

УДК 539.375

Т.І. Матченко, канд. техн. наук

А.В. Зубець

О.І. Яворська

Л.Г. Мінневалієва

## АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВИТКУ ТРІЩИНИ ВІД УТОМЛЕНОСТІ В КОНСТРУКЦІЙНОМУ МАТЕРІАЛІ

Інститут екології та дизайну НАУ, e-mail: veryzhsky@mbox.com.ua

*Запропоновано алгоритм і методу моделювання швидкості зростання тріщини від утомленості в конструкції з урахуванням пошкоджуваності малої зони біля вершини тріщини залежно від форми циклу навантаження та програми навантаження.*

### Вступ

Для визначення надійності та тривалості експлуатації виробів із конструкційних матеріалів необхідна розробка алгоритмів і на їх основі пакетів прикладних програм, які дозволяють моделювати пошкодження у вигляді втоми матеріалів та прирощення тріщин, пов'язане з утомою матеріалу.

Для моделювання втоми матеріалів необхідно вміти визначати:

- розсіяну енергію деформації після заданої кількості циклів термічного впливу і силового навантаження на конструкцію;
- параметри анізотропії;
- значення змінених механічних і теплофізичних характеристик матеріалів після заданої програми термічного впливу і силового навантаження на конструкцію;
- величину залишкових деформацій і напружень за різними напрямками в різних площинах;
- відсоткове відношення пошкоджуваності матеріалу того чи іншого виду;
- прогноз кількості циклів навантаження до пошкодження мінімального об'єму матеріалу попереду кінчика тріщини для заданого режиму теоретичного впливу або силового навантаження.

Для моделювання довговічності виробу при розвитку тріщини від утомленості необхідно визначати:

- форму стійкого фронту тріщини;
- коефіцієнти  $K_{\max}$ ,  $K_{\min}$  в кожній точці фронту тріщини;
- величину розкриття тріщини;
- величину розсіяної енергії для підростання тріщини на величину пошкодженої зони матеріалу перед тріщиною;
- розміри пошкодженої зони перед тріщиною;
- напрямок зростання тріщини;
- залишкові напруження і деформації в пошкодженій зоні перед її вершиною;
- форми змінених діаграм міцності після циклічного навантаження.

Вирішуючи задачі, які пов'язані з втомою і міцністю матеріалу, критерії руйнування можна записати так:

$$dl/dN = f(\Delta K, K) \quad \text{або} \quad dl/dt = f(K), \quad (1)$$

де  $dl/dN$ ,  $dl/dt$  швидкість зростання тріщини;  $l$  – довжина тріщини;  $N$  – кількість циклів періодичної дії зовнішньої сили;  $t$  – час навантаження.

Ці похідні є функціями коефіцієнта інтенсивності напруг  $K$  і (або) розмаху  $\Delta K$ .

На рис. 1 наведено алгоритм оцінки безпеки конструкції або моделювання матеріалів, які містять тріщину.

Ліва частина рис. 1 відповідає реальній конструкції або модельованому матеріалу.

Тріщини можна виявити за допомогою різноманітних методів неруйнуючого контролю (ультразвукової дефектоскопії, магнітної дефектоскопії, акустичної емісії та ін.).

У подальшому під час циклічної зміни зовнішніх сил або під циклічним впливом середовища виникає поступове зростання тріщини, що призведе до нестійкого руйнування.

У випадку, що розглядається, дуже важливою проблемою є визначення терміну експлуатації виробу до того часу, поки не виникне нестійке руйнування.

Згідно з рис. 1 необхідно:

1) визначити параметри  $K$  і  $\Delta K$  для тріщини в конструкції із модельованого матеріалу, приймаючи до уваги характер дії прогнозованого навантаження;

2) на етапі проектування конструкції визначити в'язкість руйнування матеріалу  $K_c$ , з якого виготовлена конструкція, у тому середовищі, де використовується конструкція, та в конкретній формі напружено-деформований стан (НДС) і функції (1);

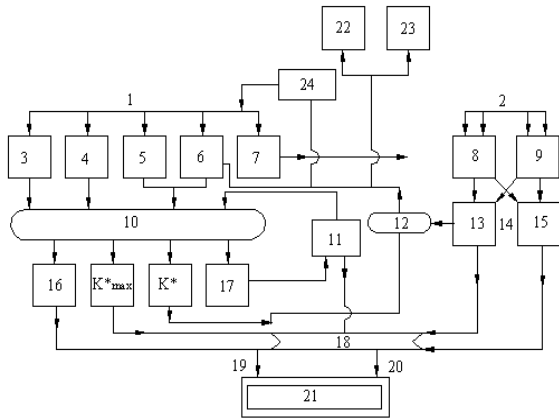


Рис. 1. Система оцінки елементів конструкцій, які мають тріщини:

$K^*$  – параметр тріщини, наприклад, з поправкою на пластичну зону;

1 – вихідні дані практичної задачі; 2 – вихідні дані, які отримані на основі дослідження матеріалів; 3 – навантаження; 4 – визначальні рівняння; 5 – геометрична форма; 6 – розміри тріщини; 7 – зовнішнє середовище; 8 – збільшені розміри тріщини; 9 – тривісність; 10 – параметри  $K_{\max}^*$ ,  $\Delta K^*$ ,  $r_p$ , які характеризують тріщину; 11 – дослідження тривісності (плоский напружений стан або плоска деформація); 12 – обчислення  $\Delta I$ ; 13 – швидкість зростання тріщини:  $dl/dN, dl/dt = f(\Delta K^*, K^*)$ ; 14 – вимірювання тріщини; 15 – в'язкість руйнування матеріалу  $K_c^*$  для плоского напруження стану або плоскої деформації; 16 – навантаження  $P_b$ ; 17 – розмір пластичної зони  $r_p$ ; 18 – порівняння з відповідним критерієм руйнування; 19 – руйнування; 20 – нестійке зростання тріщини; 21 – час або кількість циклів до руйнування; 22 – програма навантаження; 23 –  $\Delta K, ad/dn$ ; 24 – зміна властивостей матеріалу

3) порівняти отримане розрахунковим шляхом значення  $K_{\max}$  для тріщини в конструкції з експериментально встановленим значенням  $K_c$  і перевірити, чи задовольняється умова заданою залежністю  $K_{\max} < K_c$ ;

4) врахувати розвиток нестійкої тріщини і прийняти до уваги пластичну нестійкість;

5) урахувавши межу текучості використovanого матеріалу і конфігурацію розглядаємого елемента, визначити навантаження  $P_b$ , при якому виникає пластичне руйнування;

6) пересвідчитися в тому, чи є зовнішня сила менше отриманого значення навантаження;

7) якщо на підставі перевірок, які проведені в пп. 3, 4, виявиться, що тріщина ще стійка, то для кожного заданого інтервалу часу, виконуючи інтегрування рівняння (1), визначити довжину, на яку зростає тріщина;

8) оскільки завдяки зростанню тріщини виникає зміна максимального коефіцієнта інтенсивності напруги  $K_{\max}$  або навантаження пластичного руйнування, повернутися до пп. 3, 4 та провести перевірку на стійкість тріщини;

9) за рахунок багатократного використання операцій, наведених в пп. 7, 8, дати оцінку з деяким наближенням, коли виникне нестійке руйнування конструкції під час прикладання зовнішніх сил.

### Розрахунок швидкості зростання тріщини від утомленості

Для розрахунку процесу розповсюдження тріщини при навантаженні зі змінною амплітудою, виходячи з даних про навантаження з постійною амплітудою, необхідно використовувати правило інтегрування і правило накопичення пошкоджень.

Аналізуючи правила визначення накопичення пошкоджень для розрахунку часу життя конструкції при циклічному навантаженні, прийшли до висновку, що для оцінок часу життя краще за все застосовувати правило Пальмгрена–Майнера, в якому використовується принцип лінійної суперпозиції.

Недолік правила Пальмгрена–Майнера полягає в тому, що воно не враховує ефекти взаємодії циклів навантаження з малою і більшою амплітудами. Проте процес розрахунку циклів зі змінною амплітудою містить безліч інших невизначених питань, які тією ж мірою можуть визначати кінцевий результат, що і недоліки правила Пальмгрена–Майнера, а саме:

- величину місцевих напружень;
- розподілення даних про навантаження з постійною амплітудою;
- застосування даних про навантаження з постійною амплітудою до умов навантаження;
- недостатні знання про історію навантаження.

У випадку, коли необхідно розрахувати процес розповсюдження тріщини, недолік, який властивий правилу лінійного інтегрування, призводить до результату з підвищеною надійністю.

Отже, правило лінійної суперпозиції можна вважати інструментом, який притаманний для інженерних розрахунків процесу розповсюдження тріщини. Недоліки, які мають ці методи розрахунку, в цілому не пов'язані з процесом інтегрування.

Процес розповсюдження тріщини доцільно розраховувати, інтегруючи за допомогою графіка залежності  $da/dn$  від  $\Delta K$ .

Якщо спектр навантаження відомий, то процес інтегрування виконують різними методами:

1. Інтегрування цикл за циклом в порядку їх руху у випадковому процесі навантаження проводять, починаючи з тріщини мінімального розміру  $a_i$ , при якому можливо її виявлення, з амплітудою зміни напруження  $\Delta S_i$ .

Відповідна амплітуда зміни інтенсивності напружень

$$\Delta K_1 = \alpha \Delta S_1 \sqrt{\pi a_i}.$$

За допомогою графіка залежності  $da/dn$  від  $\Delta K$  знаходять  $(da/dn)_i$ . Збільшення розміру тріщини  $\Delta a = (da/dn)_i$ .

На нову довжину тріщини  $a_i + \Delta a$  буде діяти напруга з амплітудою зміни  $\Delta S_2$  і т.п. Така процедура трудомістка оскільки потребує проведення інтегрування за тисячами циклів.

Процес розповсюдження тріщини значною мірою залежить від послідовності додатку навантажень, яка має випадковий характер. Велике навантаження, яке прикладене до маленької тріщини, призведе до невеликої зміни  $\Delta K$ , і відповідна величина  $da/dn$  буде також невелика. Якби те саме навантаження було прикладене до великої тріщини, то зміна величини  $\Delta K$  була б значно більшою. Тому результат обчислень, звичайно, буде залежати від послідовності навантаження.

2. Для простоти інтегрування блоків циклів з однаковою амплітудою швидкість зростання тріщини при її розповсюдженні на невелику відстань можна вважати постійною. Результат застосування даної процедури дуже залежить від порядку проходження блоків.

3. Історію навантаження усереднюють, розбивши на відрізки. При цьому число появи високих навантажень на відрізку може бути дробовим. Цей спектр інтегрують і отримують швидкість розповсюдження тріщини в часі.

Усі три методи інтегрування мають серйозні недоліки. Результат інтегрування в усіх випадках залежить від використаної послідовності імпульсів. Випадкове навантаження, яке діє на велику тріщину, призведе до суттєвого збільшення величин  $\Delta K$  і  $da/dn$ , чим у випадку, коли вона діє на маленьку тріщину.

Крім того, у цих методах не враховується вплив навколишнього середовища і частота навантаження на втому матеріалу, вихідним даним притаманна наявність значного розкиду та в них нехтують ефектами взаємодії за рахунок введення залишкових стискуючих напружень, які сприяють закриттю тріщини.

У напівемпіричних методах інтегрування була зроблена спроба врахувати ефекти взаємодії при розповсюдженні тріщин. У цих методах інтегрування для врахування ефекту гальмування використовується коефіцієнт взаємодії, який визначається розміром пластичної зони. Під час застосування цих методів інтегрування зустрічаються ті самі труднощі, що і при лінійному інтегруванні.

Для проведення інтегрування необхідно знати порядок проходження імпульсів, спектр навантажень і напруг.

В усіх випадках інтегрування потрібно проводити від циклу до циклу, що потребує великих затрат машинного часу. Крім того, результат інтегрування незмінно залежить від порядку проходження імпульсів, тому надійність розрахунку залежить від правильного вибору історії навантаження.

Моделювання пошкоджуваності матеріалу в малій області біля вершини тріщини у разі циклічного навантаження дозволяє визначити швидкість її підростання  $(da/dn)$  на величину однієї бороздки при різноманітних амплітудах і форми цикла навантаження.

Ці дані дозволяють визначити поправкові коефіцієнти у формулах інтегрування блоків циклів з однаковою амплітудою.

### Моделювання зміни властивостей матеріалу в пластичній зоні біля вершини тріщини

У багатьох працях [1–7] аналітично описано закономірності накопичення пошкодження від утомленості матеріалу на основі енергетичних критеріїв руйнування.

У праці С.Е. Фелтнера і І.Д. Мороу [4] передбачається, що руйнування від утомленості відбувається, коли сумарна необоротна розсіяна енергія досягає критичного значення, яке дорівнює максимальній роботі деформування при статичному навантаженні.

Проте багато експериментальних даних [5–9] свідчать, по-перше, що рівні енергій, які реалізовані при багатоцикловогому руйнуванні від утомленості, особливо при великих кількостях циклів до руйнування, істотно вище, чим під час руйнування при монотонному збільшенні навантаження. По-друге, що зі збільшенням кількості циклів до руйнування сумарна розсіяна енергія для більшості досліджуваних сплавів значно збільшується, оскільки зі збільшенням кількості циклів до руйнування, а отже, зі зменшенням рівня діючих напруг зростає частка “безпечної” енергії, яка не пов’язана з пошкодженням від утомленості. Тобто сумарну розсіяну енергію визначають за залежностями [5; 9]:

$$E = \sum_1^{N_p} D = \text{const};$$

$$\sum_1^{N_p} (D - D_r) = \text{const}; \quad (2)$$

$$E = \int_0^v \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon dv$$

або згідно з працею [8]

$$\sum_1^N \left[ D - D_r \left( \frac{D}{D_r} \right)^a \right] = \text{const} \quad (3)$$

де  $D$  – питома розсіяна енергія за цикл навантаження;  $D_r$  – питома розсіяна енергія за цикл при напругах, яка дорівнює межі витривалості;  $a$  – емпіричний параметр. Проте напруга межі витривалості залежить від умов, в яких виникає навантаження зразка (температура, частота навантаження, агресивність середовища, асиметрія навантаження та ін.). Тобто вираз (2) не є інваріантом від зовнішніх зусиль.

Вираз (3) може бути інваріантом, якщо відомий закон зміни параметра  $a$  залежно від зміни умов, при яких проводився експеримент і при яких застосовується критерій (3). Для отримання таких залежностей потрібно проведення достатньої кількості експериментів. Оскільки незавжди вдається прогнозувати довговічність відповідальних конструкцій при складних режимах навантаження за результатами досліджень зразків при простих режимах навантаження, слід вважати проблему невирішеною. Розсіану енергію у працях [1–9] визначають за площею гістерезисної петлі. У працях [1; 3; 5; 9–19] пропонується свій спосіб визначення площі гістерезисної петлі.

Загальним для всіх наведених моделей є те, що в них не розділяється розсіяна енергія при розтягненні, стисканні, зсуві.

Звичайно вплив на пошкоджуваність розсіяної енергії при розтягненні відрізняється від розсіяної енергії при стисканні. У зв'язку з цим проведемо аналіз пошкоджуваності матеріалу при різних видах статичного навантаження.

### Пошкоджуваність матеріалу при розтягненні

Під час повторного навантаження мідного дроту з початковою довжиною 25,1 см, діаметром 0,323 см при досягненні рівня напруг попереднього максимального навантаження діаграми повторного і статичного деформування збігаються (рис. 2).

На рис. 3 наведено діаграми деформування маловуглецевої листової сталі, прокатаної до деформації 1 % після старіння при різних температурах [13].

Підрахунок площі діаграм показав, що незалежно від часу старіння площі діаграм не відрізняються більш чим на 1,5 %. Якщо немає достатнього для якісних змін зовнішнього припливу енергії (динамічного навантаження), то старіння матеріалу (зміна його структури) призводить до зміни характеристик матеріалу, але не впливає на енергію руйнування і площу діаграми  $\sigma - \epsilon$ .

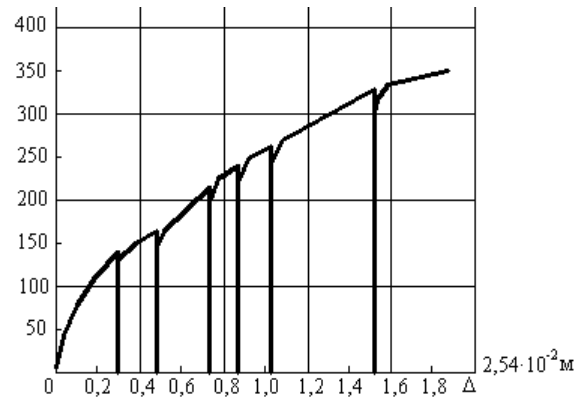


Рис. 2. Розтягнення при повторному навантаженні мідного дроту

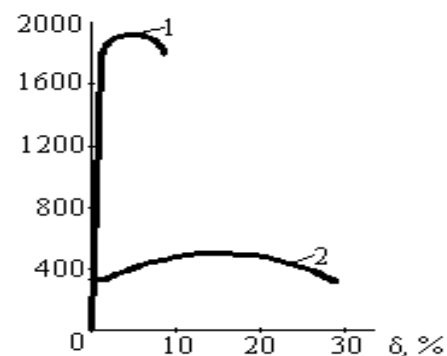


Рис. 3. Діаграма деформування сталі 45: 1 – загартовування і відпуску при 433 К; 2 – нормалізація

Із рис. 3 видно, що площі діаграми деформування сталі 45 для загартовування і відпуску при 433 К дорівнює площі діаграми деформування цієї ж сталі при нормалізації у той час, як характеристики  $\sigma_T$ ,  $\sigma_B$  істотно різні [14].

На рис. 4 це явище показано для сталі 10ГН2МФА [14].

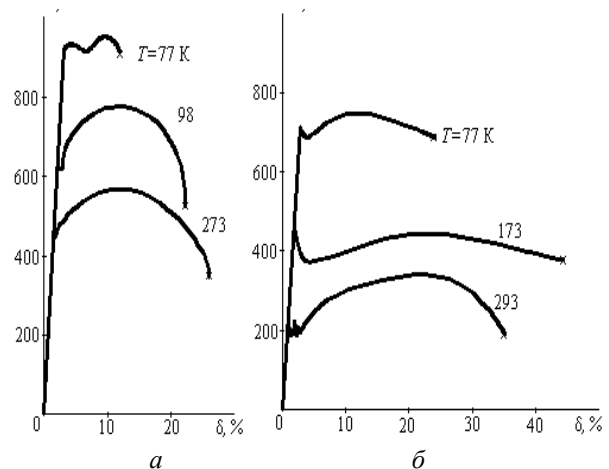


Рис. 4. Діаграми деформування сталі 10ГН2МФА (а) і армко-заліза (б)

Для армко-заліза підвищення зовнішньої температури від 173 до 293 К призвело до структурної перебудови, унаслідок чого відбувалося перерозподілення енергії руйнування від розтягнення на такі складові, як енергія руйнування від зсуву шарів матеріалу.

У працях [16; 17] було відзначено, що домішки кремнію, нікелю, алюмінію і ванадію до заліза викликають значне збільшення швидкості деформаційного зміцнення. Проте площі діаграм деформування залишаються однаковими. Тобто енергія руйнування матеріалу не залежить від структурних змін в ньому, якщо ці зміни не викликані припливом зовнішньої енергії, достатньої для якісних змін енергії руйнування [14; 16; 17].

### Пошкоджувальність матеріалу при стисканні

Вивчаючи опір матеріалу стисканню, застосовують зразки у вигляді куба або циліндра з висотою на багато більшого діаметра.

Подрібнений зразок має вигляд зрізаних пірамід, які з'єднані меншими основами. Ця форма руйнування залежить від наявності сил тертя між зразком і опорними плитами преса. Якщо зменшити це тертя шляхом змащування парафіном торців кубика, то характер руйнування буде таким, що матеріал стисненого зразка руйнуватиметься від порушення опору відриву окремих його частин [15]. Якщо це – пластичний матеріал (маловуглецева сталь), то в міру збільшення площі поперечного перерізу доводиться для подальшого деформування все збільшувати навантаження. Аналогічної межі міцності при розриві неможливо спостерігати.

Отже, під час стискання зразка можуть порушуватися зв'язки в площині зсуву і в результаті відриву вздовж осі, перпендикулярній осі прикладення навантаження, але зв'язки вздовж осі прикладення навантаження не порушуються.

### Пошкоджувальність матеріалу при зсуві

У працях [20–23] висувається припущення, що при переході матеріалу із пружного в пружно-пластичний стан дотичні напруження релаксують.

Зокрема, у праці [23] досліджується закручування зразка із швидкорізальної сталі Р6М5 ( $\sigma_T = 2000$  МПа) з м'яким прошарком зі сталі 20 ( $\sigma_T = 210$  МПа). Виявилось, що для закручування зразка на кут  $\pi/6$  не потрібно ніяких зусиль.

Крутний момент, виміряний з точністю 0,5 Н·м, дорівнює нулю. При  $\varphi \geq \pi/6$  зразки почали опиратися закручуванню. Якщо момент закручування стає більше нуля, крутіння зупиняється, причому деформація закручування залишається постійною.

Через деякий час (10...20 с) момент закручування зростає (при  $\varphi = \text{const}$ ), а напруження розтягнення зменшується.

При  $\sigma = \sigma_T$  виникає повна або часткова релаксація дотичних напружень у результаті порушення зв'язків в площинах пластичного ковзання [23].

Якби стан був складнонапружений, зменшення опору зсуву можна було б пояснити як вичерпність пластичності матеріалу згідно з теорією пластичної течії. Проте тут розглянуто зразок, який працює на чистий зсув. У свою чергу, експериментальні дані для простих видів деформування одноосового розтягнення показують, що, чистий зсув є первинним, а теорії, що побудовані з їх використанням, – другорядними. Тому зменшення опору чистому зсуву неможна пояснити на основі теорій, побудованих з використанням експериментальних даних, не враховуючи цього явища.

Оскільки характер розташування зсуву залежить від форми зразка або конструкції, то геометричні характеристики зразка (конструкції) впливають на характер накопичення пошкоджень і спосіб їх визначення.

Викладемо методику визначення розсіяної енергії при циклічному (осьовому) навантаженні зразка у вигляді циліндричного стрижня. У такому зразку смуги ковзання розташовані під кутом  $45^\circ$  до осі стрижня. Оскільки зразок циліндричний, то поверхні ковзання утворюються у вигляді конічних поверхонь.

Для задовільнення умов рівноваги і урахування поверхні ковзання, в якій виникає накопичення пошкоджень від зсуву, слід розглядати рівновагу конуса. Із умови рівноваги сил визначають площу поверхні конуса, перпендикулярної осі  $x$ :

$$S_x \sigma_x = S_v (\sigma_v \sin 45^\circ + \tau_v \sin 45^\circ) \quad (4)$$

$$\text{або } S_x \sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{2} S_v (\sigma_v + \tau_v).$$

Підставляючи у вираз (4) значення поверхні  $S_x$  і  $S_v$ , отримаємо

$$\sigma_x = \sigma_v + \tau_v k, \quad (5)$$

де  $k$  – емпіричний коефіцієнт.

Як доведення справедливості виразу (5), гіпотези про повну або часткову релаксацію дотичних напружень у результаті порушення зв'язків в площині зсуву, звернемося до експериментальних даних осьового статичного деформування зразків з армко-заліза [24].

Із праці [24] видно, що при  $\sigma = \sigma_T$  напруження  $\sigma$  зменшилось у два рази (зуб плинності). Якщо виходити з гіпотези про розрив зв'язків у площинах зсуву і, як наслідок, повної релаксації дотичних напружень [20–23] для армко-заліза при

$\sigma = \sigma_T$  та розглядати умову рівноваги в площині, де присутні осьові деформації і деформації зсуву, то у виразі (5)  $\tau_v = 0$  при  $\sigma \geq \sigma_T$ , тоді  $\sigma_x \geq \sigma_v$  при  $\sigma \geq \sigma_T$ , тобто формула (5) описує експериментальні дані, наведені в праці [24].

### Пошкоджуваність матеріалу при циклічному навантаженні

При циклічному навантаженні, яке перевищує межу втоми матеріалу, завжди виникає пластична деформація. У результаті на поверхні зразка залишаються сліди ковзання, розподілення яких стає більш нерівномірним при збільшенні кількості циклів навантаження.

У багатьох матеріалах ця неоднорідність пластичних деформацій настільки велика, що можна чітко розрізнити дуже сильне деформування смуги ковзання в порівняно слабкодеформованій матриці [18]. Однією з характерних особливостей пошкодження від утомленості є те, що в деяких зонах і площинах зсуву, які розташовуються під певним кутом, не виконується умова сумісності деформацій. Орієнтація площин зсуву залежить від форми виробу, способу навантаження. Тобто пошкодження від утомленості слід розглядати як складний процес із простих видів пошкоджень (зсуву, відриву при розтягненні і стисканні).

Розсіяна енергія за один цикл навантаження (гістерезисна петля) витрачається на розрив зв'язків вздовж осі стрижня при розтягненні  $\sigma^+$ , на розрив зв'язків уздовж осі стрижня при стисканні  $\sigma^-$ , на ковзання одних шарів (тертя) в площині зсуву при  $\gamma^+$  і на ковзання інших шарів в інших або тих самих площинах зсуву  $\gamma$ . Тоді можна передбачити, що сумарна пошкоджуваність певного характеру при циклічному навантаженні дорівнює пошкоджуваності того самого характеру при статичному навантаженні. Проте, можливо, не всі характерні пошкодження враховано.

Крім того, можливі похибка вимірів в експерименті і похибка підрахунку розсіяної енергії при великій кількості циклів навантаження. Тому введемо емпіричні коефіцієнти  $H_1, H_2, H_3, H_4$  і запишемо:

$$\sum_{i=1}^{N_{p1}} D_1 H_1 = A_1; \quad \sum_{i=1}^{N_{p2}} D_2 H_2 = A_2;$$

$$\sum_{i=1}^{N_{p3}} D_3 H_3 = A_3; \quad \sum_{i=1}^{N_{p4}} D_4 H_4 = A_4,$$

де  $N_{p1}, N_{p2}, N_{p3}, N_{p4}$  – критична кількість циклів до руйнування мінімального об'єму матеріалу в тій чи іншій площині в результаті накопичення пошкоджень того чи іншого характеру;  $D_1, D_2$  – додатна і від'ємна частини площі гістерезисної петлі в осях  $\sigma_v - \epsilon$ ;  $A_1, A_2$  – площа діаграми  $\sigma - \epsilon$

статичного розтягнення та стискання даного матеріалу по осі  $x$ ;  $H_1, H_2, H_3, H_4$  – відповідно коефіцієнт, який визначає частину енергії, затрачену на розтягнення по осі  $x, xy, yz, y$  і залежить від розмірів і форми зразка (для ізотропного матеріалу  $A_1=A_2$ );  $D_3, D_4$  – додатна і від'ємна частини гістерезисної петлі в координатах  $\tau_v - \gamma$ ;  $A_3, A_4$  – площі діаграми статичного зсуву в осях  $\tau_v - \gamma$ .

Запропонована модель достатньо якісно пояснює утворення поздовжніх мікророзривів, губи зрізу, зони відриву та ін.

Розсіювання енергії при циклічному навантаженні тісно пов'язано з орієнтацією поверхонь і їх площ, в яких виникає накопичення пошкоджень. Форма цих поверхонь залежить від виду навантажень і форми конструкції (елемента конструкції). Тому сумарне розсіювання енергії при циклічному навантаженні запишемо у вигляді:

$$E = \int_0^v \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon dv = \sum_1^{N_p} D + A_3 = \int_S \left[ \sum_{i=1}^{N_{p1}} D_1 H_1 + \sum_{i=1}^{N_{p2}} D_2 H_2 + \sum_{i=1}^{N_{p3}} D_3 H_3 + \sum_{i=1}^{N_{p4}} D_4 H_4 + A_3 \right] ds, \quad (6)$$

де  $A_3$  – залишковий ресурс матеріалу.

Якщо розглянути втому матеріалу не в зразку, а в конструкції, де присутній повний тензор деформацій, то замкнута поверхня  $S$ , переважно, збігається з поверхневими пошкодженнями:

$$E = \int_0^v \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon dv = \int_0^v \left[ \int_0^\epsilon \sigma_x dx + \int_0^\epsilon \sigma_y dy + \int_0^\epsilon \sigma_z dz + \int_0^\tau \tau_{xy} dx + \int_0^\tau \tau_{yz} dy + \int_0^\tau \tau_{zx} dz \right] dv =$$

$$= \int_S \left[ \sum_{i=1}^{N_{p1}} D_{1x} H_1 + \sum_{i=1}^{N_{p1}} D_{1y} H_1 + \sum_{i=1}^{N_{p1}} D_{1z} H_1 + \sum_{i=1}^{N_{p2}} D_{2x} H_2 + \sum_{i=1}^{N_{p2}} D_{2y} H_2 + \sum_{i=1}^{N_{p2}} D_{2z} H_2 + \sum_{i=1}^{N_{p3}} D_{3xy} H_3 + \sum_{i=1}^{N_{p3}} D_{3yz} H_3 + \sum_{i=1}^{N_{p3}} D_{3zx} H_3 + \sum_{i=1}^{N_{p4}} D_{4xy} H_4 + \sum_{i=1}^{N_{p4}} D_{4yz} H_4 + \sum_{i=1}^{N_{p4}} D_{4zx} H_4 + A_3 \right] dS,$$

де  $D_{3xy}, D_{4xy}$  – додатна та від'ємна частини площі гістерезисної петлі при зсуві шарів матеріалу в площині  $xy$ .

### Аналітичне розв'язання задачі про напружено-деформований стан

Наближене розв'язання задачі про НДС у вершині тріщини при циклічному навантаженні встановлено при дослідженні деформування матеріалу у вершині тріщини МКЕ [27].

1. Напружено-деформований стан у вершині при циклічному навантаженні визначають у два етапи. На першому етапі навантаження розглядається від мінімального навантаження до максимального коефіцієнта інтенсивності напруг від  $k_{\min}$  до  $k_{\max}$ , на другому етапі – від  $k_{\max}$  до  $k_{\min}$ . На кожному з етапів здійснюється навантаження, близьке до статичного, і, якщо процес аналізується в системі координат, пов'язаної з початком кожного півциклу, справедлива деформаційна теорія пластичності.

2. Деформування в нульовому півциклі описується діаграмою деформування з лінійним зміцненням. При розвантаженні (зворотному навантаженні) деформування відбувається по кривій  $\bar{S}(x)$ .

3. Для визначення інтенсивності напруг і деформацій у рамках деформаційної теорії пластичності використовують відомі залежності

$$\sigma_i = (E_s/E)^{0,5} \sigma_i^e;$$

$$\varepsilon_i = (E_s/E)^{-0,5} \varepsilon_i^e,$$

які можна подати у вигляді

$$\sigma_i \varepsilon_i = \sigma_i^e \varepsilon_i^e,$$

де  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  – інтенсивність напруг і деформацій у вершині тріщини при розв'язанні пружно-пластичної задачі;  $\sigma_i^e$ ,  $\varepsilon_i^e$  – інтенсивність напруг і деформацій у вершині тріщини при розв'язанні пружної задачі;  $E_s$  – січний модуль.

4. Параметр  $q$  беруть постійним у пружно-пластичній зоні і не залежним від ступеня деформування матеріалу. При зміні відносного модуля зміцнення  $E_u/E$  від 0 до 0,05 (у цей діапазон попадає більшість конструкційних матеріалів)  $q = 0,65$ .

5. У структурному елементі НДС однорідний і визначається через середньоінтегральні значення напруг, що відповідають пружному розв'язанню задачі про тріщину.

6. Аналіз НДС застосовують для плоскої деформації.

### Висновки

1. Запропоновано алгоритм моделювання швидкості зростання тріщини утомленості у виробі.

2. На підставі закону збереження енергії висувається гіпотеза, що для одного виду пошкодження сума розсіюваної енергії при циклічному навантаженні і залишкового енергетичного ресурсу дорівнює розсіюваній енергії цього самого виду пошкоджуваності при статичному навантаженні.

3. У загальному вигляді запропоновано рівняння дисипації енергії для циклічного наванта-

ження зразка (конструкції). Визначення складових дозволить урахувати вид матеріалу, форму зразка, його розміри, асиметрію цикла навантаження.

4. Для перевірки висунутої гіпотези і рівняння (6) необхідно розробити методіку дослідження зразків, які забезпечують при циклічному навантаженні побудову діаграм для найпростіших видів пошкодження (зсув площин, осьове стискання, осьове розтягнення).

### Список літератури

1. Муратов Л.В. Энергия разрушения при циклических и статических нагрузках // Прочность материалов при переменных нагрузках. – М.: АН СССР, 1963. – С. 111–118.
2. Один И.А. Теория пределов усталости металлов при несимметричных циклических и сложнопластических состояниях // Заводская лаборатория. – 1937. – № 4. – 300 с.
3. Change C.S., Pimbley W.T., Cunway H.D. An analysis of metal fatigue based on hysteretic energy // Exp. Mech. – 1968. – 8, №3. – С. 53–57.
4. Felthner C.E., Morrow I.D. Microplastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue fracture // Trans ASME. – 1961. – 83, №1 – P. 15–22.
5. Hanstock R.F. Damping capacity strain hardening and fatigue // Proc. Phys. Soc. – 1947. – 59. – P. 275–287.
6. Inglis N.P. Hysteresis and fatigue of Wohler rotating cantilever specimen // Metallurgist. – 1927. – Febr. – P. 23–27.
7. Troshenko V.T. Inelastic strain and hysteresis is energy criteria for fatigue fracture of metals // Proc. Intern. Conf. on Mechanical Behavior of Mater. – 1927/ – P. 420–430.
8. Трощенко В.Т. Критерии усталостной прочности металлов и сплавов, основанные на учете рассеяния энергии // Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. – К.: Наук. думка, 1966. – С. 168–177.
9. Васинюк Н.М., Хамаза Л.А. О критериальной оценке усталостной прочности металлов // Пробл. прочности. – 1973. – № 4. – С. 75–77.
10. Весел Э., Кларк У., Преил У. Расчеты стальных конструкций с крупными сечениями методами механики разрушения // Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – С. 213–244.
11. Hafford G.R., Morrow I.D. Low-cycle fatigue in torsion // Proc. ASTM. – 1962. – 62. – P. 695–707.
12. Taylor G.I., Quinney H. Philos. Trans. Roy. Soc. – London. – Sec. A. – 1931. – 230. – P. 323–362.
13. Kengon R.L., Burns R.S. Age Hardening of Metals, ASM, Cleveland, 1959. – С. 47–52.

14. Троценко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В. Трещиностойкость материалов при циклическом нагружении. – К.: Наук. думка, 1987. – 256 с.
15. Беляев Н.Б. Сопротивление материалов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1976. – 608 с.
16. Stoloff N.S., Davies, R.G., Ku R.C. Trans. AIME. – 1965. – 233, 1500. – С. 106–110.
17. Stoloff N.S., Davies R.D., Johnson T.L. In “Environment – Sensitive Mechanical Behavior”, Gordon & Breach. – New York, 1966. – P. 613–653.
18. Roney C., Reimann W.H., Wood W.A. Trans. Met. Soc. AIME. – 1965. – 233, 298. – С. 202–206.
19. Hahn G.T., Rosenfield A.R. Metallurgical Trans. – 1965. 6 (1975). – С. 10–14.
20. Бурак Я.И., Подстригач Я.С. О релаксации напряжений, обусловленных дислокацией Пайерса вследствие образования облака Коттрела // ФХММ. – 1966. – № 1. – С. 45–50.
21. Упругость и неупругость материалов: Сб. ст./ Под ред. С.В. Вонсовского. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 396 с.
22. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
23. Похмурский В.И., Гаплик Б.К., Иваницкий Я.Л. О релаксации касательных напряжений в металлах // ФХММ. – 1987. – № 3. – С. 124–125.
24. Togart W.I.M. Elements of Mechanical Metallurgy, Macmillan. – New York, 1966. – С. 10–14.
25. Ronay M. Tech. Rept. – № 9. – Inst. for the study of fatigue and reliability, Columbia Univ. – New York, 1964. – С. 34–38.
26. Boettner R.C., Laird C., McEvily A.I. Ir., Trans. Met. Soc. AIME. – 1965. – 233, 379. – С. 78–82.
27. Карзов Г.П., Марголін Б.З. Аналіз особливостей деформування матеріалу у вершині тріщини і критеріїв руйнування утомленості з врахуванням структурних параметрів: Повідомл. 1 // Пробл. міцності. – 1988. – №8. – С. 14–27.

Стаття надійшла до редакції 09.03.04.

Т.И. Матченко, А.В. Зубец, О.И. Яворская, Л.Г. Минневалиева

Алгоритм моделирования развития усталостной трещины в конструкционном материале

Предложен алгоритм и методика моделирования скорости роста усталостной трещины в конструкции с учетом повреждаемости малой зоны у вершины трещины в зависимости от формы цикла нагружения и программы нагружения.

T.I. Matchenko, A.V. Zubets, O.I. Yavorscaya, L.G. Minnevaliyeva

The algorithm of modelizing of crack development in structural material

The algorithm and method of modelizing of fatigue crack growth velocity of a small tone at the top of crack depending on cycle's forms of loading and way of loading was proposed.