УДК 007:681.3.06:519.17.007.57(045)+

А.А. Волков

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ГРАФАМИ

На базе общей теоретико-множественной модели системы обоснована концепция моделирования систем графами, определены понятия моделирующего и обобщенного моделирующего графов как основы построения баз данных и знаний интегрированных автоматизированных интеллектуальных систем обработки информации и управления.

Существует много сложных систем, которые можно отнести к сетевым. Для математического описания и исследования процессов, происходящих в этих системах, применяются методы теории графов. Впервые эти методы были применены для анализа электрических цепей, а в дальнейшем - электронных и других систем, геометрическая конфигурация эквивалентных схем которых представлена графами. Проблеме математического описания и анализа электромеханических систем с физически разнородными элементами (электрическими, тепловыми, механическими, гидравлическими и др.) посвящена работа [1]. Математическая модель физической системы представлена совокупностью полюсных уравнений отдельных ее компонент и математическим описанием порядка их соединения, определяемого некоторым графом. Одним из необходимых условий такого подхода является обобщенная трактовка физических переменных, входящих в уравнения компонент системы. Она основывается на свойствах, общих для способов измерения этих переменных. В зависимости от указанных способов различают: последовательные (through) и параллельные (across) фундаментальные переменные. Функциональная связь между ними для отдельных физических компонент в общем случае определяется некоторыми операторами, выражающими собой полюсные уравнения компонент. Указанным фундаментальным переменным соответствуют: токи и напряжения - в электрических и электронных компонентах; потоки жидкости или газа и изменения напора - в гидравлических, газовых, вентиляционных компонентах сетей; силы (крутящие моменты) и линейные (угловые) перемещения - в механических компонентах, тепловые потоки и перепады температур - в тепловых компонентах систем и т.д.

Второе необходимое условие такого подхода состоит в том, чтобы фундаментальные последовательные и параллельные переменные удовлетворяли двум основным постулатам для вершин и циклов моделирующего графа, определяющего структуру соединения компонентов системы. Если ориентированным звеньям (дугам) v_j моделирующего графа системы поставлены в соответствие некоторые значения последовательных q_i и параллельных h_i фундаментальных переменных, то указанные постулаты выражаются следующим образом.

Постулат 1. Алгебраическая сумма последовательных переменных q_i, соответствующих дугам, инцидентным произвольной вершине x_j графа, равна нулю.

Постулат 2. Алгебраическая сумма последовательных переменных Ь;, соответствующих дугам любого произвольно ориентированного цикла графа, равна нулю.

Для различных типов систем указанные постулаты могут рассматриваться как отображение и обобщение соответствующих им физических законов. Для электрических целей, например, эти постулаты соответствуют первому и второму законам Кирхгофа. Они были сформулированы еще в середине прошлого столетия. Для некоторых других систем такое обобщение получено значительно позже. Например, только в 1955 году было показано, что формулировка основных законов механики может быть обобщена и представлена в виде приведенных выше постулатов. Первый постулат для механических систем содержится в обычной формулировке основных законов механики. Второй постулат здесь конкретизируется в следующем виде: полная сумма перемещений по замкнутому контуру стремится к нулю. В тех случаях, когда уравнения компонент систем являются двухполюсниками, то геометрическая конфигурация систем представлена в виде сети или графа. В тех же случаях, когда компоненты системы являются многополюсниками, такое «геометрическое» подобие системы моделирующему ее графу отсутствует. Тем не менее и в этих случаях имеет место изоморфизм между характеристиками систем и соответствующими им графами. Фактически любую систему можно представить в виде некоторой сети и смоделировать ее графом.

Особый интерес в этом отношении представляет работа [2], в которой предпринята попытка обосновать возможность применения к информационным сетям первого и второго информационных законов Кирхгофа.

Рассмотрим моделирующий граф физической сети.

Дадим следующее определение моделирующего графа (мультиграфа) сети [3].

Граф (мультиграф) в назовем моделирующим некоторую сеть С, если удовлетворяются следующие условия.

1. Граф (мультиграф) О изоморфен сети С.

2. Каждой дуге V-, графа О поставлены в соответствие последовательные и параллельные И; фундаментальные переменные сети С и операторы Д , отображающие их взаимосвязь в виде:

ЬрД-ф; р* 1,т ,

где в общем случае выражает совокупность математических действий, которые нужно произвести, чтобы по переменной qi найти переменную И;.

3. На графе в определены операции сложения последовательных и параллельных Ь; фундаментальных переменных, выражающих собой первый и второй постулаты для вершин (узлов) и замкнутых контуров графа сети в виде уравнений

Ач=0;
ВЬ=0,

где А - матрица линейных независимых обобщенных узлов; В - матрица линейн независимых контуров; q и h - векторы последовательных и параллельных фундаментальны переменных соответственно.

При некотором дереве графа матрицы А и В определяют два взаимно ортогональны подпространства: подпространство независимых обобщенных узлов (вершин) подпространство независимых контуров. Вследствие этого справедливо соотношение:

$$A \cdot B^{\tau}=0,$$

где τ - символ транспонирования матрицы.

В основу определения графа естественно положить теоретико-множественную моде системы. Такое определение системы предполагает задание семейства множеств

$$M=\{M_i, i \in I\},$$

где М - множество (объект) системы; I - множество индексов.

Тогда системой [4] называется отношение непустых (абстрактных) множеств

$$S \subset \times \{M_I, i \in I\}, \quad ($$

где × - символ декартового произведения.

Важным классом отношений (1) являются двухместные или бинарные отношени которые могут быть положены в основу определения графов. Отношение (1) в этом случ будет иметь вид:

$$.S \subset M_1 \times M_2.$$

Именно отношение (2) может быть положено в основу определения графа.

Граф G всегда можно представить двумя взаимосвязанными множества абстрактных объектов. Одно из них - множество X неизолированных вершин, друг множество - V звеньев (если звено графа неориентировано, оно называется ребром, ес ориентировано - дугой).

Множества X и V будем называть графообразующими. Под графообразующи множествами будем понимать перечисление (перенуменацию) всех их элементов.

Определяя графообразующие множества (или одно из них) и отношения (2) на декартном произведении, можем дать теоретико-множественное определение граф Практическое значение имеют два способа определения графа:

1) в отношении (2) - два графообразующих множества:

$$M_1=X; \qquad M_2=V;$$

2) в отношении (2) - одно графообразующее множество:

$$M_1=M_2=X.$$

Учитывая это, можно дать два определения графа [5].

Определение 1. Графом G называется отношение на декартовом произведении непустого множества X вершин и непустого множества V звеньев, т.е.

$$G \subset X \times V. \qquad (3)$$

Декартово произведение в отношении (3) представляет собой множество всех упорядоченных пар элементов вида (X,V) при условии, что X∈X; V∈V, т.е.

$$X \times V = \{(x,v)\},\ x \in X,\ v \in V. \qquad (4)$$

Если положить, что $X \subset Z$ и $V \subset Z$, где Z - множество целых чисел, то декартово произведение (4) можно наглядно представить точками (X_j; V_i), $X_j \in X$, $V_i \in V$ в узлах координатной сетки, образующими множество

$$\{(\overline{\overline{X}}_j,\ \overline{\overline{V}}_i)\},\ j = \overline{1,n};\ i = \overline{1,m}. \qquad (5)$$

При конечных графообразующих множествах мощность множества (4) или (5) численно равна произведению мощностей графообразующих множеств, т.е.

$$|X \cdot V| = |X| \cdot |V| = m \cdot n,$$

где n - количество вершин графа; m - количество звеньев графа.

Определим, какова мощность отношения (3). Поскольку каждое звено $v_i \in V$, а G без петель инцидентно двум различным вершинам (x_n и x_l, $k \neq l$, то каждому такому звену v_i могут быть поставлены в соответствие две пары (v_i, x_k) ∈ G и (v_i, x_l) ∈ G) элементов отношения (3).

Отсюда следует, что мощность отношения (3) определяется удвоенной мощностью множества V звеньев графа G, т.е.

$$|G|_{xv} = 2\,|V| = 2m,$$

где $|G|_{xv}$ - мощность отношения (3) на декартовом произведении множеств X и V.

Определение 2. Графом G называется отношение на декартовом произведении непустого множества X вершин на это множество, т.е.

$$G \subset X \times X. \qquad (6)$$

Декартово произведение в отношении (4) представляет собой множество всех упорядоченных пар элементов вида (x_i, x_k) при условии, что x_i, $x_k \in X$, т.е.

$$X \times X = \{x_i, x_k\}\ \ j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

Мощность множества (7) численно равна квадрату мощности множества X, т.е.

$$|X \times X| = |X|^2 = n^2.$$

Отношение (6) является некоторым подмножеством декартового произведения (7). Выясним, какова его мощность. Предположим, что граф G (обозначим его $G_к$) не ориентирован и не имеет петель и кратных звеньев. Тогда каждому его ребру v_i, $i=\overline{1,m}$ могут быть поставлены в соответствие две пары смежных вершин: (x_k, x_e) и (x_e, x_k). Отсюда следует, что мощность множества (6), определяющего граф $G_н$, будет

$$|G_н|_x = 2|V| = 2m.$$

Если граф ориентирован (обозначим его G_0), то каждой его дуге v_i, $i=\overline{1,m}$ ставится в соответствие только одна пара смежных вершин: (x_k, x_e), где x_k - начало дуги; x_e - конец дуги. Мощность множества (6) такого графа будет в два раза меньше

$$|G_0|_x = m.$$

Теперь рассмотрим обобщенную топологическую модель системы. Теоретико-множественная модель абстрактной системы или модель общей теории систем и концепция моделирующих графов позволяют получить такую обобщенную модель сложной сетевой системы, которая обладает возможностью построения на ее основе совокупности целенаправленных моделей, обладающих достаточной степенью детализации. Построение этой модели основывается на конкретизации абстрактных множеств или объектов системы $M_i, i=\overline{1,n}$ теоретико-множественной модели, представленной соотношением (1). При такой конкретизации декартово произведение

$$\times\{M_i, i \in I\} \tag{8}$$

в правой части отношения (1) может быть декомпозировано и представлено некоторым семейством декартовых произведений множеств M_i путем разбиения множества I.

Пусть, например, множество I разбивается на N непустых попарно не пересекающихся подмножеств $I_J \subset I, j \subset J$ таких, что:

$$I_J \cap I_K = \varnothing$$

для любой пары различных индексов $(J \neq K)$; $\bigcup_{J=1}^{N} I_j = I.$

Тогда можно определить следующее биактивное (взаимооднозначное) отображение, называемое каноническим:

$$\times\{M_i, i \in I\} \Rightarrow \times\{\times\{A_i, i \in I_j\}\ I_j \in I\}. \tag{9}$$

Таким образом, декартово произведение (8) множеств $M_i, i \in I$ можно декомпозировать и заменить другим декартовым произведением, где в качестве сомножителей выступают декартовы произведения $\{\times\{M_i, i \in I_J\} I_J \subset I\}$ меньшей степени. Смысл отображения (9) состоит в том, что исходные объекты системы $M_i, i \in I$ объединяются по некоторым семантическим признакам и их декартовы произведения могут рассматриваться как новые обобщенные системные объекты $Q_j, j \in J, |J| = N$ уже не одноэлементных, а многоэлементных множеств, т.е. проекции исходного произведения (8). Тогда теоретико-множественная модель системы (1) будет представляться отношением

$$S \subset \times\{Q_j, j \in J\},$$

где $$Q_j \Leftrightarrow \times\{M_j, j \in I_j\} I_j \subset I, |J| = N.$$

Сформулируем основные предпосылки для конкретизации объектов M_i , $i \in I$ в выражениях (1) и (8) при построении обобщенной топологической модели сети. Системные объекты M_i, $i \in I$ и обобщенные системные объекты Q_i должны удовлетворять следующим требованиям:

- объекты M_i, $i \in I$ могут отображать как данные, так и знания о структуре и элементах сети;

- объекты M_i, $i \in I$ могут быть изначально как полностью определенными, так и совсем неопределенными, а определяться в процессе моделирования;

- объекты M_i, $i \in I$ могут отображать модели, алгоритмы и программные модули для определения других объектов (множеств) и управления процессом моделирования в интерактивном режиме;

- полный набор объектов M_i, $i \in I$ является конечным, но не фиксированным, и может быть при необходимости расширен. Этим достигается гибкость модели, возможность ее совершенствования.

С учетом сформулированных требований выделим следующие семейства исходных множеств $\{M_i, i \in I\}$.

1. Множества, определяющие топологическую структуру моделируемой сетевой системы (графообразующие множества).

2. Множество последовательных и параллельных фундаментальных переменных и операторов связи между ними, которые ставятся в соответствие каждому звену моделирующего графа.

3. Множества, определяющие линейно независимые векторы последовательных и параллельных фундаментальных переменных, удовлетворяющих первому и второму постулатам.

4. Множества алгоритмов и программных модулей для топологического анализа моделирующего графа , идентификации операторов его звеньев, расчета распределения последовательных переменных в звеньях (потоков в сети) при различных исходных данных.

5. Множества алгоритмов и программных модулей для управления процессом распределения последовательных переменных (потоков) в звеньях моделирующего графа при различных исходных данных.

6. Множества параметров и экспериментальных статистических данных, характеризующих техническое состояние сетевой системы и ее элементов.

7. Множества алгоритмов и программных модулей для оценки и анализа технического состояния моделируемой сетевой системы.

Выделение семейства исходных множеств или объектов сетевой системы позволяет представить ее в виде следующей обобщенной топологической модели:

$$S \subset Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n,$$

где $$Q_j = \times\{M_i, i \in I_j\}, I_j \subset I, j = \overline{1,n}.$$

Обобщенная топологическая модель может явиться основой построения баз данных и баз знаний, интегрированных интеллектуальными автоматизированными системами обработки информации и управления.

Список литературы

1. *Т. Кениг, Е. Блекуэм.* Теория электромеханических систем. - М.-Л.: Энергия, 1965. - 424 с.
2. *Денисов А.А.* Основы теории информационных сетей. - Л.: Изд-во Ленинградского политехнического ин-та, 1977.- С. 48.
3. *Волков А.А.* Моделирующие графы сложных сетевых систем управления// Кибернетика и автоматическое управление. - К.: ИК АН УССР, 1969. - С. 3-11.
4. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1977. - 311с.
5. *Волков А.А.* Системный анализ, исследование операций и моделирование: Учебно-методическое пособ. - К. КМУГА, 1998. - С. 64.

Стаття надійшла до редакції 4 травня 1998 р

Олександр Андрійович Волков (1924) за інчив Київ ь ий політехнічний институт в 1952 році. Доктор технічних наук професор, завідувач кафедри технічної кібернетики Київського міжнародного університету цивільної авіації. Автор більше 200 наукових праць в області моделювання, дослідження та проектування складних систем, синтезу оптимального керування процесами в інженерних мережах, автоматизованих та інтелектуальних систем керування в цивільній авіації.

Olexandr A. Volkov (b. 1924) graduated from Kyiv Polytechnical Institute in 1952. DSc (Eng) professor, Head of Technical Cybernetics Department of Kyiv International University of Civil Aviation . Author of more than 200 publications in the field of semulation, designation and projecting of complex systems, synthesis of optimal control by the processes in engineering networks and automatic and intellectual control systems of civil aviation.