УДК 519.21

М.Т. Корнійчук, І.К. Совтус, А.І. Семенченко,
М.О. Шутко, В.І Сольонов

ІМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ОЦІНЮВАННЯ НАДІЙНОСТІ СКЛАДНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ОДНОРІДНИХ МАРКІВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ

Досліджена формалізація постановки та розв'язку задачі оцінювання надійності складних радіоелектронних систем (РЕС) за допомогою методів масового обслуговування з вхідним неординарним узагальнено ерлангівським потоком відмов та системою експоненціального обслуговування, яка адаптується параметрами розподілу до стану потоку. Сформовано функціонали, які досить інформативно можна інтерпретувати як характеристики надійності процесу функціонування складних РЕС

Одним з інформативних методів побудови адекватних моделей процесу надійності функціонування складних РЕС є марківські процеси, однорідні за другою компонентою [1].

Розглянемо складну систему, відмова якої тлумачиться не абсолютною, а лише переводить процес функціонування її на інший рівень. За цих умов можлива і нами допускається черга відмов. Вважаємо, що їхнє відновлення провадиться за чергою надходження.

Для загальності допускаємо потік відмов неординарним, що точніше відповідає реальному об'єкту, а розподіл відмов у групі позначимо через

$$P\{\xi = r\} = \lambda_c(r)/\lambda_c, \quad r = 1, 2, \ldots, \qquad \sum^{\infty} = \lambda_c(r) = \lambda_c .$$

Проміжки часу $\xi^{(k)}$, через які надходять відмови (наробіток на групову відмову), незалежні й однаково розподілені випадкові величини. Цей час являє собою суму з незалежних показниково розподілених випадкових величин $\xi^{(k)}$ з параметром λ_k, $k = 1, 2, \ldots, c$; тобто

$$\zeta = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(c)}, \qquad \xi_k \geq 0\,; \tag{1}$$

та

$$P\{\, \xi^{(k)} < x \,\} = 1 - e^{-\lambda_k x}, \;\; k = 1, 2, \ldots, c.$$

За аналогією з роботою [2] будемо називати цю випадкову величину (1) узагальнено ерлангівською. Зауважимо про структуровану інформативність проміжку часу наробітку на відмову ζ, адже різні моменти цього проміжку можуть керуватися іншою експоненціальною складовою компонентою, і на випадкових стиках моментів часу кінця попередньої експоненти і на початку наступної експоненти змінюється стохастична природа процесу відмовлень.

Будемо говорити, що наробіток на відмову знаходиться на k-у рівні (потік відмов у k-й фазі) в момент часу t, якщо в цей момент виконується нерівність

$$T_m + \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(k-1)} < t < T_m + \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(k)},$$

$$k = 1, 2, \ldots, c,$$

де T_m – момент настання m-ї останньої перед t групової відмови.

Вважаємо, що відновлення відмов залежить від рівня наробітку на відмову (кероване відновлення, точніше, залежне адаптовано кероване відновлення), тобто від фази потоку відмов, і здійснюється за експоненціальним законом з параметром ν_k, $k = 1, 2, \ldots, c$ на тих (і тільки на тих) проміжках часу, в яких наробіток на відмову знаходиться у k-й фазі, а саме:

$$P\{{}^{(k)}\xi < x\} = 1 - e^{-\nu k x}. \quad (2)$$

З формули (2) випливає, що структуруючи вектор $\vec{\nu} = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_c\}$, можна керувати відновленням в залежності від фази потоку відмов. А це означає, що наперед можна програмувати стохастичне керування відновленням, будуючи різну відновну тактику, наприклад, таку дисципліну, коли інтенсивність обслуговування (відновлення) зростає, якщо збільшується фаза потоку та імовірність нової поломки (відмови). В залежності від складності реальної РЕС і її процесу функціонування таку тактику можна будувати варіативніше, адаптуючи до вимог оптимізації цього процесу.

За характеристики надійності процесу функціонування описаної системи можна взяти пару (α, κ) величин, що являють собою фазу потоку відмов і кількість відмов у системі в момент часу t, а також період зайнятості системи відновленням.

Нехай $\alpha(t)$ – рівень наробітку на відмову (фаза) системи в момент часу t; $\kappa(t)$ – кількість невідновлених відмов, що знаходяться в системі в цей же момент t. Через $\tau(\alpha, k)$ позначимо період зайнятості системи відновленням, якщо вона знаходиться у стані (α, k). Таким чином введені і формалізовані характеристики $\alpha(t)$, $\kappa(t)$, $\tau(\alpha, \kappa)$ досить повно описують надійність процесу функціонування складної РЕС.

Розглянемо введений двовимірний випадковий процес $(\alpha(t), \kappa(t)), t > 0)$. Як випливає із сказаного нижче, легко побачити, що це є ланцюг Маркова – однорідний за другою компонентою [1]. Він досить повно описує надійність функціонування РЕС, являючи собою інформативно змістовну його формалізацію. При цьому розширимо формалізацію задачі й припустимо, що, коли кількість відмов κ стає рівною нулю (κ – 0 – система надійна, найвищий рівень ефективності функціонування), то відновлення продовжується й надалі, але вже профілактичних відмов. У випадку, коли $\kappa = -k$, це інтерпретуємо як надійну систему, в якої поновлено всі відмови і профілактично попереджено ще k відмов. Тоді у розглянутому марківському ланцюзі $(\alpha(t), \kappa(t)), t > 0$ перша компонента буде описувати рівень наробітку на відмову, друга – кількість відмов системи у момент t. За цих припущень $(\alpha(t), \kappa(t)), t \geq 0)$ є однорідним ланцюгом Маркова у фазовому просторі $\{1, 2, \ldots, c\} \times \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = \{1, 2, \ldots, c\} \times Z$. Якщо ж $P((\alpha, k) \to (\beta, r))$- символічне позначення перехідної імовірності цього ланцюга за час t зі стану (α, k) у стан (β, r), то неважко показати, що при $\Delta \to 0$ з точністю до $o(\Delta)$ мають місце такі рівності:

$$\begin{aligned}
&P((\alpha, k) \xrightarrow{\Delta} (\alpha, k-1)) = \nu_\alpha \Delta, \ 1 < \alpha < c; \\
&P((\alpha, k) \xrightarrow{\Delta} (\alpha+1, k)) = \lambda_\alpha \Delta, \ 1 < \alpha < c; \\
&P((\alpha, k) \xrightarrow{\Delta} (\alpha, k)) = 1 - (\lambda_\alpha + \nu_\alpha)\Delta, \ 1 \leq \alpha \leq c; \\
&P((c, k) \xrightarrow{\Delta} (1, k+r)) = \lambda_c(r)\Delta, \ r > 0.
\end{aligned} \quad (3)$$

Нагадаємо, що $\nu_1, \ldots, \nu_c, \lambda_i, \ldots, \lambda_c$ – додатні, а $\lambda_c(1), \lambda_c(2), \ldots$ - невід'ємні і в сумі дорівнюють λ_c.

Аналізуючи і розкриваючи зміст побудованої моделі $(\alpha(t), \kappa(t)), t \geq 0$, бачимо, що з її стохастичної природи випливає, що перша компонента моделі $\alpha(t)$, $t > 0$ – однорідний ланцюг Маркова у фазовому просторі $\{1, 2, \ldots, c\}$ та з наступними перехідними імовірностями за малий час Δ (з точністю до $o(\Delta)$):

$$P(\alpha \xrightarrow{\Delta} \alpha) = 1 - \lambda_\alpha \Delta, \quad 1 \le \alpha \le c;$$

$$P(\alpha \xrightarrow{\Delta} \alpha + 1) = \lambda_\alpha \Delta, \quad 1 \le \alpha < c; \tag{4}$$

$$P(c \xrightarrow{\Delta} 1) = \lambda_c \Delta .$$

Як бачимо з виразів (4), $\alpha(t)$ - циклічний ланцюг, у якому стрибки відбуваються по колу

$$\alpha \to \alpha + 1 \to \ldots \to c \to 1 \to 2 \to \ldots \to c \to 1 \to 2 \ldots ,$$

причому час перебування у стані α має показниковий розподіл з параметром λ_α (з середнім λ_α^{-1}).

Друга компонента моделі $\kappa(t)$, $t > 0$ здійснює еволюцію таким чином:

а) якщо на інтервалі (u, v) перша компонента $\alpha(t) \equiv \alpha$, то прирости $\kappa(t)$ на цьому інтервалі здійснюються від'ємними поодинокими стрибками через незалежні інтервали часу, що мають один і той самий показниковий розподіл з параметром ν_α;

б) в момент стрибка $\alpha(t)$ зі стану α у стан $\alpha + 1$ $(\alpha < c)$ параметр розподілу приросту $\kappa(t)$ зі стану ν_α переходить у стан $\nu_{\alpha+1}$;

в) в момент стрибка $\alpha(t)$ зі стану c в стан 1 компонента $\kappa(t)$ отримує додатковий приріст $r > 0$ з імовірністю $\lambda_c(r)/\lambda_c$ (нагадаємо, що $\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_c(r)/\lambda_c = 1$).

Для подальшого дослідження введемо перехідні імовірності того, що в поточний момент часу t фаза потоку дорівнює β, а кількість відмов в системі дорівнює r за умови, що на початку часу $t = 0$ ланцюг має значення (α, k), тобто

$$P(\alpha(t) = \beta, \kappa(t) = r / \alpha(0) = \alpha, \kappa(0) = k) = P_{\alpha\beta}(k, r, t). \tag{5}$$

Оскільки $(\alpha(t), \kappa(t))$, $t \ge 0$ - ланцюг Маркова, однорідний за другою компонентою, то

$$P_{\alpha\beta}(k, r, t) = P_{\alpha\beta}(r - k, t),$$

де $P_{\alpha\beta}(k, t)$ - є спільною імовірністю того, що за час t компонента $\alpha(u)$ перейде зі стану α в стан β, а $\kappa(u)$ отримає приріст k. З рівностей (3) випливає, що кількість стрибків процесу $(\alpha(u), \kappa(u))$ на інтервалі $(0, t)$ з імовірністю 1 мажорується випадковою величиною, що має пуассонівський розподіл з параметром t

$$\max_{1 \le \alpha \le c}(\lambda_\alpha + \nu_\alpha) .$$

Це означає, що $(\alpha(t), \kappa(t))$, $t \ge 0$ - регулярний ланцюг Маркова [3], [4] і для знаходження перехідних імовірностей $P_{\alpha\beta}(k, t)$ можна використовувати як пряму, так і обернену систему диференціальних рівнянь Колмогорова. Побудувавши її і використавши перехідні імовірності за малий час Δ, отримаємо:

$$P'_{\alpha\beta}(k, t) = -(\lambda_\beta + \nu_\beta) P_{\alpha\beta}(k, t) + \nu_\beta P_{\alpha\beta}(k + 1, t) +$$

$$+ \lambda_{\beta-1} P_{\alpha,\beta-1}(k, t), \quad 1 < \beta \le c;$$

$$P'_{\alpha 1}(k,t) = -(\lambda_1+\nu_1)\,P_{\alpha 1}(k,t)+\nu_1 P_{\alpha 1}(k+1,t)+ \\ +\sum_{j<k} P_{\alpha c}(j,t)\,\lambda_c(k-j) \tag{6}$$

Одержана система диференціальних рівнянь описує процес надійності функціонування вихідної складної РЕС. Її можна розглядати як проміжний шуканий результат побудови стохастичної моделі.

Для одержання більш явного результату спробуємо знайти розв'язок побудованої системи диференціальних рівнянь. Для цього введемо твірні функції:

$$G_{\alpha\beta}(\theta,\mathrm{t}) = \sum_{-\infty}^{\infty}\theta^k P_{\alpha\beta}(k,t), \quad |\theta|=1\,;$$

$$\sum_{1}^{\infty}\theta^k\lambda_c(k) = \lambda_c^*(\theta), \qquad |\theta|\le 1\,.$$

Тоді, згідно з системою рівнянь (6), маємо:

$$\partial(G_{\alpha\beta}(\theta,t))/\partial t = -(\lambda_\beta+\nu_\beta)G_{\alpha\beta}(\theta,t)+(\nu_\beta/\theta)G_{\alpha\beta}(\theta,t)+ \\ +\lambda_{\beta-1}G_{\alpha,\beta-1}(\theta,t), \quad 1<\beta\le \mathrm{c};$$
$$\partial(G_{\alpha 1}(\theta,t))/\partial t = -(\lambda_1+\nu_1)G_{\alpha 1}(\theta,t)+(\nu_1/\theta)G_{\alpha 1}(\theta,t)+ \\ +\lambda_c^*(\theta)G_{\alpha c}(\theta,t)$$

або після спрощення:

$$\partial(G_{\alpha\beta}(\theta,t))/\partial t = \left[(1/0-1)\nu_\beta-\lambda_\beta\right]G_{\alpha\beta}(\theta,t) + \\ +\lambda_{\beta-1}G_{\alpha\beta-1}(\theta,t), \quad 1<\beta\le c; \\ \partial(G_{\alpha 1}(\theta,t))/\partial t = \left[(1/0-1)\nu_1-\lambda_1\right]G_{\alpha 1}(\theta,t)+ \\ +\lambda_c^*(\theta)G_{\alpha c}(\theta,t)\,. \tag{7}$$

Оскільки

$$G_{\alpha\beta}(\theta,0)=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, & \text{якщо } \alpha=\beta;\\ 0, & \text{якщо } \alpha\ne\beta,\end{cases}$$

то, перейшовши у модель (7) до перетворень Лапласа;

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(\theta,s)=\int_0^\infty e^{-st}G_{\alpha\beta}(\theta,t)\,dt, \quad s>0\,,$$

одержимо для них систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$s\hat{G}_{\alpha\beta}(\theta,s)-\delta_{\alpha\beta} = \left[(1/\theta-1)\nu_\beta-\lambda_\beta\right]\hat{G}_{\alpha\beta}(\theta,s) + \\ +\lambda_{\beta-1}\hat{G}_{\alpha,\beta-1}(\theta,s), \quad 1<\beta\le c;$$
$$s\hat{G}_{\alpha 1}(\theta,s)-\delta_{\alpha 1} = \left[(1/\theta-1)\nu_1-\lambda_1\right]\hat{G}_{\alpha 1}(\theta,s)+ \\ +\lambda_c^*(\theta)G_{\alpha c}(\theta,s)$$

або після спрощення:

$$\left[s+\lambda_\beta+(1-1/\theta)\nu_\beta\right]\hat{G}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+\lambda_{\beta-1}\hat{G}_{\alpha\,\beta-1}\,,\qquad 1<\beta\le c;$$

$$\left[s+\lambda_1+(1-1/\theta)\nu_1\right]\hat{G}_{\alpha 1}=\delta_{\alpha 1}+\lambda_c^{*}(\theta)\hat{G}_{\alpha c}\,. \tag{8}$$

Згідно з першим рівнянням (8), маємо:

$$\begin{aligned}&\Pi_\beta^c\,\lambda_j\,\Pi_1^\beta\,[s+\lambda_j+(1-1/\theta)\nu_j]\,\hat{G}_{\alpha\beta}=\\&=\delta_{\alpha\beta}\,\Pi_{\beta-1}^c\,\lambda_j\,\Pi_1^{\beta-1}\,[s+\lambda_j+(1-1/\theta)\nu_j]+\\&+\Pi_{\beta-1}^c\,\lambda_j\,\Pi_1^{\beta-1}\,[s+\lambda_j+(1-1/\theta)\nu_j]\,\hat{G}_{\alpha\beta-1}\,;\qquad 1<\beta\le c\,.\end{aligned}$$

Підсумуємо ці рівності по β до $\gamma \le c$. Після взаємного знищення однакових доданків у лівій і правій частинах рівняння одержуємо:

$$\begin{aligned}&\Pi_\gamma^c\,\lambda_j\,\Pi_1^\gamma\,[s+\lambda_j+(1-1/\theta)\nu_j]\,\hat{G}_{\alpha\gamma}=\\&=\sigma(1<\alpha\le\gamma)\Pi_\alpha^c\,\lambda_j\,\Pi_1^{\alpha-1}\,[s+\lambda_j+(1-1/\theta)\nu_j]+\\&+\Pi_1^c\,\lambda_j\,[s+\lambda_1+(1-1/\theta)\nu_1]\,\hat{G}_{\alpha 1}\,,\end{aligned} \tag{9}$$

де в залежності від істинності чи хибності твердження A $\sigma(A)$ дорівнює одиниці чи нулю відповідно. Отже, з виразів (8) і (9) випливає, що

$$\begin{aligned}&\hat{G}_{\alpha\gamma}(\theta,s)=(\sigma(1<\alpha\le\gamma)/\lambda\gamma)\Pi_\alpha^\gamma\,\{\lambda_j/[s+\lambda_j+(1-1/\theta)\nu_j]\}+\\&+\{\,[s+\lambda_1+(1-1/\theta)\nu_1]/\lambda\gamma\}\times\\&\times\Pi_1^\gamma\,\{\lambda_j/[s+\lambda_j+(1-1/\theta)\nu_j]\,\}\hat{G}_{\alpha 1}(\theta,s),\qquad(\gamma,\alpha=1,2,\ldots,c)\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Підсумовуючи одержані результати, основну побудовану формулу (10) можемо сформулювати у вигляді встановленої наступної теореми.

Теорема. Нехай $\hat{G}_{\alpha\beta}(\theta,s)$ – перетворення Лапласа твірної функції $G_{\alpha\beta}(\theta,t)$ перехідних сумісних імовірностей $P_{\alpha\beta}(k,t)$ того, що за час t компонента $\alpha(u)$ перейде зі стану α в стан β, а $\kappa(u)$ одержить в цей час приріст k, тобто:

$$\begin{aligned}&\hat{G}_{\alpha\beta}(\theta,s)=\int_0^\infty e^{-st}M\,(\theta^{k(t)-k(0)},\ \alpha(t)=\beta/\alpha(0)=\alpha)\,dt,\\&(s>0,\ |\theta|\in(0,1],\ \alpha,\beta=1,2,\ldots,c);\\&\Pi_\alpha^\beta\ (\theta,s)=\Pi_\alpha^\beta\,\{\lambda_j/[s+\lambda_j+(1-1/\theta)\nu_j]\,\},\qquad 1\le\alpha\le\beta\le c\,;\\&\lambda_c^{*}(\theta)/\lambda_c=\lambda(\theta).\end{aligned}$$

Тоді вони подаються у вигляді:

$$G_{\alpha 1}(\theta,s)=\left\{\delta_{\alpha 1}+\sigma(1<\alpha)\lambda(\theta)\,\Pi_{\alpha}^{c}(\theta,s)\right\}\times$$
$$\times\left\{\left[s+\lambda_{1}+(1-1/\theta)\nu_{1}\right]\left[1-\lambda(\theta)\right]\Pi_{1}^{c}(\theta,s)\right\}^{-1},$$
$$\hat{G}_{\alpha\gamma}(\theta,s)=\sigma(1<\alpha<\gamma)/\,\lambda\gamma\,\Pi_{\alpha}^{\gamma}(\theta,s)\;+$$
$$+\left[s+\lambda_{1}+(1-1/\theta)\nu_{1}\right]/\,\lambda\gamma\,\Pi_{1}^{\gamma}(\theta,s)\hat{G}_{\alpha 1}(\theta,s),$$
$$\gamma=1,2,\ldots,c\,. \tag{11}$$

З теореми (11) легко випливають такі наслідки:

$$\hat{G}_{11}(\theta,s)=\left\{\left[s+\lambda_{1}+(1-1/\theta)\nu_{1}\right]\right\}\left[1-\lambda(\theta)\,\Pi_{1}^{c}(\theta,s)\right]^{-1};$$
$$\hat{G}_{1\gamma}(\theta,s)=\left[(s+\lambda_{1}+(1-1/\theta)\nu_{1})/\lambda\gamma\right]\,\Pi_{1}^{\gamma}(\theta,s)\hat{G}_{11}(\theta,s).$$

Одержана система (11) описує процес надійності функціонування вихідної складної системи, причому побудована математична модель цього процесу є адекватною реальному процесу функціонування. Хоч кінцевий результат і отриманий, але не у явному вигляді, а лише у вигляді образів (11) інтегрального перетворення і причому не шуканих характеристик надійності, а лише твірних функцій, що породжені цими характеристиками. Цей факт може затруднювати практичне використання одержаних результатів (5), (6) і (11) при досить загальних передумовах до системи, хоч при конкретних вихідних даних, наприклад, при геометричних розподілах відмовлень та обмежених або скінчених можливих станах побудовані формули набувають компактнішого вигляду, тобто зручної форми для їхнього практичного використання.

Список літератури

1. *Ежов И.И., Скороход А.В.* Марковские процессы, однородные по второй компоненте // Теория вероятностей и ее применение: Сб. науч. тр. – М.: Наука, 1969.- Т. 1, 4. – С.3-14, 679-692.

2. *Корнийчук М.Т., Семенченко А.И., Совтус И.К.* Математическая модель задачи надежности системы, описываемой однородной цепью Маркова // Статистические методы обработки информации в авиационных радиоэлектронных системах: Сб. науч. тр. – К.: КИИГА, 1987. – С.125 – 128.

3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применение. – М.: Мир, 1964. –Т.1. – 498 с.

Стаття надійшла до редакції 15 січня 1998 року.

Май Тихонович Корнійчук (1937), закінчив механіко-математичний факультет Київського університету в 1961 році. Доктор технічних наук з 1990 року, головний науковий співробітник Київського міжнародного університету цивільної авіації. Має понад 200 опублікованих робіт в галузі математичних методів в теорії надійності, обробки інформації, стохастичного моделювання.

May T. Kornyitchyk (b. 1937) graduated from mechanic and mathematic department of Kyiv State University (1961). DSc (Eng) senior researcher of Kyiv International University of Civil Aviation. Auther of more than 200 publications in the fields of mathematical methods in the theory of reliability processing of information, stochastic simulation.