

## ІНФОРМАЦІЙНО-КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 681.322(045)

Л.Я. Нагорний, І.А. Жуко

### РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ РІШЕНЬ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ВЕЛИКОЇ РОЗМІРНОСТІ

*Розглянуто основні положення декомпозиції та організації розпаралелювання алгоритмів рішення систем лінійних рівнянь великої розмірності з розрідженою матрицею. Завдяки особливостям структури блочної матриці коефіцієнтів системи рівнянь обробка кожного блоку чи підсистеми рівнянь може виконуватися незалежно на декількох процесорних елементах. Для розв'язку систем рівнянь великої розмірності сформульована концепція створення багаторівневих паралельних обчислювальних систем.*

На кафедрі обчислювальних машин, систем та мереж (ОМСМ) КМУЦА проводяться науково-дослідні роботи в області підвищення ефективності обробки інформації на багато процесорних ЕОМ. В розроблених алгоритмах застосовуються прямі та ітераційні методи екомпозиції та розпаралелювання рішень систем рівнянь великої розмірності з розрідженою матрицею коефіцієнтів [1,2]. Ці результати можуть бути застосовані при моделюванні складних систем. Тепер на кафедрі ОМСМ виконуються роботи по розробці алгоритмів і програм моделювання багатопроцесорних пристроїв обробки графічної інформації, які можуть бути використані, наприклад, для побудови тренажерів для підготовки екіпажів космічних літальних апаратів, літаків та вертольотів.

Розглянемо основні положення з декомпозиції та організації розпаралелювання рішень систем лінійних та нелінійних рівнянь великої розмірності. При цьому вихідна математична модель (ММ) з розрідженою матрицею коефіцієнтів, яка після лініаризації та алгебраїзації може бути значних розмірів [3], доцільно представити у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з блочно-діагональною матрицею з облямівкою (БДМО)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline H_1 & \dots & & \Phi_1 \\ \hline \dots & \dots & & \dots \\ \hline & & H_N & \Phi_N \\ \hline \Theta_1 & \dots & \Theta_N & W_c \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline X_1 \\ \hline \dots \\ \hline X_N \\ \hline X_c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline Q_1 \\ \hline \dots \\ \hline Q_N \\ \hline Q_c \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

є  $H_i$ ,  $X_i$  та  $Q_i$  — квадратна підматриця коефіцієнтів розмірності  $n_i \times n_i$  ( $n_i \ll n$ , тут  $n$  — порядок вихідної системи рівнянь;  $i=1, N$ ) та  $n_i$ -мірні підвектори невідомих змінних та правих частин рівнянь  $i$ -ї підсистеми відповідно;  $\Phi_i$  та  $\Theta_i$  — прямокутні підматриці розмірності  $n_i \times n_c$  та  $n_c \times n_i$  відповідно;  $W_c$ ,  $X_c$  та  $Q_c$  — квадратна підматриця зв'язку розмірності  $n_c \times n_c$  ( $n_c \ll n$ ) та  $n_c$ -мірні підвектори невідомих змінних та правої частини підсистеми рівнянь зв'язку.

Слід відмітити, що таку структуру матриці коефіцієнтів для багатьох реальних фізичних систем можна досить легко отримати на етапі формування їх ММ на ЕОМ [4,5,6]. У тих

випадках, коли ММ системи, що досліджується, задана та матриця коефіцієнтів розріджена і не має явно виражену блочно-діагональну з облямівкою структуру, до неї можна прийти шляхом перестановки рядків та стовпців або застосувати інші способи формування ММ [7,8].

Завдяки особливостям структури блочної матриці коефіцієнтів, обробка кожного блоку чи підсистеми рівнянь може виконуватися незалежно на одному чи декількох процесорних елементах (ПЕ).

Блочне розпаралелювання рішення СЛАР з БДМО у поєднанні із статичним режимом розподілення обчислень дозволяє будувати адаптивні алгоритми, досить легко перебудовувати для кожного класу обчислювальних систем з паралельною організацією обчислень, а також при змінненні параметрів задачі, яка розв'язується, або кількості ПЕ, які використовуються.

Прямі методи рішення, засновані на кінцевій послідовності перетворень підматриці коефіцієнтів  $H_i$ , призводять до зворотної, трикутної або діагональної форми чи представляють її у вигляді добутку двох трикутних підматриць. Після цього вектор невідомих змінних знаходиться шляхом прямої чи зворотної підстановки.

Процес блочного рішення СЛАР прямими методами (наприклад, методом Гаусса) складається з чотирьох послідовних етапів.

На першому етапі при  $W_c=0$  паралельно виконуються на  $N$  ПЕ часткові виключення (2) в  $i$ -х підсистемах рівнянь вихідної системи

$$\begin{array}{|c|c|} \hline H_i & \Phi_i \\ \hline \Theta_i & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline X_i \\ \hline X_c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline Q_i \\ \hline \\ \hline \end{array}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

виділених з математичної моделі (1), після чого вони набувають виду

$$\begin{array}{|c|c|} \hline H_{mi} & \Phi_{mi} \\ \hline & W_{ci} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline X_i \\ \hline X_c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline Q_{mi} \\ \hline Q_{ci} \\ \hline \end{array}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

де перетворені підматриці  $H_{mi}$ ,  $\Phi_{mi}$  та підвектор  $Q_{mi}$ , а також сформовані у процесі рішення підматриця  $W_{ci}$  та підвектор правої частини  $Q_{ci}$  рівняння підсистеми зв'язку визначаються обраним методом рішення СЛАР.

На другому етапі формуються підматриця  $K_c$  та підвектор правої частини  $B_c$  підсистеми рівнянь зв'язку:

$$K_c = W_c + \sum_{i=1}^N W_{ci}; \quad B_c = Q_c + \sum_{i=1}^N Q_{ci}. \quad (4)$$

На третьому етапі розв'язується перетворена підсистема рівнянь зв'язку (5)

$$K_c X_c = B_c \quad (5)$$

та знаходиться підвектор зв'язку  $X_c$ .

На четвертому етапі визначаються паралельно на  $N$  ПЕ підвектори невідомих змінних  $X_i$  з блочного рівняння

$$H_{mi} X_i = Q_{mi} - \Phi_{mi} X_c, \quad i=1, N.$$

В результаті одержуємо паралельно на  $N$  ПЕ значення усіх компонент вектора невідомих змінних для вихідної

$$\text{СЛАР } X = (X_1, X_2, \dots, X_N, X_c)^T = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)^T.$$

Наведена вище обчислювальна схема організації процесу рішення СЛАР великої розмірності дозволяє виділити в алгоритмах рішення окремі блоки обчислень. На першому та четвертому етапах —  $2N$  блоків, на другому — два блоки та на третьому — один блок. Якщо ж кількість ПЕ не обмежувати числом  $N$ , існує можливість втілити розпаралелювання рішення підсистеми рівнянь зв'язку на третьому етапі, а також перетворення підсистем рівнянь на першому етапі.

В межах кожного етапу обчислень між блоками відсутні функціональні зв'язки, жодна з вхідних змінних першого блоку не є вхідною для  $j$ -го ( $i, j=1, N$ ). Між блоками відсутні також зв'язки за робочими полями ЗП (відсутні звернення до одних і тих самих комірок ЗП при читанні та запису інформації). Умови виконання  $i$ -го блоку не залежать від ознак, що виробляються при виконанні  $j$ -го блоку ( $i, j=1, N$ ), тому блоки незалежні по керуванню.

Обчислення всередині окремих блоків алгоритмів з перетворення підсистем рівнянь (1-4) наділені, крім того, природним паралелизмом, оскільки зводяться до виконання множини однотипних операцій над компонентами підматриць та підвекторів.

Точність отриманого рішення при такій організації обчислень не буде відрізнятися від точності послідовних алгоритмів тих самих методів, якщо в процесі формування ММ найбільші за модулем елементи у підсистемах рівнянь будуть групуватися в підматрицях  $H_i$ .

Рівні декомпозиції розпаралелювання рішення СЛАР всередині кожного  $i$ -го блоку пов'язані з використанням прямих та ітераційних методів рішення підсистем рівнянь.

Сформулюємо концепцію створення багаторівневих паралельних ОС для рішення задач великої розмірності [9,10], основним архітектурним принципом організації яких є принцип розпаралелювання вихідної ММ вигляду  $\varphi(X, Y)=0$ , де оператор  $\varphi$  визначає залежність між вектором  $Y$  заданих та вектором  $X$  невідомих величин. В залежності від класу задач, що розв'язуються, або складності ММ, які відтворюються, паралельні ОС представляються багаторівневими системами.

Виділимо та дамо визначення п'яти рівням розпаралелювання ММ задач великої розмірності: логічного, мікроопераційного розрядів представлення інформації, процесорного виконання та системної обробки, кожний з яких потребує спеціальних засобів реалізації.

1. Розпаралелювання ММ на логічному рівні полягає в апаратній реалізації елементарних функцій  $\varphi(x)$  за допомогою операційних вузлів (регістрів, суматорів, дешифраторів, каналів передачі даних та ін.).

2. Розпаралелювання ММ  $\varphi(X, Y)=0$  на мікроопераційному рівні являє собою апаратно-програмну реалізацію функцій  $y_{ij}=\varphi_{ij}(x_{ij})$  ( $i$ -х керуючих функцій та обробки переривань;  $j$ -х командних функцій, які забезпечують алгоритми перетворення інформації).

3. Розпаралелювання ММ  $\varphi(X, Y)=0$  на рівні розрядів представлення інформації полягає в перетворенні її у вигляді  $n$ -розрядних рівнянь

$$X = f(Y(i), \varphi(i), 2-i, X), Y(0)=Y, \varphi(0)=\varphi,$$

на основі кожного з яких визначається значення відповідного розряду  $x$  невідомого вектора  $X$ , які у сукупності  $i$  є рішеннями  $X$ .

4. Розпаралелювання ММ  $\varphi(X, Y)=0$  на рівні процесорного виконання забезпечується блоком керування процесором, який може бути реалізований апаратним і програмним способами.

5. Розпаралелювання ММ  $\varphi(X, Y)=0$  на рівні системної обробки полягає в перетворенні множини потоків даних на множині ПЕ або процесорів ОС під керуванням одного або кількох потоків команд.

Як впливає з пп. 1-5, в паралельних ОС діапазон розпаралелювання ММ, яке реалізується, досить великий, тобто використовуються різні рівні розпаралелювання, що забезпечує

універсальність створюваної системи, проте за ефективністю реалізації окремих рівнів розпаралелювання паралельних ОС можуть поступатися іншим типам систем. Можливості ОС по реалізації розпаралелювання ММ  $\phi(X,Y)=0$  можна приблизно оцінити, використовуючи показники універсальності взаємодій (функціональні можливості) та швидкодії взаємодій (інтенсивність). За цими показниками паралельні ОС розподіляють на слабозв'язані мультисистеми (багатомашинні ОС та мережі обчислювальних машин), багатопроцесорні ОС (БПОС) та проблемно-орієнтовані ОС. У слабозв'язаних ОС швидкодія взаємодій значно нижча, ніж у БПОС. Тому у таких ОС реалізується рівень розпаралелювання дуже крупних фрагментів роботи. У проблемно-орієнтованих паралельних ОС швидкодія взаємодій може бути вища, ніж у БПОС, а універсальність взаємодій - значно нижча. Тому проблемно-орієнтовані паралельні ОС реалізують окремі та вироджені рівні розпаралелювання та є спеціалізованими. Реальні ОС часто являють собою комбінацію різних класів паралельних систем.

До основних принципів організації паралельних ОС для рішення задач великої розмірності належать принципи побудови мультитрансп'ютерних ОС, паралельних ОС для реалізації матричних операцій, а також функціонально-структурної організації спеціалізованих та проблемно-орієнтованих ОС.

Принцип побудови мультитрансп'ютерних ОС на основі RISC-процесорів з чотирма вбудованими лінками та локальними ЗП, які мають досить велику обчислювальну потужність та втілюють підтримку паралельних обчислень як на апаратному, так і на програмному рівні, для рішення задач великої розмірності характеризується множинністю, модульністю, регулярністю, локальністю зв'язків, збалансованістю часу обчислень з часом вводу-виводу даних, а також можливістю програмування на мовах високого рівня.

Реалізація принципу побудови мультитрансп'ютерних ОС задає основу для досягнення високої продуктивності, гнучкості, надійності, живучості, скорочення строків розробки та виготовлення, високої технологічності паралельних ОС при розв'язанні задач великої розмірності.

Принцип побудови паралельних ОС для високошвидкісного виконання матричних операцій засновується на моделі колектива обчислювачів, працюючих паралельно та обробляючих кожний свій потік даних у вигляді матриць, конструктивній однорідності та програмованості структури, регулярності зв'язку між ПЕ.

Принцип функціонально-структурної організації спеціалізованих та проблемно-орієнтованих ОС полягає у використанні регулярності та модульності структури, паралелізму (конвеєрні та паралельні способи обробки даних), присутності їх спільних ресурсів, розширенні та адаптуємості до різних режимів роботи та функціональної орієнтації модулів.

Основною особливістю багаторівневого розпаралелювання рішення СЛАР є те, що одна й та ж сама команда повинна виконуватись над великою сукупністю елементарних, зв'язаних між собою певним чином, даних. Цю операцію можна виконувати над усіма даними одночасно. В цьому випадку достатньо мати один пристрій керування, який міг би дешифрувати одиночний потік команд та виробляти керуючі сигнали для ПЕ.

### Список літератури

1. Хокни Р., Джесссхоут К. Параллельные ЭВМ. Архитектура, программирование и алгоритмы / Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1986. - 392 с.
2. Введение в кибернетическую технику. Параллельные структуры и методы/ Отв. ред. А.В. Палагин. -К.: Наук. думка, 1989. - 248 с.
3. Нагорный Л.Я. Декомпозиция и распараллеливание алгоритмов решения систем линейных уравнений большой размерности. -К.: Знание, 1980. - 28 с.

4. *Нагорный Л.Я.* Моделирование электронных цепей на ЦВМ. - К.: Техніка, 1974. - 360 с.

5. *Нагорный Л.Я., Кофто А.Г.* Распараллеливание алгоритмов моделирования нелинейных систем большой размерности. // Электронное моделирование. -1983. № 4. - С. 45-51.

6. *Нагорный Л.Я., Жуков И.А.* Решение на ЭВМ больших систем нелинейных уравнений с разреженной структурой //Автоматизация проектирования в электронике.- К.: Техніка.- 1978. - Вып. 17.- с. 61-65.

7. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц / Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. - 410 с.

8. *Нагорный Л.Я.* Об одном методе решения на ЦВМ больших систем уравнений с разреженной матрицей // Электронное моделирование. - 1975. - Вып. 18 - № 6. - с. 60 - 67.

9. *Жуков И.А.* Концепция создания параллельных вычислительных систем для решения задач большой размерности //Проблемы информатизации и управления. -К.: КМУГА, 1997. - Вып. 2. - С. 3-7.

10. *Жуков И.А.* Методология синтеза параллельных вычислительных систем //Проблемы информатизации и управления. -К.: КМУГА, 1997. - Вып. 2. - С. 7-10.

Стаття надійшла до редакції 29 березня 1998 року.



**Леонід Якович Нагорний** (1927) закінчив Львівський політехнічний інститут в 1951 році. Заслужений діяч науки і техніки України, академік ТАУ, доктор технічних наук професор, завідувач кафедри обчислювальних машин, систем та мереж Київського міжнародного університету цивільної авіації. Автор більше 270 наукових публікацій в області моделювання складних систем та організації паралельних обчислювальних структур для рішення задач великої розмірності.

**L.J. Nagorny** (b. 1927) graduated from Lvov Institute of Politechnical in 1951. Head of Department of Digital Computer, Systems and Nets KIUCA, DSc (Eng.), Professor, Academician of Transport Academy of Ukraine, Honoured Scientist of Ukraine. Author of 270 publications in the field of complicated systems of modeling and organization of parallel computing structures for solution of large dimension problems.



**Ігор Анатолієвич Жуков** (1949) закінчив Київський інститут інженерів цивільної авіації в 1972 році. Заслужений винахідник України, доктор технічних наук професор кафедри обчислювальних машин, систем та мереж Київського міжнародного університету цивільної авіації. Автор 110 наукових публікацій в області моделювання складних систем та організації паралельних обчислювальних структур для рішення задач великої розмірності.

**L.A. Zhukov** (b. 1949) graduated from Kiev Institute of Civil Aviation Engineeirs in 1972. DSc (Eng.), professor of Digital Computer, Systems and Nets of KIUCA. Author of 110 publications in the field of complicated systems of modeling and organization of parallel computing structures for solution large-dimension problems.