УДК 539.3

В.Л. **Бродовий**

РЕДУКЦІЯ КУТОВИХ ЧЛЕНІВ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗГИНУ ТОНКИХ ПЛИТ

Розглянуто проблему кутових точок і кутових неінтегральних членів при чисельному розв'язанні граничних інтегральних рівнянь згину тонких плит. Запропоновано перетворення цих членів на основі умови неперервності повного моменту у кутовій точці, яке дозволяє звести додаткові члени до поправок основних коефіцієнтів. Співвідношення виведені для лінійної розривної апроксимації щільностей потенціалів.

Вирішення проблеми кутових точок при застосуванні методу граничних елементів до статики тонких пружних плит - мета дослідження. Відомо [1], що для коректної постановки другої диференціальної задачі четвертого порядку про згин тонкої плити три "природні" граничні умови на зусилля зводяться до двох необхідних і достатніх, одна з яких - на узагальнену кірхгофівську перерізуючу силу. Внаслідок цього у моделі плити з кутовими точками виникають зосереджені кутові реакції - стрибки скручуючого моменту. При реалізації методу граничних елементів їх треба або розглядати як додаткові змінні [2], або певним чином від них позбавлятися.

У роботі [3] автором була запропонована нова методика перетворення позаінтегральних членів, яка дозволяє не вводити нових змінних, а натомість внести до коефіцієнтів алгебраїчних систем кутові, поправки. У наведених там співвідношеннях використовується кусково-стала аппроксимація щільностей потенціалів; крім того, при формулюванні співвідношень автор допустив неточність. Наведемо правильні формули для лінійної розривної аппроксимації, яка дозволяє більшу точність розрахунку навіть при однакових обчислювальних витратах.

Будемо виходити з інтегрального представлення компонентів згину з трьома ступенями вільності на границі:

г

Г 5

+ *і{н$_n$(ї)П$_n$<р;(г)-<р,(ї)П$_n$ІҐЛг)* **К**

г

де 5, Г - область, зайнята плитою, та її кусково-гладка границя; *n*, *і* - нормальний та дотичний д дг потенціалів, не узгоджену на кінцях елемента з сусідніми елементами (лінійна розривна апроксимація):

$$\Omega_n(t) = \Omega_n(t_1)\, L(t;t_1) + \Omega_n(t_2)\, L(t;t_2), \qquad L(t;t_i) = \frac{t - t_{3-i}}{t_i - t_{3-i}}. \tag{2}$$

Після підстановки апроксимант (2) у інтегральні рівняння (1) проінтегруємо їх частинами за граничними елементами з урахуванням таких співвідношень:

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial t} \ldots \qquad \hat{\Omega}\,\varphi^* = \frac{\partial}{\partial t}\,\hat{\Omega}\,w^* \ldots$$

$$\ldots \Omega_n \ldots + \ldots \Omega_n H_n = \Omega \ldots$$

де ... узагальнена кірхгофівська перерізуюча сила ... K^* – відповідний фундаментальний розв'язок ... одержимо такі алгебраїчні аналоги рівнянь (1):

$$\ldots (\xi^{(k)}) \ldots + M_n^{(k)}(\xi^{(k)}) \ldots \tag{3}$$

$$\ldots H_n^{(k)}(\xi^{(k)}) \ldots (\xi^{(k)}) \ldots$$

де $\xi_1^{(k)}$ та $\xi_2^{(k)}$ – кінці ... граничного елемента ... ерший неінтегральний член у правій частині рівняння (3) ... сумою членів з вузловими значеннями прогину і неінтегральними коефіцієнтами при них, які при формуванні лінійної розв'язувальної системи додаються до інтегральних коефіцієнтів при прогинах ... ругий неінтегральний член містить значення скручуючого моменту і для ... внесення у систему вимагає перетворення. Скористаємося умовою неперервності вектора ... ного моменту $M = M_n t \ldots n$ на границі при переході від одного граничного елемента до іншого:

$$\ldots = M_n \ldots H_n \ldots \tag{4}$$

... е індекси "+" та "–" відносяться до елементів, які знаходяться перед кутовою точкою та після неї (за напрямком обходу границі) ... виключаючи з двох скалярних рівнянь (4) стрибок скручуючого моменту, одержимо:

$$\ldots - H_n^- = \lfloor M \ldots \frac{n \ldots}{1 + \ldots n \ldots} \tag{5}$$

де $n^+ \ldots n \ldots - n^+ n \ldots - n^+ n \ldots$ Співвідношення (5) разом з апроксимацією (2) дозволяє виключити з другого позаінтегрального члена рівнянь (3) скручуючі моменти та звести його до виду

$$\ldots + n \ldots \frac{\ldots}{1 + n \ldots n} \tag{6}$$

де індекси “+” та “–” позначають наступний та попередній граничні елементи за напрямко обходу до k-го елемента. Таким чином, з виразів (3) та (6) випливає, що при вузлови значеннях прогинів та згинних моментів у лінійній алгебраїчній розв'язувальної систем будуть такі коефіцієнти:

$$w^{(k)}(\xi_j^{(k)})\left\{-\int_{\Gamma_k}\hat{\Omega}_n^{(p)}V_n^*(z_j^{(k)})\,L(t;t_j)\,d\Gamma(t)+\hat{\Omega}_n^{(p)}H_n^*(\xi^{(k)}-x_m^{(p)})L(\xi^{(k)};\xi_j^{(k)})\Big|_{\xi^{(k)}=X_1^{(k)}}^{\xi^{(k)}=X_2^{(k)}}\right\};$$

$$M_n^{(k)}(\xi_j^{(k)})\left\{\int_{\Gamma_k}\hat{\Omega}_n^{(p)}\varphi_n^*(z_j^{(k)})\,L(t;t_j)\,d\Gamma(t)+L(X_2^{(k)};\xi_j^{(k)})\frac{\vec{n}^+\times\vec{n}}{1+\vec{n}^+\cdot\vec{n}}\hat{\Omega}_n^{(p)}w^*(X_2^{(k)}-x_m^p)-\right.$$
$$\left.-L(X_1^{(k)};\xi_j^{(k)})\frac{\vec{n}^-\times\vec{n}}{1+\vec{n}^-\cdot\vec{n}}\hat{\Omega}_n^{(p)}w^*(X_1^{(k)}-x_m^p)\right\}.$$

Як основні інтегральні коеффіцієнти, так і неінтегральні доданки до них дозволяють аналітичне визначення. Таким чином, відбулася редукція позаінтегральних членів, щ містили додаткову компоненту напружено-деформованого стану – скручуючий момент H_n. Ці члени перетворилися на поправки до основних коефіцієнтів розв’язувальної системи. Це дозволяє, не вводячи нових вузлових чи додаткових невідомих, залишити їх кількість рівною $4N$, де N – кількість граничних елементів. Особливе значення така редукція має при формулюванні методу для складених плит, де вона дозволяє не використовувати додаткові умови контакту, а також при заміні криволінійної границі системою прямолінійних граничних елементів, де завдяки їй частково компенсується похибка, внесена дискретизацією границі.

Список літератури

1. *Тимошенко С.П., Войновський-Кригер С.* Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 635 с.

2. *Верюжский Ю. В.* Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. – К.: Вища шк., 1978.- С. 84.

3. *Бродовий В. Л.* Бігармонічні потенціали з неінтегральними моментними членами. // Матеріали VII Міжнародної Наукової Конференції ім. акад. М. Кравчука. – К.: НТУ "КПІ" 1998.- С. 67.

Стаття надійшла до редакції 20 вересня 1998 року.

В'ячеслав Леонідович Бродовий (1972) закінчив механіко-математичний факультет Київського університету ім. Т. Шевченка у 1995 році. Аспірант кафедри будівель та споруд аеропортів КМУЦА. Напрямок наукової діяльності – методи граничних інтегральних рівнянь і граничних елементів у теорії пружності та будівельній механіці. Автор трьох наукових праць.

V.L. Brodovoy (1972) graduated from Kyiv T. Shevchenko University, Faculty of Mechanics and Mathematics (1995). Now a post-graduate at the Department of Airport Structures of Kyiv International University of Civil Aviation. The area of scientific activities is the boundary element and boundary integral equations methods in elasticity and structural mechanics. Three scientific papers published.