

УДК 512.644:514.17:519.855.2

Ю.М. Мінаєв, О.Ю. Філімонова

ОПЕРАЦІЇ НЕЧІТКОЇ МАТЕМАТИКИ В СКЛАДІ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НА ПЛАТФОРМІ WINDOWS

Запропоновано універсальну методику та алгоритм виконання операцій нечіткої математики над нечіткими числами та нечіткими змінними. Результат виконання операції отримано адекватним уявленню первісних даних, що дозволяє ефективно викоростовувати запропоновану методику для реалізації ітераційних процедур. Показана пряма залежність можливості отримання конструктивного рішення від структури арифметичної операції.

Наведено приклади, що ілюструють застосування викладеної методології для розв'язку реальних прикладних задач в середовищі Excell на платформі Windows в умовах невизначеності та неповної інформації.

Останнім часом різко зріс інтерес до розробки методів та алгоритмів розв'язку недостатньо формалізованих задач. В реальних умовах такі задачі утворюються при виконанні вимірів за допомогою датчиків, що мають похибки, в умовах впливу збурень або породжуються неточністю первісних даних, змістовним трактуванням задачі та ін. Зокрема, такі постановки властиві широкому класу задач [10] - від технічних (задачі неруйнуючого контролю) до "чисто" економічних (оцінки ризиків при виконанні торгівельно-закупівельних операцій, нарахування страхових премій, інвестиційна діяльність) та ін.

Характерною особливістю таких задач є те, що арифметичні операції необхідно виконувати над слабко структурованими даними, тобто такими, які представляються у вигляді нечітких чисел (НЧ), нечітких змінних (НЗ) або лінгвістичних змінних (ЛЗ). Особливо актуальна подібна задача при роботі в середовищі сучасних інформаційних технологій, зокрема, при обробці економічної інформації за допомогою електронних таблиць. Наприклад, при наявності в середовищі EXCELL великої кількості функцій, що підтримують обробку статистичної інформації, питання про те, як працювати з даними, представленими у вигляді <близько до 10>, <приблизно 15>, <значно менше 25> і т.ін. залишається відкритим.

Розглянемо проблему реалізації операцій нечіткої математики в середовищі EXCELL на платформі WINDOWS. Компоненти арифметичної операції представлені у вигляді НЧ (НЗ). В загальному випадку така постановка задачі повинна дозволити працювати в середовищі електронних таблиць з універсальними даними (структурованими цілком (традиційна арифметика) чи з недостатньо структурованими даними, заданими наближено). Інакше кажучи, необхідно розширити можливості електронних таблиць відносно обробки неструктурованої інформації.

Нечітка змінна або число в загальному випадку представляються у вигляді підмножин пар "значення - функція належності", тобто

$$L = \bigcup_j 1_j / \mu_j(l), \mu_j(l) \rightarrow [0, 1], j=1, 2, \dots$$

Розглядаючи НЧ, будемо вважати, що нуль (0) є чітким, а нечітка одиниця (1_f) має вигляд

$$1_f = \{0 / \mu_0(1), 1 / \mu_1(1), 2 / \mu_2(1)\}, \sum_i \mu_i(1) = 1; i=1, 2, \dots, n,$$

тобто функції належності утворюють повну групу подій, інші НЧ - $2_f, 3_f, \dots, n_f$ сформовані з правилом "згортання" [4]. При інтервальному уявленні змінних припускаємо, що вони можуть бути додатково структурованими, тобто кордонам інтервала та його середині можуть бути призначені функції належності.

При постановці задачі слід зважати на те, що в деяких випадках компоненти арифметичної операції можуть бути уявленими в термінах природної мови, наприклад, <коефіцієнт при x великий, при y малий> і т.ін. Зазначимо, що терми <великий, малий> представляються у вигляді нечітких множин. В подібній постановці актуальна також задача про можливість "доброї" апроксимації рішення або неструктурованих компонент. Відомо [10] що "добрих" апроксимацій НМ (наприклад, в розумінні чебишевської норми) принципово не існує, але з усіх апроксимацій можна відшукати найменш "погану", тобто отримати гарантований конструктивний результат. Також не існує "добрих" апроксимацій НМ за α -рівнями.

Практично в усіх прикладних задачах виникає потреба в отриманні результату, адекватного за своєю структурою первинним посиланням, тобто уявленню коефіцієнтів у вигляді НМ, в якій кількість елементів співпадає з кількістю елементів в одній з множин, що являють собою компоненти операції. Крім того, додатково до задачі, що розглядається, зважаючи специфіку інформаційної технології, слід передбачити:

- можливість працювати з "зовнішнім" чітким уявленням $a_f \in A_f, b_f \in B_f$ - в той час, коли їхнє "внутрішнє" уявлення є нечітким, яке автоматично формується у відповідності до рівня невизначеності задачі;

- можливість користувача відповідно до своєї логіки розуміння задачі формувати компоненти операції $a_f \in A_f, b_f \in B_f$ як нечіткі змінні, зберігаючи в той же час "зовнішню" можливість роботи з чіткими коефіцієнтами, тобто застосовувати традиційні методи.

Відносно апроксимації неструктурованих даних у вигляді інтервала зазначимо, що хоча апроксимація НЧ або НІ у вигляді інтервала в цілому ряді випадків незадовільна (наперед виходячи з неприпустимої ширини інтервала), усе-таки можна довести (практика та обчислювальні експерименти це підтверджують), що завжди результат операції нечіткої математики буде завжди включений до інтервального результату. За адресою <http://www.delisoft.fi> глобальної мережі Internet можна знайти "інтервальний" Excell.

Розглянемо матричний принцип виконання операцій нечіткої математики. Обробка неструктурованої (нечіткої) інформації за допомогою електронних таблиць має на меті розширення класів задач, що розв'язуються, зокрема, економічних, в яких має місце нечітка постановка задачі або при чіткій постановці необхідно працювати з неструктурованими даними. Ефективність роботи пропонованого методу обробки неструктурованої (нечіткої) інформації, на думку автора, в першу чергу буде визначатися можливістю розв'язку нечіткого рівняння, тобто рівняння, в якому коефіцієнт при невідомій та (чи) права частина - нечітка змінна або нечітке число, а також аналізом інформації в електронних таблицях.

Можливість розв'язку нечітких рівнянь (НР) певною мірою визначається характером та властивостями операцій нечіткої математики [7]. Приступаючи до розв'язку НР, необхідно попередньо визначити тип арифметичної операції над НЧ чи НЗ, оцінити можливість перевірки результату та конструктивність алгоритму.

Як показали Мацумото та Прадд [5,6], не існує зворотніх (по відношенню до розширених операцій віднімання та ділення) операцій, однак це не заважає можливості отримання конструктивного рішення при правильному доборі евристик при реалізації операцій операції нечіткої математики.

З метою аналізу властивостей операцій нечіткої математики та придатності їх застосування до розв'язку НР розглянемо НР виду $a_f * x_f = b_f$, де a_f, b_f - нечіткі коефіцієнти, задані у вигляді приблизно A , близько до B і т.ін., та відтворені як нечіткі множини

$$a_f = \bigcup_{j=1,2,\dots} a_j/\mu_j, \quad b_f = \bigcup_{i=1,2,\dots} b_i/\mu_i, \quad \mu() \rightarrow [0,1],$$

де $*_f$ - знак операції НМа, $*^f$ - зворотня по відношенню до $*_f$ операція.

"Рациональність" арифметичних операцій над нечіткими числами (змінними) будемо розуміти так. Нечітке число уявляється, з однієї сторони, як аналог чіткого числа, з другої - нечіткою підмножиною числової осі R , що має функцію належності $\mu_A : R \rightarrow [0,1]$, де R - множина всіх дійсних чисел, $F(R) = \{ \mu/\mu : R \rightarrow [0,1] \}$ - множина всіх нечітких підмножин числової осі. В складі НМ результату необхідно передбачити визначення кількості "урізаних" підмножин, які, по-перше, адекватно моделюють висхідну НМ, по-друге, є адекватними висхідній НМ та співпадають за структурою з НМ, що моделює операції нечіткої математики.

Для нечітких підмножин в роботі [5] сформульовані бінарні операції: якщо $*$ - бінарна операція, що визначена на $U \times V$ зі значенням в W , то при $u \in U, v \in V$ маємо $w = u * v, w \in W$. Враховуючи те, що A_f, B_f - нечіткі підмножини множин $U, V : A_f \in U, B_f \in V, A_f = \bigcup_{j=1,2,\dots} u_j/\mu_{aj}, B_f = \bigcup_{i=1,2,\dots} v_i/\mu_{bi}, \mu() \rightarrow [0,1]$, на основі принципу узагальнення Заде [4] узагальнення операції $*$ на нечіткі підмножини призводить до співвідношення

$$A_f * B_f = (\bigcup_{j=1,2,\dots} u_j/\mu_{aj}) * (\bigcup_{i=1,2,\dots} v_i/\mu_{bi}) = \bigcup_{j,i} (u_j v_i)/\mu_{aj,bi}, \quad (1)$$

де $\mu_{aj,bi} = \min(\mu_{aj}, \mu_{bi}), u_j \in U, v_i \in V$.

Співвідношення (1) справедливе для випадку, коли U, V - незалежні змінні, тобто виконується умова $\mu_{A,B}(U,V) = \min(\mu_A(U), \mu_B(V))$. При наявності обмежень на (U, V) , що уявляється в наданні відношення P з функцією належності μ_P , вираз $(A_f * B_f)$ має вигляд:

$$(A_f * B_f) = (A_f * B_f)' \cap P = \bigcup_{j,i} (u_j * v_i) / \mu_{aj,bi},$$

де $(A_f * B_f)'$ - значення з виразу (1); $\mu_{aj,bi} = \min(\mu_P(a_j, b_i), \min(\mu_{aj}, \mu_{bi}))$.

В роботі [4] визначені операції додавання та множення на число нечітких підмножин з передумовою, що носій нечіткої підмножини має структуру векторного простору. В цьому випадку, якщо $\mu, \lambda \in F(X), \mu, \lambda \in [0,1]$, то сума нечітких підмножин множини X являє собою підмножину з функцією належності

$$(\mu + \lambda)(Z) = \sup_{x+y=Z} \min(\mu(x), \lambda(y)), \quad Z \in X^2.$$

Добуток, який будь-якому числу $r \in R$ та будь-якій нечіткій множині з функцією належності $\mu \in F(X)$ ставить у відповідність єдиний елемент з $F(X) : r\mu$, визначається таким же чином. Елемент $r\mu$ знаходиться як образ при відтворюванні $X \rightarrow r\mu$. В роботі [1] наведені приклади побудови розширених бінарних операцій $*_f$ для НЗ (НЧ) A_f, B_f, C_f з функціями належності $\mu_A, \mu_B, \mu_C \in F(R)$:

$$\forall (x, y, z) \in R : C_f = A_f *_f B_f \Leftrightarrow \mu_C(z) = \max \min(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

Зазначимо, що інтервальна арифметика та операції над НЧ при апроксимаціях на α -рівнях мають певний зв'язок. Якщо проаналізувати арифметичні операції над апроксимованими за α -рівнями НЧ, побачимо, що вони співпадають чи близькі до операцій інтервальної арифметики [9].

Розглянемо основні властивості операцій нечіткої арифметики, що принципово впливають на характер результату операції [1 - 5]:

$$\begin{aligned}
 (A_f +_f B_f) +_f C_f &= A_f +_f (B_f +_f C_f), \\
 (A_f +_f B_f) *_f C_f &= A_f *_f (B_f +_f C_f), \\
 (A_f +_f B_f) &= (B_f +_f A_f), \\
 (A_f *_f B_f) &= (B_f *_f A_f), \\
 (A_f +_f (-A_f)) &= 0, \quad A_f *_f (1/_f A_f) = 1.
 \end{aligned}$$

В практичних додатках досить часто розглядають випадки, коли НЧ утворюють певну структуру - нечіткий групіод, моноїд і т.ін. Нечіткий групіод (НГ) визначається [5] множиною нечітких підмножин універсальної множини E, на якій визначено операцію * (внутрішній закон композиції), що ставить у відповідність кожній впорядкованій парі нечітких підмножин ((A_f, B_f) одну і тільки одну нечітку підмножину C_f - (A_f, B_f, C_f ∈ E). Показано, що в НЧ можуть існувати ліва, права та просто одиниця:

- ліва одиниця, якщо $\forall A \subset E : 1^n *_m A_f = A_f$;
- права одиниця, якщо $\forall A \subset E : A_f *_m 1^n = A_f$;
- одиниця, якщо $\forall A \subset E : 1^n *_m A_f = A_f *_m 1^n = A_f$.

Зазначимо, що тут *_m - закон композиції.

Існування зворотнього елемента (ЗЕ) в НЧ визначається такими умовами:

- а) якщо як закон композиції *_m використовується операція ∩, E приймається як одиниця, то ЗЕ існує, коли $A_f \cap B_f = E$, окрім випадку $A_f = B_f = E$;
- б) якщо як закон композиції *_m використовується операція ∪, E приймається як нуль (0), то ЗЕ існує, коли $A_f \cup B_f = E$, окрім випадку $A_f = B_f = 0$.

В даній роботі аналіз НЧ обмежується нечітким моноїдом, тобто асоціативним нечітким групіодом, що має одиницю. При аналізі НЗ ніяких обмежень на значення 0_f, 1_f не накладається, вони вибираються з фізичних міркувань та характеру розв'язуваної задачі. При виконанні операцій 1_f /_f 1_f, 2_f /_f 2_f, 3_f /_f 3_f, ... n_f /_f n_f в кожному випадку будемо отримувати різні нечіткі одиниці, для яких $\mu^{10} = \max \{ \mu^i \}$, i=1,2,...,I, де I - кількість компонент.

Зважаючи на введені визначення та обмеження, розв'язок НР можна уявити у вигляді $x^*_f = b_f /_f a_f$, тобто реалізації операції нечіткої математики. В роботі [9] запропоновано матричний алгоритм виконання операцій нечіткої математики, заснований на принципі узагальнення Заде. Не розглядаючи алгоритм детально, покажемо схему його реалізації у вигляді $(a_f = \cup a_j / \mu^j_a) *_f (b_f = \cup b_i / \mu^i_b)$, j=1,2,...,n; i=1,2,...,m, зробивши припущення, що a_f являє собою вектор-рядок, а b_f - вектор-колонки, хоча таке положення не принципове, можливе зворотнє уявлення, тобто колонка-рядок (рис.1).



Рис.1.Схема реалізації алгоритму

Розглянемо матрицю результату більш детально, виділивши в ній, як показано нижче, хрестоподібну підмножину (cross-set- КрМ). Кожний елемент матриці $C = \{c_{ij} / \mu^c_{ij}\}$, $j=1,2,\dots,n; i=1,2,\dots,m$ створений за принципом:

$$c_{ij} = a_f * b_f \Rightarrow \min(\mu^j_a, \mu^i_b);$$

1	2	k	n
c_{10} / μ^c_{10}	c_{21} / μ^c_{21}		c_{n1} / μ^c_{n1}
		c_{uk} / μ^c_{uk}	
c_{1n} / μ^c_{1n}	c_{2n} / μ^c_{2n}		c_{nm} / μ^c_{nm}

Окремо виділено елемент c_{uk} / μ^c_{uk} , в якому $\mu^c_{uk} = \max\{\mu^c_{uk}\} = \min(\max\{\mu^j_a\}, \max\{\mu^i_b\})$, $j=1,2,\dots,n; i=1,2,\dots,m$. Рядок та колонка, на перетині яких знаходиться вказаний елемент, приймаються як робочі; їхні компоненти (кількість яких $m+n-1$) створюють cross-множину, яка має певні властивості. Інтерпретацію результату показано на рис. 2.

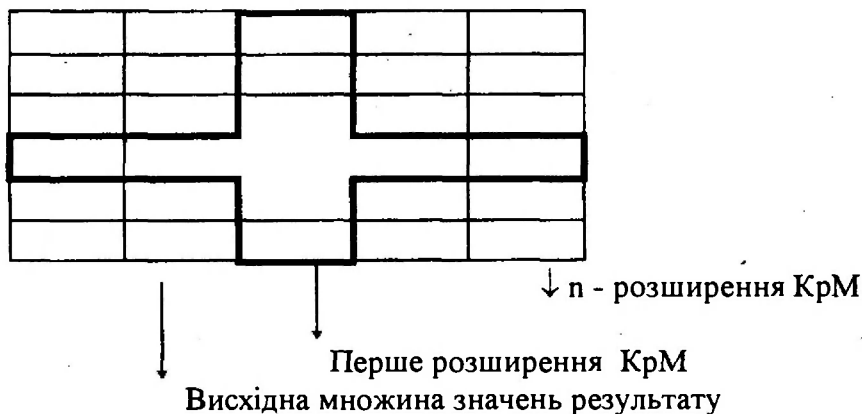


Рис.2. Геометрична інтерпретація результату

Твердження 1. Серед усіх "m x n" елементів матриці результату не існує іншої підмножини з (m+n-1) елементів, крім cross-множини, **найближчої** в інформаційно-ентропійному розумінні до висхідної множини.

Доказ можна отримати, якщо підрахувати ентропію $H(m \times n)$ всієї матриці C та $H(m+n-1)$ cross-множини, попередньо пронормувавши матрицю C таким чином, щоб $c_{ij} = 1(i)(j)$.

Наслідок з твердження 1. Рядок та колонка, на перетині яких знаходиться елемент c_{uk} / μ^c_{uk} , вміщують (m+n-1) елементів, кількість яких є необхідною і достатньою для уявлення (з потрібною точністю) результату операції $(a_f * b_f)$.

Евристика 1. Серед елементів матриці $C = \{c_{ij} / \mu^c_{ij}\}$, $j=1,2,\dots,n; i=1,2,\dots,m$ можуть бути елементи з однаковими значеннями але з різними величинами функцій належності, або різні за величинами елементи можуть мати однакові функції належності. В цьому випадку, шукаючи квазічіткі рішення, слід віддавати перевагу елементам, значення яких найменш віддалені від значення елемента з максимальним значенням функції належності.

Евристика 2. Для раціонального уявлення результату достатньо n чи m елементів, виділених з (n+m-1) елементів за правилом: з (n+m-1) елементів вибирають n чи m елементів, розташованих **найближче** (в розумінні відстані, визначеної в координатах

(c_{ij} , c_{ij}) до c_{uk}). При наявності елементів з однаковими значеннями функцій належності перевага віддається елементам (з складу робочих), значення яких c_{ij} **найближчі** до c_{uk} .

Евристика 3. При виконанні операцій нечіткої математики необхідно передбачити, щоб у всіх ситуаціях значення нуля та одиниці (як результатів) зберігалися незмінними, тобто для НЧ або НЗ $a_f, b_f, c_f, d_f, \dots$ повинно виконуватись: $(a_f -_f a_f) \cong (b_f -_f b_f) \cong (c_f -_f c_f) \cong \dots \cong 0_f, (a_f /_f a_f) \cong (b_f /_f b_f) \cong (c_f /_f c_f) \cong \dots \cong 1_f$, де $1_f, 0_f$ нечіткі змінні, які приймаються експертами за 1 та 0 відповідно.

Евристика 4. Якщо a_f, b_f представлені у вигляді НП $a_f \cong$ **приблизно** $A = \bigcup a_j / \mu_a^j$, $b_f \cong$ **приблизно** $B = \bigcup b_i / \mu_b^i$ або НЧ та існують чіткі апроксимації $a_f \Rightarrow a, b_f \Rightarrow b$ (наприклад, на α -рівні $\mu = \max(\mu_k), k=1, 2, \dots$), то результат $c_f = a_f *_f b_f$ допускає аналогічну апроксимацію, тобто $c_f \Rightarrow c, c_f = \bigcup c_k / \mu_c^k$.

Звернемо увагу на ще одну особливість виконання операцій НМа. Нехай $1_f, 2_f, \dots, n_f$ НЧ, сформовані, наприклад, за правилом згортання. Тоді результат операції, наприклад, $15_f - 10_f = 5_f$ може відрізнятись від сформованого числа 5_f в тому розумінні, що функції належності можуть бути різними. Якщо ця різниця для користувача є критичною, то додаткове нормування дозволяє цю різницю "зняти".

Евристика 5. Не існує кращої апроксимації результату операції нечіткої математики ($a_f *_f b_f$), що виконана за матричним принципом, ніж та, в основу якої покладена cross-множина пар "значення-функція належності", створених з $(m+n-1)$ елементів (рядка та колонки), на перетині яких знаходиться елемент з максимальним значенням функції належності. Cross-множина покладена в основу квазічіткого (апроксимованого) рішення, що знаходиться за близькістю до елемента з максимальним значенням функції належності, та квазізагального рішення (максимальна віддаленість від значення елемента з максимальним значенням функції належності).

Приклад виділення квазічіткого та квазізагального рішень:

$$(6_f = \{5/0.2, 6/0.8, 7/0.1\}) /_f (3_f = \{2/0.2, 3/0.9, 4/0.3\}) =$$

5/0.2	6/0.8	7/0.1	
2.5/0.2	3/0.2	3.5/0.1	2/0.2
1.6/0.2	2/0.8	3.5/0.1	3/0.9
1.2/0.2	1.5/0.3	1.7/0.1	4/0.3

Квазічітке рішення (близкість до \max ФН): $6_f /_f 3_f = \{2/0.8, 3/0.2, 5/0.3\}$.

Квазізагальне рішення (макс віддаленість): $6_f /_f 3_f = \{2/0.8, 3.5/0.1, 1.6/0.2\}$.

Запропонований метод та алгоритм були реалізовані на мові Visual Basic як компоненти стандартних електронних таблиць EXCELL. Рис.3 ілюструє загальний вигляд вікна EXCELL, до якого включено додаткове вікно "Нечеткая математика" з переліком всіх арифметичних операцій, які можуть виконуватися.

Досліди та попередня практика показали, що метод і алгоритм є досить ефективними і дозволяють суттєво розширити класи задач, які розв'язуються в умовах невизначеності та неповної інформації. Більш детальну інформацію про fuzzy Excell можна знайти в Internet на сторінці, що підготовлена авторами, за адресою http://www.expage.com/page/min_fil_fuz/.

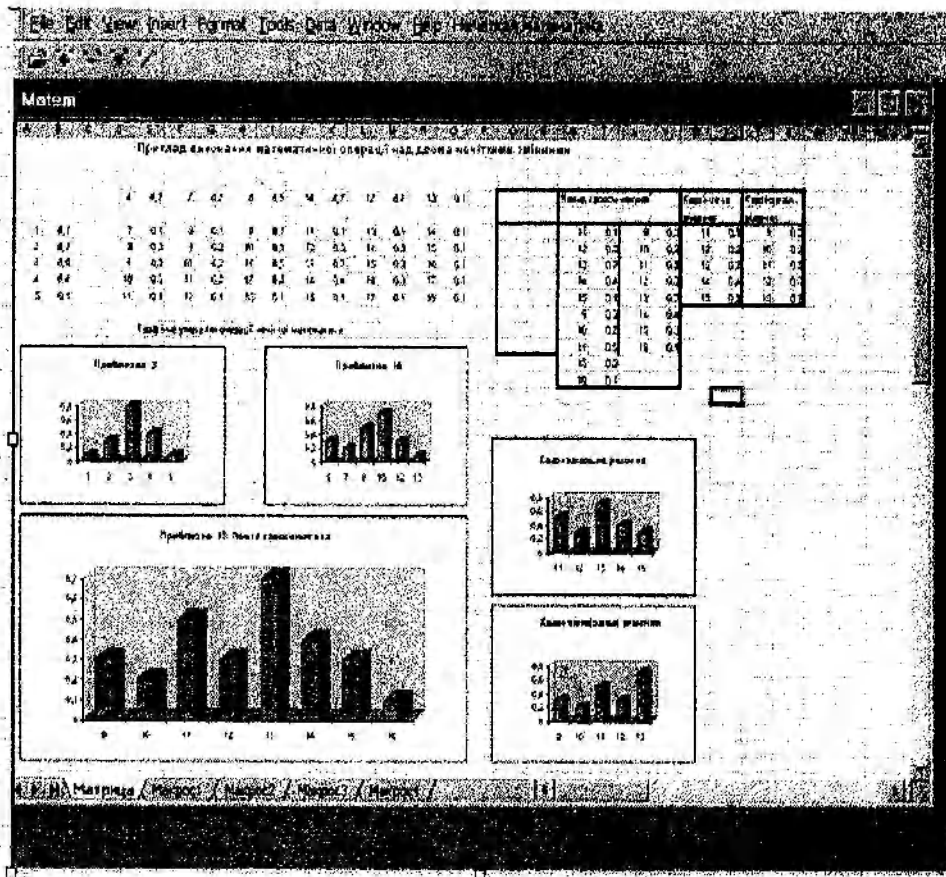


Рис.3. Загальний вигляд стандартного вікна Excel з "вбудованим" алгоритмом реалізації операцій нечіткої математики

Список літератури

1. Кунцевич В.М., Лычак М.М., Никищенко А.С. Решение системы линейных уравнений при наличии неопределенности в ее обеих частях // Кибернетика. - 1988. - №4. - С.47-52.
2. Калмыков С.А. Методы интервального анализа. - Новосибирск: Наука, - 1986. - 225 с.
3. Мінаєв Ю.М. Інтервальна математика на підставі методів нечіткої математики // Друга Українська конференція з автоматичного керування ("Автоматика -95"): Тези доповідей. - Львів, 1995. - С.43-45.
4. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Мир, 1982. - 432 с.
5. Dubois D., Prade H. Systems of linear fuzzy constraints. - Fuzzy sets and systems. - 1980. - v.3. - N 3. - P.34-48.
6. Dubois D., Prade H. Fuzzy real algebra: some results. - Fuzzy sets and systems. - 1979. - v.2. - N 4. - P.327-348.
7. Гвоздик А.Н. Линейные нечеткие уравнения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1984. - №5. - С.176-183.
8. Аверкин А.Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. - М.: Наука, 1986. - 312 с.

9. *Минаев Ю.Н., Грузинская Е.Т.* Алгоритмы нечеткой математики и их программная реализация // *Электронное моделирование.* -1988. -№6. -С.17-21.

10. *Негойцэ К.* Применение теории систем к проблемам управления. -М.: Мир, 1981. -184 с.

Стаття надійшла до редакції 6 травня 1997 року.



Юрій Миколайович Мінаєв (1936) закінчив Харківський політехнічний інститут у 1959 році. Доктор технічних наук, професор кафедри програмного забезпечення обчислювальних систем Київського міжнародного університету цивільної авіації. Напрямок наукової діяльності – прийняття рішень в умовах невизначеності та неповної інформації, прикладні задачі штучного інтелекту, нечітка математика, застосування нейросітьового логічного базису для розв'язку задач прийняття рішень в умовах невизначеності.

Yuriy. M. Minayev (b. 1936) graduated from Kharkiv Polytechnical Institute (1959), DSc (Eng) professor of Software calculation systems Department of Kyiv International University of Civil Aviation. Fields of interests are: taking decisions under conditions of uncertainty and incomplete information, applied problems of artificial intellect, application of neuronet logical basis for solution of problems of taking decisions under condition of uncertainty.



Оксана Юрїївна Філімонова (1963) закінчила Київський державний технічний університет будівництва та архітектури у 1988 році. Кандидат технічних наук, доцент кафедри основ інформатики Київського університету будівництва та архітектури. Напрямок наукової діяльності - застосування методів і моделей штучного інтелекту в системах неруйнівного контролю, нечітка математика.

Olga Yu. Filimonova (b. 1963) graduated from Kyiv State Technical University of construction and architecture (1988). PhD (Eng) ass. professor of Fundamentals of Informatics Department of Kyiv State Technical University of construction and architecture. Fields of interests are: application of methods and models of artificial intellect in systems of non-destruction control , fuzzy mathematics.