УДК 532.526

В.Т. Мовчан, Л.А. Романюк

МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНИХ ПРИМЕЖОВИХ ШАРШ ПРИ ВІД'ЄМНИХ ГРАДІЄНТАХ ТИСКУ

Наведено математичну модель та наближені аналітичні розв'язки для турбулентних пристінних течій при від 'ємному градієнті тиску. Математична модель і наближені розв 'язки можуть бути використані як безпосередньо, так і в чисельному розрахунковому методі, який необхідний при проектуванні і розробці цілого ряду технічних машин, установок, технологічних процесів,

Актуальною задачею авіації, космонавтики, енерго-, машино- та кораблебудування є створення економічних, високоефективних та надійних розрахункових методів для пристінних течій, які враховують різноманітні фактори. Одним з найвпливовіших факторів є поздовжній градієнт тиску. Для побудови ефективного розрахункового методу для пристінних течій необхідно мати математичну модель, яка адекватно описує процес, Побудові математичної моделі турбулентної плоскої пристінної течії і присвячена ця стаття. В основу моделі покладено підхід Колмогорова-Прандтля. Наведена нижче математична модель дає змогу отримати наближені розв'язки, які представляють як самостійний інтерес, так і дозволяють уточнювати модель аналізом порівнянь розрахунків та експериментів. Створена раніше та використана в чисельних розрахунках неперервна алгебраїчна модель [1] дозволила отримати надійні результати розрахунку пристінних турбулентних течій в широкому діапазоні градієнтів тиску, Тому доцільним є подальше узагальнення алгебраїчної ' моделі на випадок більш інформаційної однопараметричної диференціальної моделі.

В статті подається і досліджується формула коефіцієнта турбулентної в'язкості^ однопараметричної диференціальної моделі, яка давала б можливість достовірної відтворювати характерні особливості турбулентної пристінної течії у внутрішній (пристінній)] і зовнішній областях. Формула для коефіцієнта турбулентної в'язкості - єдина для всієї! області

Для маштабу довжини ℓ використовується залежність [1], яка широко застосовувалась в алгебраїчній моделі:

$$\ell = ky\text{th}\frac{\text{sh}^2(\chi_1 y^+)\text{th}(\chi_2 y^+)}{ky^+\sqrt{\tau_+}},$$

де k, χ_1 та χ_2 – емпіричні коефіцієнти моделі; $y^+ = \frac{y v_*}{\nu}$; ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості.

Якщо скористатися припущеннями, що в логарифмічній зоні $\frac{\sqrt{E}}{v_*} = \text{const}$ [2], а в зовнішній області $\frac{\sqrt{E}}{v_*} = \gamma(y)$, то залежність (1) приводить до алгебраїчної формули [1]:

$$\nu_t = \chi\Delta v_*\gamma\text{th}\frac{\ell\sqrt{\tau_+}}{\chi\Delta}, \tag{2}$$

де χ – емпіричний коефіцієнт; функція $\gamma = \gamma(y)$ – коефіцієнт переміжності.

Формула (2) дозволяє отримати наближені розв'язки для профілю швидкості, якщо використати залежність Буссінеска для напруження тертя:

$$u(y) - u(y_0) = \int_{y_0}^{y}\frac{\tau}{\nu+\nu_\nu}dy .$$

Для визначення напруження τ зручно використати апроксимації вигляду:

$$\frac{\tau}{\tau_w} = (1-\bar{y})(A_0 + A_1\bar{y} + A_2\bar{y}^n\text{th}\frac{\ell\sqrt{\tau_+}}{\chi\Delta}) - \tag{3}$$

при незначному від'ємному градієнті тиску і

$$\frac{\tau}{\tau_w} = (1-\bar{y})(\frac{B_0}{B_1 + B_2\bar{y}} + B_3\bar{y}^n\text{th}\frac{\ell\sqrt{\tau_+}}{\chi\Delta}) - \tag{4}$$

при довільному від'ємному градієнті.

Тоді, наприклад, залежності (3) і (4) дозволяють одержати для профіля швидкості в перехідній і в'язкій зонах:

$$u^+ = \frac{u}{v_*} = \frac{1+p^+y^+}{\chi_1}\text{th}(\chi_1 y^+) - \frac{p^+}{\chi_1^2}\ln[\text{ch}(\chi_1 y^+)] -$$

при незначному від'ємному градієнті

і

$$u^+ = \int_0^{y^+}\frac{dy^+}{(1-p^+y^+)\text{ch}^2(\chi_1 y^+)} -$$

при довільному від'ємному градієнті, а в логарифмічній зоні відповідно:

$$u^+ = \frac{1}{k}[\ln\frac{\sqrt{1+p^+y^+}-1}{\sqrt{1+p^+y^+}+1} + 2\sqrt{1+p^+y^+}] + \text{const}; \tag{5}$$

$$u^+ = \frac{1}{k}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-p^+y^+}}{1+\sqrt{1-p^+y^+}}\right| + \text{const}, \tag{6}$$

де $y^+ = \frac{yv_*}{\nu}$; $p^+ = \frac{\nu}{\rho v_*^3}\frac{\partial p}{\partial x}$.

В логарифмічній зоні всі формули для коефіцієнта турбулентної в'язкості повинні бут еквівалентними, щоб забезпечувати логарифмічний закон швидкості. Справедливіст наближень (5) і (6) рівносильна залежностям:

$$\nu_t \frac{\partial u}{\partial y} = v_*^2 \tau_+ ; \qquad \nu_t = kyv_* \sqrt{\tau_+} ,$$

де $\tau_+ = 1 + p^+ y^+$ для незначного від'ємного градієнта тиску і $\tau = \frac{1}{(1 - p^+ y^+)}$ для довільно від'ємного градієнта тиску.

З рівняння для кінетичної енергії пульсацій та з припущення локальної рівноваги логарифмічній зоні для швидкості дисипації одержуємо

$$D = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} ; \qquad D = v_*^2 \tau_+ \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Використовуючи теорію розмірності, маємо $\nu_t \approx \frac{E^2}{D}$, що дає можливість знайти залежність

$$E^2 = \frac{v_* \tau_+}{c_1} \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} . \tag{7}$$

В логарифмічній зоні

$$E = \frac{v_*^2}{\sqrt{c_1}(1 - p^+ y^+)} , \quad D = \frac{v_*^3}{ky} \frac{1}{(1 - p^+ y^+)^{3/2}} .$$

Якщо для турбулентної в'язкості ν_t у в'язкій і перехідній зонах використати вираз з неперервної алгебраїчної моделі $\nu_t = \nu \mathrm{sh}^2(\chi_1 y^+) \mathrm{th}[\mathrm{sh}^2(\chi_2 y^+)]$, то з виразу (7) отримуємо:

$$D = \frac{v_*^4}{\nu(1 - p^+ y^+)^2} \frac{\mathrm{th}^2(\chi_1 y^+)}{\mathrm{ch}^2(\chi_1 y^+)} \mathrm{th}[\mathrm{sh}^2(\chi_2 y^+)] ; \tag{8}$$

$$E = \frac{v_*^2}{\sqrt{c_1}(1 - p^+ y^+)} \mathrm{th}(\chi_1 y^+) \mathrm{th}^{\frac{1}{2}}[\mathrm{sh}^2(\chi_2 y^+)] .$$

Для використання формули (8) і для в'язкої зони, де дисипація має порядок $\frac{\nu E}{y^2}$, вводимо, як це і прийнято, додатковий доданок:

$$D = \frac{v_*^4 \mathrm{th}^2(\chi_1 y^+)}{\nu(1 - p^+ y^+)^2 \mathrm{ch}^2(\chi_1 y^+)} \mathrm{th}[\mathrm{sh}^2(\chi_2 y^+)] + 2\frac{\nu E}{y^2} Д , \tag{9}$$

де $Д$ - множник, який вводиться для врахування відхилення від локальної рівноваги при наближенні до стінки.

Виконані порівняння розрахунків з експерементами [3] в умовах нульового градієнта тиску дозволили отримати такі апроксимації:

$$\sqrt{C_1} = 0.2578(1 + 0.2456[1 - \mathrm{th}(0.4 y^+) - 0.0592(\mathrm{th}(40\bar{y}))]) ;$$

$$Д = 1 - \mathrm{th}[0.025 y^+ (y^+ - 7.15)] .$$

Список літератури

1. *Мовчан В. Т.* Приближенно-аналитическое исследование турбулентного градиентного пограничного слоя // ПМТФ. 1982. №3. С.102-111.

2. *Федяевский Н.К., Гиневский А. С., Колесников А. В.* Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.-Л.:Судостроение, 1973.-256 с.

3. *Хинце И. О.* Турбулентность. -М.: Физматгиз, 1963.-680 с.

Стаття надійшла до редакції 25 січня 1998 року.

Володимир Тимофійович Мовчан (1937) закінчив КДУ ім. Т.Г. Шевченка у 1959 році, д-р. фіз.-мат. наук, проф. Спеціаліст з математичного моделювання та методів розрахунку процесів динаміки рідини і газу. Є автором понад 120 наукових та навчально-методичних праць. Як науковий керівник та консультант підготував понад 10 кандидатів наук. Член двох спеціалізованих вчених рад із захисту докторських дисертацій.

Volodymir T. Movchan (b. 1937) graduated from of T.G. Shevchenko Kiev University. DSc in Phys.-Math. professor. He is a specialist in the field of mathematical modellin simulation and calculations methods of fluid&gas dynamics. He has prepared more than 10 specialists with PhD Scientific degree as a scientific adviser. He is an active member of two Scientific Counsils which award doctor Scientific degrees.

Леонід Антонович Романюк (1972) закінчив Тернопільський педагогічний університет у 1995 році. Аспірант Тернопільського педагогічного університету. Спеціалізується в області математичного моделювання турбулентних течій.

Leonid A. Romanuk (b. 1972) graduated from Teacher training course in University of Ternopil (1995). He is post-graduate student of teacher Training University of Ternopil. Specialises in the sphere of mathematical simulation of turbulent flows.