

В.Т. Мовчан, Л.А. Романюк

НОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗРАХУНКУ ТУРБУЛЕНТНИХ ПРИСТІННИХ ТЕЧІЙ

Наведено простий числовий метод розрахунку турбулентних пристінних течій. Основу методу складає алгебраїчна модель типу «кінетична енергія турбулентності», в якій замість додаткового наближеного диференціального рівняння використано власні наближено-аналітичні залежності. Виконане порівняння отриманих розрахунків та результатів інших авторів з експериментами підтвердили дієвість методу, його можливість достовірно прогнозувати розвиток турбулентної течії та можливий відрив.

Математичні моделі турбулентних течій, які використовуються при вирішенні багатьох задач авіації, космонавтики, енерго-, машино- та кораблебудування, екології, технологічних процесів, навколишнього середовища, прикладних наук, формулюються у вигляді системи диференціальних рівнянь в частинних похідних. Розмаїття явищ, які тісно пов'язані з турбулентними течіями, вимагає знань як певних домінуючих закономірностей, так і притаманних окремим з них.

Система диференціальних рівнянь, що описує турбулентний рух, не замкнена, а тому потрібні додаткові гіпотези для її замикання. У роботі одного з авторів [1] запропонована єдина алгебраїчна модель коефіцієнта турбулентної в'язкості для всього примежового шару, яка дозволила відтворити основні характеристики різноманітних турбулентних течій – сильноградієнтних, рівноважних, за виступами і т.ін. Виявилось, що коефіцієнти моделі є функціями багатьох характерних параметрів течії. При врахуванні таких функціональних залежностей вдалося розв'язати багато важливих задач з достатньою для практики точністю і, що особливо важливо, передбачити можливий відрив течії від поверхні.

У роботі [2] для побудови наближено-аналітичних розв'язків для кінетичної енергії турбулентності та швидкості її дисипації отримана і опробована така формула коефіцієнта турбулентної в'язкості:

$$v_t = C_1 \sqrt{E} \Delta t h \frac{\ell V_* \sqrt{\tau_+}}{C_1 \Delta \sqrt{E}}, \quad (1)$$

де C_1 – емпіричний коефіцієнт; E – кінетична енергія турбулентності; Δ – параметр довжини Ротта-Клаузера; ℓ – характерна довжина перемішування; $\tau_+ = \frac{\tau_0}{\tau_w}$; τ_0 – напруження

тертя в околі стінки; τ_w – напруження тертя на стінці; $\tau_w = 1 + \Phi \bar{y}$ для додатного і $\frac{1}{(1 - \Phi \bar{y})}$

для від'ємного градієнтів тиску; $\Phi = \frac{\delta}{\tau_w} \frac{\partial p}{\partial x}$ – параметр Федяєвського; δ – товщина приме-

жового шару; p – тиск; $\bar{y} = \frac{y}{\delta}$; y – поперечна координата в прямокутній декартовій системі на площині; V_* – динамічна швидкість.

Для масштабу довжини ℓ використана залежність з алгебраїчної моделі [1]

$$\ell = ky th \frac{sh^2(\chi_1 y^+) th[sh^2(\chi_2 y^+)]}{ky^+ \sqrt{\tau_+}}, \quad (2)$$

де k, χ_1, χ_2 – емпіричні коефіцієнти моделі; $y^+ = \frac{yV_*}{\nu}$; ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості.

У цій роботі моделі (1) і (2) використовуються в числовому методі розрахунку турбулентної пристінної течії з використанням методу прямих. Для побудови розрахункового методу застосовуються рівняння Прандтля для турбулентної течії

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

де U – поздовжня, V – поперечна до обічної поверхні складові осередненої швидкості; τ – сумарне напруження тертя.

Система (3) попередньо обезрозмірювалася і використовувались нові змінні $Y_1 = U/U_n$, $Y_2 = \sqrt{\nu/\rho} U_n^2$, $Y_3 = V/U_n$, $X = x/L$, $Y = y/L$, де L – довжина поверхні, U_n – швидкість поза межами примежового шару. Похідна $\frac{dU}{dx}$ замінювалась скінченною різницею $\frac{U(x, y) - U(x - \Delta x, y)}{\Delta x}$. Нескладні перетворення дозволили прийти до системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dY_1}{dY} = f,$$

$$\frac{dY_2}{dY} = Y_1 \frac{Y_2 - Y_1}{\Delta x} + Y_3 f + \frac{Y_2 - 1}{U_n} \frac{dU_n}{dx},$$

$$\frac{dY_3}{dY} = \frac{Y_1^* - Y_1}{\Delta x} - \frac{Y_1}{U_n} \frac{dU_n}{dx}, \quad (4)$$

де $f = \frac{\rho U_n L Y_2}{(\nu + \nu_t)}$, $Y_1^* = Y(x - \Delta x, y)$.

Граничні умови для системи (4) мають вигляд:

$$Y_1 = 0, Y_2 = Y_{2w}, Y_3 = 0 \text{ при } X = 0;$$

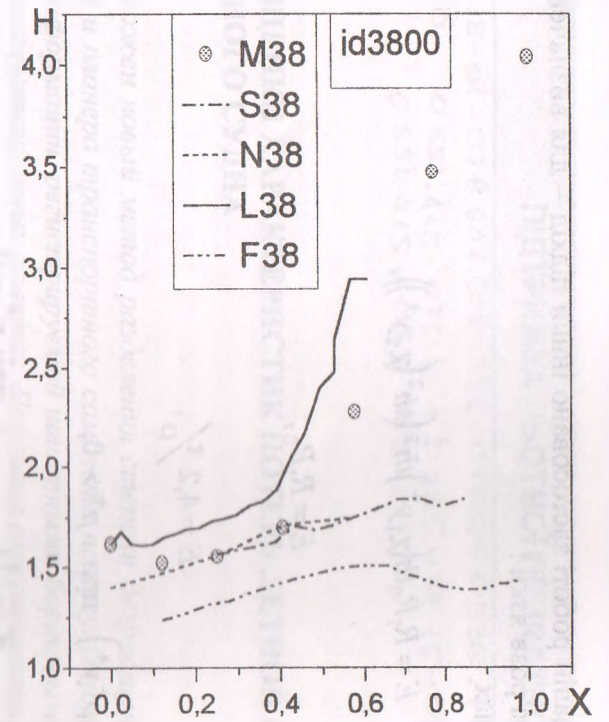
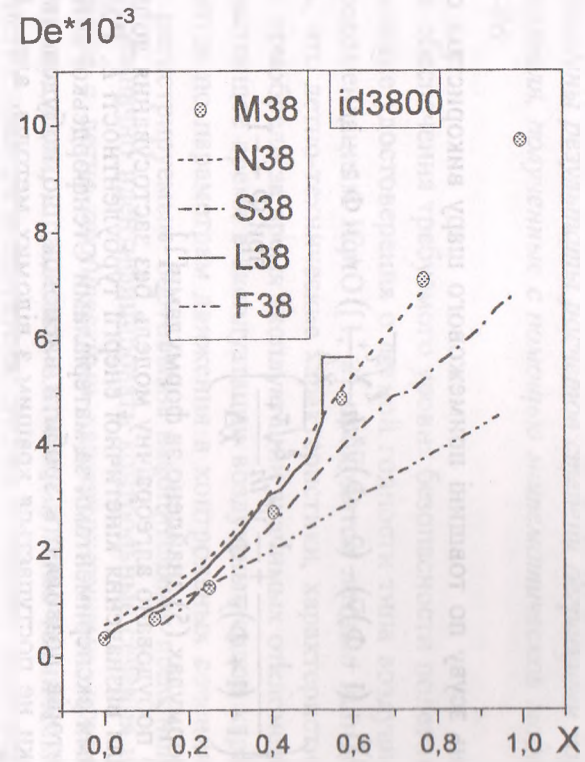
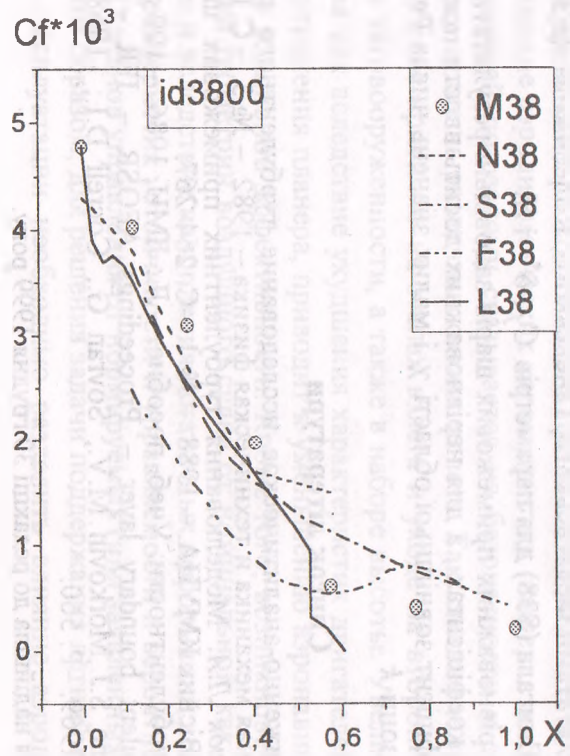
$$Y_1 = 1, Y_2 \rightarrow 0, Y_3 \rightarrow 0 \text{ при } Y \rightarrow \infty(\delta).$$

Значення Y_{2w} невідоме, а тому воно знаходиться у процесі розв'язування задачі методом пристрілки. У кожному перетині $X = \text{const}$ розв'язується задача Коші з використанням початкових умов:

$$Y_1 = 0, Y_2 = Y_{2w}, Y_3 = 0 \text{ при } X = 0.$$

Для реалізації числового методу в початковому перетині з експерименту задавалися величини Δ, H і Cf . Товщина примежового шару знайдена за методикою, [1].

Розрахунки системи (4) неможливі без знань значень кінетичної енергії турбулентності E . Традиційно для знаходження кінетичної енергії турбулентності будують додаткове дифе-



Порівняння розрахункових параметрів з експериментальними даними та результатами інших авторів

ренціальне рівняння [3]. У даній роботі застосовано інший підхід – для визначення E використано наближено-аналітичні розв'язки :

в перехідній і в'язкій зонах

$$E = R_1 R_0 th(\chi_1 y^+) th^{\frac{1}{2}}(sh^2(\chi_2 y^+)),$$

в логарифмічній зоні

$$E = R_1 R_0,$$

в зовнішній області

$$E = 4,2 \frac{\tau}{\rho},$$

де $R_0 = \frac{v_x^2}{\sqrt{\ell_1}}, \quad R = (1 + p^+ y^+) \text{ при } p^+ > 0,$

$$R_1 = 1 \quad \text{при } p^+ = 0, \quad R_1 = \frac{1}{(1 - p^+ y^+)} \text{ при } p^+ < 0.$$

$$p^+ = \frac{v}{\rho V_*} \frac{dp}{dx}.$$

Для розподілу напружень зсуву по товщині примежового шару використані степеневі апроксимації [1]

$$\tau(\bar{y}) = \begin{cases} \tau_w (1 - \bar{y}) (1 + (1 + \Phi) \bar{y}) - (2 + \Phi) \bar{y}^n th \frac{\ell \sqrt{\tau_+}}{\chi \Delta} & \text{при } \Phi \geq -1, \\ \tau_w (1 - \bar{y}) \left(\frac{1}{1 - (1 + \Phi) \bar{y}} + \frac{1}{\Phi} \bar{y}^n th \frac{\ell \sqrt{\tau_+}}{\chi \Delta} \right) & \text{при } \Phi < -1. \end{cases} \quad (5)$$

Показник степеня n у формулах (5) знайдено за формулами [1].

Таким чином, фактично побудовано алгебраїчну модель без застосування додаткового диференціального рівняння для визначення кінетичної енергії турбулентності E . Розрахунки при порівнянні їх з канонічними експериментами за матеріалами Стенфордської конференції [4] та результатами інших авторів дозволяють зробити висновок, що побудований новий розрахунковий метод не тільки не поступається кращим з відомих методів, але в багатьох випадках дає кращі результати.

На рисунку показано співставлення розрахункових ($L38$) та експериментальних результатів Мозеса ($M38$) [4] з результатами Федяєвського, Гіневського, Колеснікова ($F38$); Новожилова ($N38$); Сполдінга та Сингала ($S38$) для параметрів C_f , δ^* і H .

Слід зазначити, що для рівноважних примежових шарів задовільні результати отримано при постійних модельних коефіцієнтах, а для нерівноважних досить ввести поправки на вплив градієнта тиску на коефіцієнт зовнішньої області χ і малих значень числа Рейнольдса на коефіцієнт логарифмічної зони k .

Список літератури

1. Мовчан В.Т. Приближенно-аналитическое исследование турбулентного градиента пограничного слоя // Прикладная механика и техническая физика. – 1982. – № 3. – С. 102-111.
2. Мовчан В.Т., Романюк Л.А. Моделирование турбулентных примежових шарів при від'ємних градієнтах тиску // Вісник КМУЦА. – 1988. – № 1. – С. 264-267.
3. Белов И.А. Модели турбулентности: Учеб. пособие. – Л.: ЛМИ, 1986. – 100 с.
4. Computation of turbulent boundary layer – Proceedings AFOSR – IFR – Stanford Conference – Vol.1.- Ed. Kline S.J., Morkovin M.V., Sovran G., Cocrell D.I.; -1968. – Vol.2. – Ed. Coles D.E., Hirst E.A. – 1969. – P. 560.

Стаття надійшла до редакції 30 грудня 1999 року.