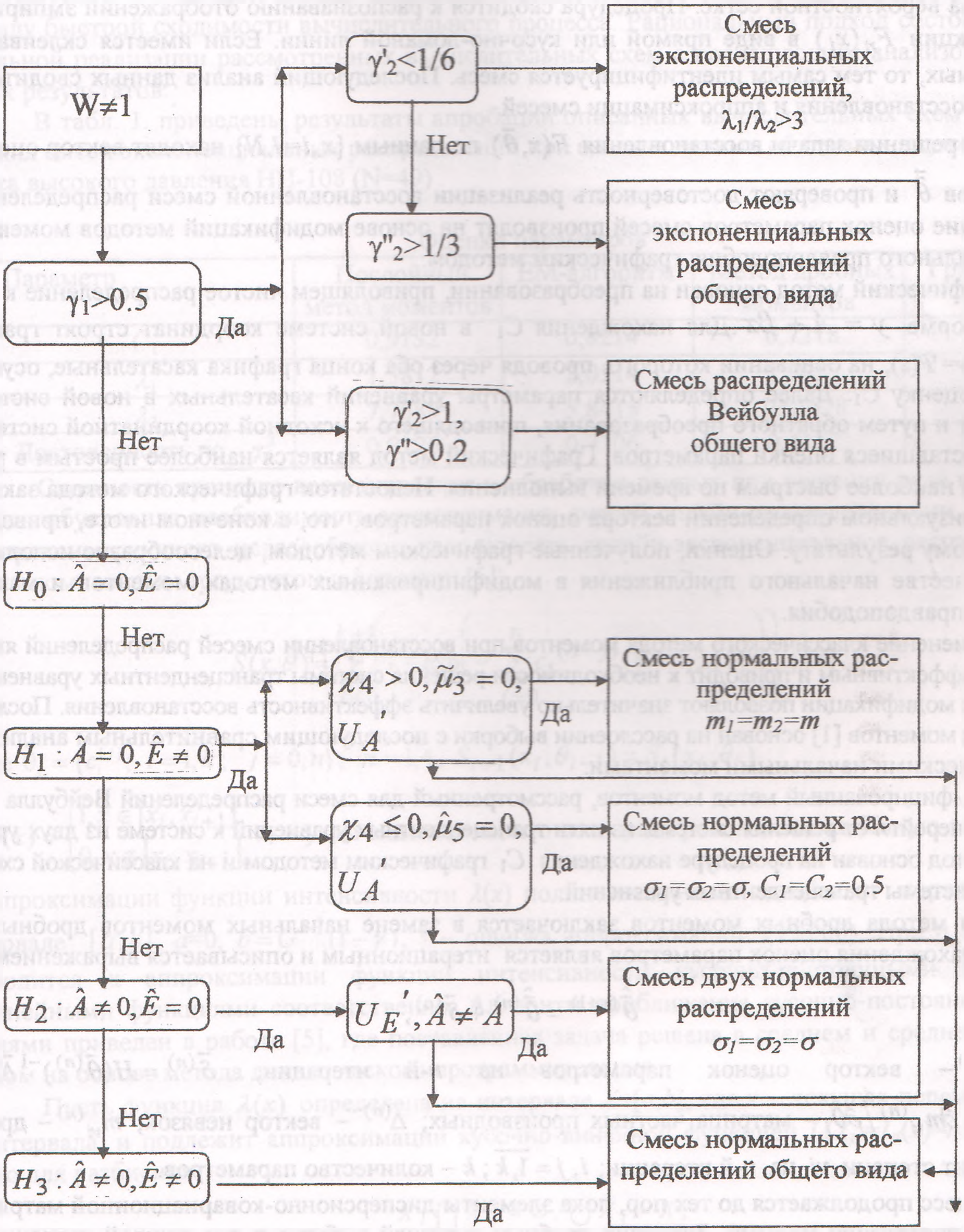

Схема идентификации смесей:
$\hat{A}, \hat{E}, \tilde{A}, \tilde{E}$ – смещенные и несмещенные коэффициенты асимметрии и эксцесса соответственно;
$\tilde{\mu}_i$ – несмещенные оценки центральных теоретических моментов μ_i; $\chi_4 = \mu_4 - 3\mu_2^3$

Процедура графической идентификации основана на преобразовании, приводящем "чистое" распределение к линейной форме вида $y = A + B z$, что дает экранное отображение распределения на вероятностной сетке. Процедура сводится к распознаванию отображений эмпирической функции $F_n(x_i)$ в виде прямой или кусочно-ломаной линии. Если имеется склеивание двух прямых, то тем самым идентифицируется смесь. Последующий анализ данных сводится к задачам восстановления и аппроксимации смесей.

При решении задачи восстановления $F(x,\bar{\theta})$ по данным $\{x_i, i=1,N\}$ находят вектор оценок параметров $\hat{\bar{\theta}}$ и проверяют достоверность реализации восстановленной смеси распределений. Нахождение оценок параметров смесей производят на основе модификаций методов моментов и максимального правдоподобия, графическим методом.

Графический метод основан на преобразовании, приводящем чистое распределение к линейной форме $y = A + \beta z$.Для нахождения C_1 в новой системе координат строят график функции $y=\Psi(z)$, на основании которого, проводя через оба конца графика касательные, осуществляют оценку C_1. Далее определяются параметры уравнений касательных в новой системе координат и путем обратного преобразования, приводящего к исходной координатной системе, находят оставшиеся оценки параметров. Графический метод является наиболее простым в реализации и наиболее быстрым по времени выполнения. Недостаток графического метода заключается в визуальном определении вектора оценок параметров, что, в конечном итоге, приводит к случайному результату. Оценки, полученные графическим методом, целесообразно использовать в качестве начального приближения в модифицированных методах моментов и максимального правдоподобия.

Применение классического метода моментов при восстановлении смесей распределений является малоэффективным и приводит к необходимости решения системы трансцендентных уравнений, однако его модификации позволяют значительно увеличить эффективность восстановления. Послойный метод моментов [1] основан на расслоении выборки с последующим сравнительным анализом с теоретическими начальными моментами.

Модифицированный метод моментов, рассмотренный для смеси распределений Вейбулла [3], позволяет перейти от решения системы из пяти трансцендентных уравнений к системе из двух уравнений. Метод основан на процедуре нахождения C_1 графическим методом и на классической схеме решения системы трансцендентных уравнений.

Идея метода дробных моментов заключается в замене начальных моментов дробными. Процесс нахождения оценок параметров является итерационным и описывается выражением

$$\hat{\bar{\theta}}^{(n+1)} = \hat{\bar{\theta}}^{(n)} + \bar{\delta}^{(n)},$$

где $\hat{\bar{\theta}}^{(n)}$ – вектор оценок параметров на n-й итерации; $\bar{\delta}^{(n)} = H(\hat{\bar{\theta}}^{(n)})^{-1}\bar{\Delta}^{(n)}$, $H(\hat{\bar{\theta}}^{(n)}) = \partial m_{vi}{}^{(n)} / \partial\hat{\theta}_j$ – матрица частных производных; $\bar{\Delta}^{(n)}$ – вектор невязок; $m_{vi}{}^{(n)}$ – дробный момент степени vi на n-й итерации; $i, j = \overline{1,k}$; k – количество параметров.

Процесс продолжается до тех пор, пока элементы дисперсионно-ковариационной матрицы не станут достаточно малыми. Значения дробных степеней выбирают для каждой итерации в зависимости от текущего соотношения найденных оценок параметров.

Применение классического метода максимального правдоподобия в задачах идентификации и восстановления распределений связано с определенными вычислительными трудностями и нередко приводит к необходимости решения системы трансцендентных уравнений. Метод усреднения-максимизации (expectation-maximization (*EM*) method) позволяет облегчить процесс максимизации логарифмической функции максимального правдоподобия. Это метод особенно эффективен, когда *M*-шаг вычислительного процесса легче, чем максимизация исходной функции правдоподобия. Достоинством описанного метода является высокая достоверность получаемых результатов, к недостаткам следует отнести требование чрезмерно информативного пространства полных данных [4], что, в свою очередь, ведет к медленной сходимости.

Сравнительный анализ оценок параметров и достоверности согласования позволяет сделать следующие выводы. Наиболее достоверно восстанавливается смесь с помощью ЕМ-алгоритма и послойного метода моментов. Предпочтение имеет послойный метод моментов ввиду быстрой сходимости вычислительного процесса. Рациональный подход состоит в параллельной реализации рассмотренных вычислительных схем с последующим анализом полученных результатов.

В табл. 1. приведены результаты апробации описанных вычислительных схем восстановления смеси экспоненциальных распределений при анализе данных об отказах плунжерного насоса высокого давления НП-108 (N=49).

Таблица 1

Оценки параметров

Параметр	Послойный метод моментов	ЕМ-алгоритм	Метод дробных моментов	Графический метод
C_1	0,9132	0,8214	0,7218	0,6
λ_1	1,5812	2,0514	1,2653	1,4531
λ_2	7,7589	5,8415	10,6478	5,1829
Достоверность по χ^2	0,9126	0,7306	0,4152	0,6428

Сложность процедур восстановления и обработки данных при решении ряда прикладных задач обусловила необходимость аппроксимации смесей сплайн-распределениями. В качестве аппроксимирующего целесообразно использовать сплайн-экспоненциальное распределение с полиномиальным аргументом и k узлами [5]:

$$S(x,\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{k+1}\left(1-\exp\left(-\sum_{j=0}^{n} c_i^{(n-j)}(x-x_{i-1})^j\right)\right) I_i(x),$$

где $\vec{\theta}_i = \{c_i^{(j)};\ i=\overline{1,k};\ j=\overline{0,n}\},\ n=\overline{1,4},\ S_{i-1}(x_i,\vec{\theta}_{i-1}) = S_i(x_i,\vec{\theta}_i)$;

$I_i(x) = \begin{cases} 1, x\in[x_i,x_{i+1}] \\ 0, x\notin[x_i,x_{i+1}] \end{cases}$ x_i – узлы склеивания, что позволяет решить поставленную задачу путем аппроксимации функции интенсивности $\lambda(x)$ полиномиальными сплайнами порядка n на интервале $[a,b]$, a=0, $b=G^{-1}(1-\gamma)$, γ – ошибка аппроксимации ($\gamma\le 0.05$). При n =1, 2 задача сводится к аппроксимации функции интенсивности кусочно-постоянными и кусочно-линейными функциями соответственно. Алгоритм приближения кусочно-постоянными функциями приведен в работе [5], где поставленная задача решена в среднем и среднеквадратическом на основе метода динамического программирования.

Пусть функция $\lambda(x)$ определена на интервале $X=[a,b]$, где x – текущая переменная этого интервала, и подлежит аппроксимации кусочно-линейной функцией $L(X_i)=L_i(x)=m_i x+c_i$, такой, что для разбиения

$$X_i \bigcap_{i\ne j} X_j = \varnothing,\ \bigcup_i X_i = X,$$

имеется

$$\int_{X_i} [\lambda(x)-L(X_i)]^2\,dx = \min_{m_i,c_i} \int_{X_i} [\lambda(x)-m_i x - c_i]^2\,dx.$$

Задача сводится к наилучшему разбиению интервала X, т.е. нахождению таких точек $a = x_{k+1} < x_k < \ldots < x_1 < x_0 = b$, что среднеквадратическая погрешность аппроксимации

$$R_{[a,b]} = \min_{a=x_{n+1}<x_n<\ldots<x_1<x_0=b} \sum_{i=-1}^{n} \int_{x_{i+1}}^{x_i} [\lambda(x)-m_i x - n_i]^2\,dx$$

является минимальной. Решение общей задачи сводится к многократному решению локальных задач аппроксимации при фиксированных x_{i+1} и x_i. Дополняя описанный принцип минимизацией погрешности аппроксимации при переходе от функции с k узлами к функции с $k+1$ узлом с оптимальным выбором узла склеивания с учетом непрерывности аппроксимирующей функции, получим первую вычислительную схему аппроксимации непрерывной функции интенсивности кусочно-линейной функцией.

Вторая схема представляет собой модификацию первой, причем на каждом шаге дробится один из граничных участков аппроксимирующей кривой, имеющий большую среднеквадратическую погрешность приближения, а полученные узлы фиксируются. Третья схема базируется на классическом виде кривой $\lambda(x)$, характерном для многих элементов. На первом шаге производится аппроксимация функции интенсивности постоянной функцией, что соответствует периоду нормальной работы элемента. На последующих двух шагах, используя принцип оптимальности, вычисляют параметры левого и правого линейных участков аппроксимирующей функции, что соответствует периодам приработки и старения элемента соответственно. Пошаговое описание алгоритмов приведено в работе [5].

В табл. 2 приведены результаты аппроксимации смеси двух экспоненциальных распределений сплайн-экспоненциальным распределением с параболическим аргументом с тремя узлами по первой вычислительной схеме.

Таблица 2

Результаты аппроксимации

Параметры смеси	Параметры m_i, c_i	сплайна узлы x_i	Погрешность аппроксимации
$C_1=0{,}9132$ $\lambda_1=1{,}5812$ $\lambda_2=7{,}7589$ Интервал аппроксимации [0;100]	$m_1=2{,}4686$ $c_1=4{,}5631$ $m_2=5{,}9787$ $c_2=3{,}0897$ $m_3=6{,}9876$ $c_3=2{,}6786$ $m_4=9{,}4688$ $c_4=7{,}9767$	$x_3=70{,}7654$ $x_2=54{,}28$ $x_1=10{,}4238$	4,8656E-03

Сравнительный анализ работы описанных схем показывает, что применение первой схемы дает наилучшую среднеквадратическую погрешность аппроксимации, но время ее работы превышает время работы второй и третьей схем.

Список литературы

1. *Приставка А.Ф., Райко О.В., Малаховская Н.Л.* Сплайн-экспоненциальное распределение: сравнительный анализ, идентификация, реализация в задачах надежности. - Днепропетровск: ДГУ, 1989. – 404 с.

2. *Приставка А.Ф., Райко О.В.* Смеси и сплайн-распределения на неоднородных нормальных пространствах. – Днепропетровск: ДГУ, 1989 – 98 с.

3. *Мозговая И.В., Приставка А.Ф.* Идентификация и восстановление смеси распределений Вейбулла по статистическим данным // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. – Днепропетровск: ДГУ, 1998. – С. 123-127.

4. *Dempster A.P. Laird N.M., Rubin A.O.* Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // J. Royal Stat. Soc. Series B. Vol. 39. № 1. - 1977. - P. 1-38.

5. *Мозговая И.В.* Аппроксимация функции интенсивности кусочно-линейными функциями // Придніпровський науковий вісник. – 1998. – № 101 (168) . - С. 6-10.

Стаття надійшла до редакції 18 листопада 1999 року.