

УДК 532.517.2

Е.А. Гаева, Е.А. Гаев

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ЛЕГКОПРОНИЦАЕМОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

Задача о движении вязкой жидкости в бесконечно протяженном плоском канале под действием периодически изменяющегося давления обобщена на случай присутствия у стенок канала слоев с распределенной массовой силой, пропорциональной локальной скорости легкопроницаемой шероховатости (ЛПШ). По аналитическому решению, полученному в комплексных числах, построены изменяющиеся во времени распределения скорости поперек канала в отсутствие и при наличии ЛПШ для двух характерных частот пульсирования давления.

Ламинарное течение несжимаемой жидкости под действием нестационарного флуктуирующего продольного градиента давления $p' = p'_0 + a \cos \omega t$ рассмотрим лишь на стабилизированном участке плоского канала, с наличием у его стенок ЛПШ. Такая задача представляет интерес как дальнейшее изучение гидромеханических свойств проницаемой шероховатости [1] и как некоторая схематизация явлений турбулентности. Она может найти применение в технических (привод вибраторов) и биологических задачах (движение крови в склеротических сосудах).

Интересующее нас течение в плоском канале математически проще, чем осесимметричное течение в круглой трубе. Тем не менее готовое решение для случая гладких стенок (т.е. в отсутствие ЛПШ) нами в литературе не найдено: В литературе приведены постановки и решения задач о нестационарном течении лишь для круглой трубы [2 - 4]. Последуем стандартному приему математической физики отыскания периодических решений, описанному, в частности, Глихтингом [5], со ссылкой на ряд оригинальных работ. Оно будет получено как частный случай более общей задачи наличия у стенок некоторой ЛПШ заданной густоты и высоты и будет служить сопоставительному анализу задачи.

Пусть у стенок длинного канала высотой $2H$, симметричного относительно оси канала $z = H$, имеются слои с большим количеством малых препятствий ЛПШ некоторой высоты h , ($h < H$). На участке канала, достаточно удаленном от его входного и выходного оголовков, установится, как известно, некоторое "стабилизированное", не зависящее от продольной координаты, распределение скорости течения жидкости через сечение канала $U(z)$. Для постоянного градиента давления p' оно найдено в работе [1]. В практике может встретиться также случай периодического изменения градиента давления

$$\frac{p'(t)}{\rho} = \frac{p'_0}{\rho} + a_p \cos \omega t. \quad (1)$$

Обезразмеренные уравнения движения жидкости записываем отдельно для течений внутри и вне ЛПШ с условием сопряжения на границе раздела $z = h$:

при $z \in [0, \delta]$

$$\begin{cases} U_t = U_{zz} + 2(1 + a \cos \omega t) - AU, \\ z = 0, \quad U = 0, \\ U(\delta - 0) = U(\delta + 0), \end{cases}$$

при $z \in [\delta, 1]$

$$\begin{cases} U_t = U_{zz} + 2(1 + a \cos \omega t), \\ z = 1, \quad U_z = 0, \\ \tau(\delta - 0) = \tau(\delta + 0). \end{cases}$$

Безразмерное трение оказывается равным половине производной скорости: $\tau = \frac{1}{2} U_z$.
Безразмерные критерии представляют физические параметры течения [1]:

$$\bar{a} = \frac{\rho a_p}{p'_0}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega H^2}{\nu}, \quad A = \frac{k H^2}{\nu}, \quad \delta = \frac{h}{H}.$$

Решение получившейся задачи (1) в отсутствие “пульсаций” градиента давл получено нами ранее в работе [1]. Это решение стационарной задачи помечаем индексом s . Решение же изучаемой здесь нестационарной задачи в силу ее линейности и однородности краевых условий может быть представлено в виде суммы стационарной составляющей и нестационарной добавки, “пульсации”:

$$U(z, t) = U_s(z) + V(z, t).$$

Легко видеть, что эта нестационарная добавка удовлетворяет задаче сопряжения:
при $z \in [0, \delta]$

$$\begin{cases} V_t = V_{zz} + 2a \cos \omega t - AV, \\ z = 0 \quad V = 0, \\ V(\delta - 0) = V(\delta + 0), \end{cases}$$

при $z \in [\delta, 1]$

$$\begin{cases} V_t = V_{zz} + 2a \cos \omega t, \\ z = 1 \quad V_z = 0, \\ V_z(\delta - 0) = V_z(\delta + 0). \end{cases}$$

Безразмерное вязкое трение в потоке связано с поперечным градиентом добавки скорости следующим образом:

$$\tau(z, t) = \tau_s(z) + \frac{1}{2} V_z(z, t).$$

Задача (2) для $V(z, t)$ имеет и самостоятельное значение: она описывает периодическое возвратно-поступательное течение жидкости при нулевом среднем градиенте давл $p'_0 = 0$. Именно этот случай, когда $U_s \equiv 0$ в силу $p'_0 = 0$, и будем рассматривать.

Чтобы найти решение задачи сопряжения (2), рассмотрим добавки $V(z, t)$ вещественные составляющие более общих комплекснозначных уравнений

$$V_t = V_{zz} + 2ae^{i\omega t} - AV \quad \text{при } z \in [0, \delta] \quad \text{и} \quad V_t = V_{zz} + 2ae^{i\omega t} \quad \text{при } z \in [\delta, 1].$$

Решение этих задач ищем в виде [5,7]:

$$V(z, t) = Z(z) \exp(\gamma t), \quad (5)$$

где Z – комплекснозначная функция вещественного аргумента z ; γ – комплексное число. Легко видеть, что такое решение существует, если $\gamma = i\omega$ и оно удовлетворяет комплекснозначным (в общем случае) уравнениям

$$Z'' - (A + \gamma)Z + 2a = 0 \quad \text{при } z \in [0, \delta] \quad \text{и} \quad Z'' - \gamma Z + 2a = 0 \quad \text{при } z \in [\delta, 1].$$

Таким образом, приходим к задаче сопряжения для комплекснозначной функции Z от действительного аргумента z :

при $z \in [0, \delta]$

$$\begin{cases} Z'' - (A + i\omega)Z = -2a, \\ Z(0) = 0 \\ Z(\delta - 0) = Z(\delta + 0), \end{cases} \quad (6)$$

при $z \in [\delta, 1]$

$$\begin{cases} Z'' - i\omega Z = -2a, \\ Z'(1) = 0, \\ Z'(\delta - 0) = Z'(\delta + 0). \end{cases} \quad (7)$$

Стандартной техникой решение уравнения 4 (обыкновенного линейного дифференциального второго порядка) может быть представлено в виде следующей суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$Z = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} + \frac{2a}{M^4} (A - i\omega), \quad Z' = \lambda (C_1 e^{\lambda z} - C_2 e^{-\lambda z}),$$

где корень характеристического уравнения $\lambda = \sqrt{A + i\omega} = Me^{-i\varphi/2}$. Значения коэффициентов C_1 и C_2 можно найти из граничных условий (4) – (5). Запись решения будет лаконичнее, если применить следующий прием.

Значение аргумента $z = \delta$ является общим для обеих задач. Значения функции в этой точке $Z(\delta)$ и ее производной $Z'(\delta)$, хотя они пока и неизвестны, используем вместо граничных условий (5) для записи общего вида решения. После определения C_1 и C_2 из системы двух линейных алгебраических уравнений приходим к следующему представлению решения левой краевой задачи $z \in [0, \delta]$ (помечаем его индексом 1):

$$Z_1(z) = (Z(\delta) - \frac{2a}{A + i\omega}) \operatorname{ch}(\lambda_1(z - \delta)) + \frac{1}{\lambda_1} Z'(\delta) \operatorname{sh}(\lambda_1(z - \delta)) + \frac{2a}{A + i\omega}, \quad (8)$$

где $\lambda_1 = \sqrt{A + i\omega} = M_1 \exp \frac{1}{2} \varphi_1 i$, $M_1^2 = \sqrt{A^2 + \omega^2}$, $\cos \varphi_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + \omega^2}}$.

Формально подставляя $A = 0$, получаем решение и для правой краевой задачи $z \in [\delta$ (помечаем решение индексом 2):

$$Z_2(z) = (Z(\delta) - \frac{2a}{i\omega}) \operatorname{ch}(\lambda_2(z - \delta)) + \frac{1}{\lambda_2} Z'(\delta) \operatorname{sh}(\lambda_2(z - \delta)) + \frac{2a}{i\omega},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{i\omega} = M_2 \exp \frac{1}{2} \varphi_2 i, \quad M_2^2 = \omega, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь формальные параметры $Z(\delta)$ и $Z'(\delta)$ легко найти из краевых условий левой правой задач (4):

$$Z(\delta) = \frac{2a(1 - \operatorname{ch}(\lambda_1 \delta_1)) e^{-i\varphi_1}}{M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_2} \operatorname{ch}(\lambda_1 \delta_1) \operatorname{ch}(\lambda_2 \delta_2) + \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{sh}(\lambda_1 \delta_1) \operatorname{sh}(\lambda_2 \delta_2) \right)} \frac{\operatorname{ch}(\lambda_2 \delta_2)}{\lambda_2}; \quad (1)$$

$$Z'(\delta) = - \frac{2a(1 - \operatorname{ch}(\lambda_1 \delta_1)) e^{-i\varphi_1}}{M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_2} \operatorname{ch}(\lambda_1 \delta_1) \operatorname{ch}(\lambda_2 \delta_2) + \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{sh}(\lambda_1 \delta_1) \operatorname{sh}(\lambda_2 \delta_2) \right)} \operatorname{sh}(\lambda_2 \delta_2).$$

где $\delta_1 = \delta$; $\delta_2 = 1 - \delta$.

Выражения (6) – (8) и дают решение комплекснозначной задачи (4). Выделяя в последней вещественную часть, получаем решение для “пульсаций” (2) согласно уравнению (3):

$$V(z, t) = \operatorname{Re}(Z \exp(i\omega t)) = \operatorname{Re}(Z \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(Z) \sin(\omega t)). \quad (11)$$

Полученные аналитические выражения весьма громоздки. Однако легко по ним выполнять вычисления на любом из алгоритмических языков.

Приступим к анализу полученного решения уравнений (6) - (9).

Ясно, что при градиенте давления, пульсирующем по закону

$$p' = a \cos \omega t, \quad (12)$$

в канале установится периодическое возвратно-поступательное движение с периодом колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Рассмотрим сначала случай отсутствия ЛПШ в канале, что отвечает значениям параметров $\delta = 0$ или $A = 0$. На рис. 1 и 2 (в их нижних частях) показаны распределения скорости в канале без ЛПШ в последовательные моменты времени в пределах одного цикла колебаний давления. Рисунки позволяют сопоставить течения при малой и высокой частотах колебаний.

Все профили скорости проходят через ноль в силу граничного условия прилипания на стенке. При “малой” частоте колебаний (для примера на рис. 1 взято $\omega = 1$ при безразмерной амплитуде $a = 2.5$) профили скорости в каждый момент времени имеют монотонный параболический вид, т.е. следуют закону Пуазейля для канала [5; 6]. Движение жидкости при этом однонаправлено с градиентом давления (рис. 1, а). В момент времени “1”, $t = 0$ градиент

давления (10) положителен и максимален, а профиль скорости занимает крайне правое положение величина скорости положительна, жидкость в канале движется слева направо (положительное направление). В последующие моменты времени градиент давления уменьшается, сначала медленно, но с ускорением, и соответственно ведут себя профили скорости в моменты времени "2" $t = \Delta t = T/20$, "3" $t = 2\Delta t$, "4" $t = 3\Delta t$ и т.д. В момент времени "6", когда $t = 5\Delta t = T/4$, градиент давления равен нулю, и в последующие моменты становится отрицательным. Соответственно ведут себя профили скорости 7, ..., 11: скорость – отрицательна, жидкость движется справа налево.

В момент времени "11", когда $t = 10\Delta t = T/2$, градиент давления (10) имеет минимальное значение или точнее – максимальное отрицательное, и начинает затем убывать. Поэтому в последующие моменты времени "12", "13" и другие профили скорости перемещаются вправо (рис. 1, б), отрицательное движение ослабевает и постепенно замещается положительным, снова направленным слева направо в моменты времени "17", ..., "20". С дальнейшим ходом времени описанные колебания жидкости в канале периодически повторяются. Отметим, что уже при этом значении частоты $\omega = 1$ имеет место слабое "отставание" движения от изменений давления: при нулевом градиенте давления в моменты "6" и "16" скорости в канале не равны тождественно нулю.

На рис. 2 изображены профили скорости жидкости поперек канала при более высокой безразмерной частоте $\omega = 50$ (напомним, что лишь нижние половины рисунков представляют случай отсутствия ЛПШ). Можно видеть, что движение жидкости в моменты времени "1", "2" и "3" (рис. 2, а) происходит слева направо, сначала ускоренное, но замедляющееся в моменты "4", "5" и "6", после чего скорость убывает сначала медленно, затем все быстрее в моменты времени "8", "9" и "10" (рис. 2, б). В последующие моменты времени движение в канале будет направлено уже в обратную отрицательную сторону, затем снова в положительную (эти моменты времени на рисунке не показаны), и далее периодически.

Период этих колебаний $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ в 50 раз меньше, чем в предыдущем случае.

Можно видеть, что отставание потока от изменений давления в случае высокочастотных колебаний значительно возросло по сравнению с предыдущим случаем низкочастотных осцилляций: в момент времени "6", когда градиент давления равен нулю, профиль скорости только-только "перевалил" через крайнее правое положение. А в момент времени "11", когда градиент достиг максимальной отрицательной величины (и при котором в первом расчетном случае жидкость двигалась влево с максимально возможной скоростью), жидкость все еще продолжает течь в положительном направлении слева направо. Такое отставание по фазе колебаний объясняется инерционностью жидкости. В области течения вблизи стенок, где скорость жидкости не велика, она "более послушно" следует за изменением градиента, вследствие чего в моменты времени "9" и "10" у стенок появляются зоны противоположно направленного (в данном случае – отрицательно) движения, на профилях скорости появляются локальные минимумы.

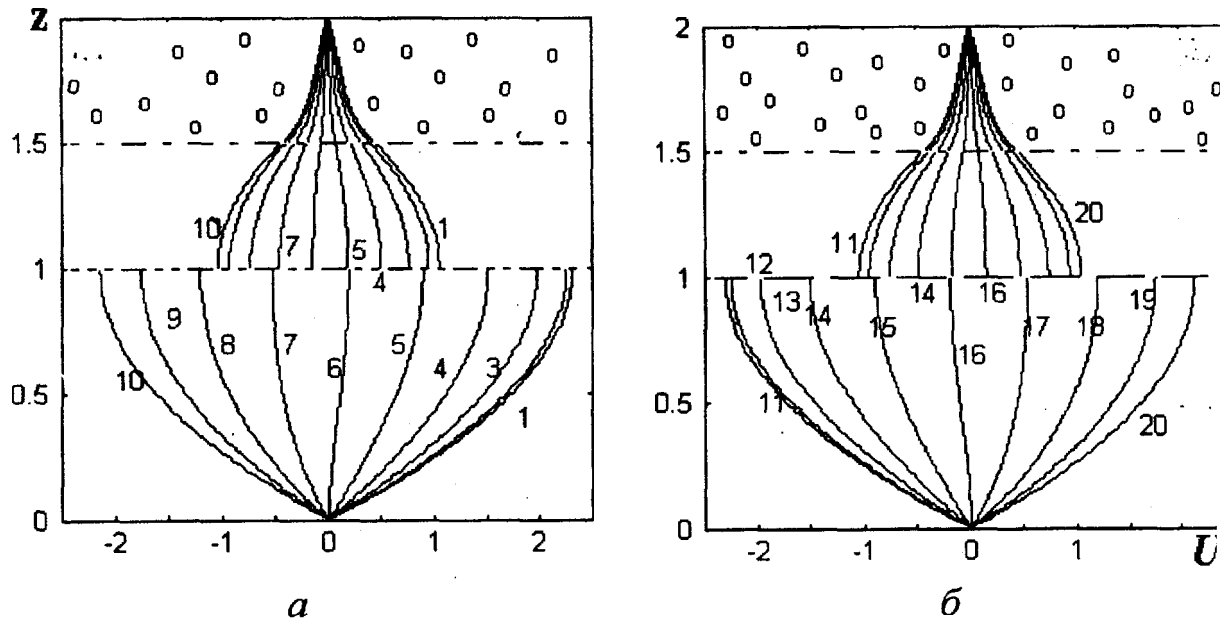


Рис. 1. Последовательные профили скорости потока через сечение плоского канала в моменты времени $1 - t = 0, 2 - t = \Delta T, 3 - 2\Delta T$, и т.д.) при пульсационном изменении давления с амплитудой $a = 2,5$ и "малой" частотой $\omega = 1$: a и b – первая и вторая половины периода колебаний T (внизу – канал без ЛПШ, сверху – канал с ЛПШ, $\delta = 0,5, A = 50$)

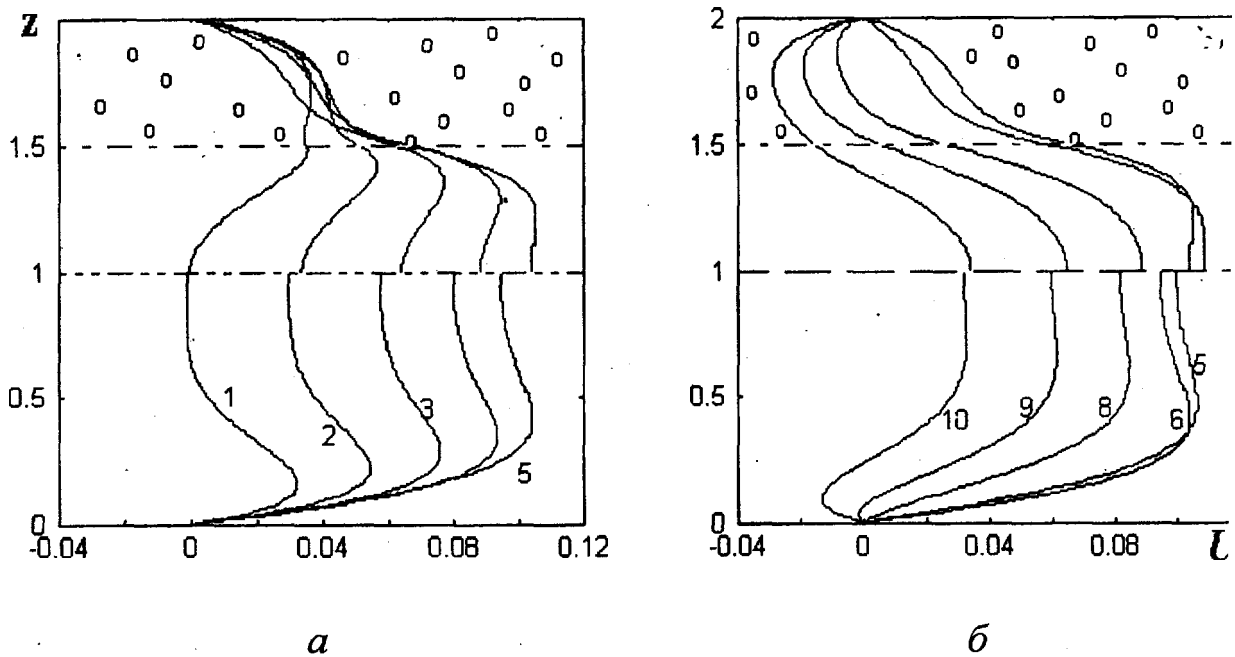


Рис. 2. Последовательные профили скорости потока (в моменты времени $1 - t = 0, 2 - t = 3 - 2\Delta T$ и т.д.) при пульсационном изменении давления с амплитудой $a = 2,5$ и высокой частотой $\omega = 50$: a и b – первая и вторая четверти периода колебаний T (внизу – канал без ЛПШ, сверху – канал с ЛПШ, $\delta = 0,5, A = 100$)

Такие эффекты уже описаны в литературе [2, 3, 4], хотя и мало известны в етической гидромеханике. Теперь рассмотрим какие изменения вносит в поток устье в нем ЛПШ. Расчетные профили течений показаны в верхних частях рис. 1 и 2 ЛПШ некоторой плотности A_F , занимающей половину сечения канала (т.е. $\delta = 0.5$), напомним, расположение ЛПШ в канале и соответственно течение в нем, метричны относительно оси $z=1$. На рис. 1 и 2 отмечены области у стенок, оленные препятствиями.

Движение вязкой жидкости в канале с ЛПШ также изменяется периодически с ходом $T = 2\pi/\omega$ (жидкость течет сначала слева направо, а затем в отрицательном направлении – справа налево, и т.д.). По нумерации профилей скорости на рисунках можно определить, к какому моменту времени относится то или иное распределение, ибо в ом их последовательность соответствует случаю без ЛПШ.

Итак, если поместить ЛПШ безразмерной плотности $A = 50$ в низкочастотном сирующий поток (см. рис. 1), то амплитуда изменения скорости упадет примерно в два . Такой результат совершенно естественен, поскольку ЛПШ представляет собой ольное (к трению о стенки) гидравлическое сопротивление в канале. ределение скоростей состоит из двух частей: "заторможенное" в слое препятствий и болическое в свободной части канала. В каждый момент времени оно имеет примерно ой же вид, какой был бы в стационарном течении с соответствующим градиентом ения и при наличии ЛПШ [1]. Если ЛПШ будет более плотной, то, как показывают еты, движение в слое препятствий угасает до полного застоя и сосредоточивается лишь обойной части канала так, если бы в пределе канал был уменьшенной ширины $2(1-\delta)$ с дкими стенками. А помещение ЛПШ в канал с высокочастотными изменениями давления т к более неожиданным результатам, в корне отличным от стационарного решения. Как о из рис. 2 амплитуда изменений скорости не уменьшилась по сравнению со случаем тствия ЛПШ (нижняя часть рис. 2), а даже слегка увеличилась в свободном сечении ла (профили в моменты времени "5" и "6"), и увеличились также амплитуда "локальных имумов" в заторможенной части течения и размеры областей, охваченных тивоположно направленным движением (профили 8, 9 и 10). Такой эффект эквивалентен ышению гидравлического сопротивления канала. Наличие ЛПШ уменьшает также сдвиг между колебаниями давления и скорости.

Обнаруженное влияние ЛПШ на поток может быть использовано для управления сирующими потоками в технических устройствах. Полученное решение реализовано в е программы для персонального компьютера, графически аннимирующей периодическое жение жидкости в канале, которая может быть использована в учебном процессе.

Список литературы

1. Гаев Е.А. Влияние особенностей легкопроницаемой шероховатости на гидродинау ламинарного потока //Гидромеханика, 50, 1984/ С. 44-52 (Англ. перевод: Effect of Easily etrable Roughness on the Hydrodynamics of Laminar Flow. - Fluid Mech. - Soviet Research A), 19, No. 3, May - June 1990, p. 1 - 12).

2. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. М.: Машиностроение, 1982. - 240 с.
3. Галицейский Б.М., Рыжов Ю.А., Якуш Е.В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. - М.: Машиностроение, 1977, - 256 с.
4. Файзуллаев Д.Ф., Наврузов К. Гидродинамика пульсирующих потоков - Ташкент: Фан, 1986, - 192 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1969. - 742 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1973. - 848 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966. - 724 с.

Стаття надійшла до редакції 22 січня 1998 року.

Катерина Антонівна Гасва (1946) закінчила Харківський державний університет фіз.-математичних наук, кандидат фіз.-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Київського міжнародного університету цивільної авіації. Автор понад 40 праць в галузі диференціальних рівнянь, математичної фізики, а також навчальних і методичних посібників для студентів і школярів.



Katerina A. Gayeva (b. 1946) graduated from Charkov State University (1970). PhD in Phys.-Math. ass., professor of Higher Mathematics Department of Kyiv International University of Civil Aviation. Author of more than 40 publications on differential equations, mathematical physics, as well as tutorials for secondary school and high school students.

Євген Олександрович Гасв (1948) закінчив Харківський державний університет 1971 р. Кандидат фіз.-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту гідромеханіки НАН України. Автор понад 60 наукових праць в галузі гідромеханіки прилеглої області, тепломасопереносу, теоретичного і експериментального дослідження проникної шорсткості в потоках рідини і газу.



Yevgen O. Gayev (b. 1948) graduated from Charkov State University (1971). PhD in Phys.-Math. sciences, senior research associate of Hydromechanics of UNAS. Author of more than 60 publications in hydromechanics of boundary layers, heat and mass transfer, theoretical and experimental explorations of penetrable roughness in water and gas flows.