ФІЗИКО–МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 519.652:519.254

П.О. Приставка, д.т.н., проф.
О.Г. Чолишкіна, к.т.н., доц.

УТОЧНЮЮЧИЙ СПЛАЙН, БЛИЗЬКИЙ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО В СЕРЕДНЬОМУ, НА ОСНОВІ *B*-СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ

Національний авіаційний університет
E-mail: chindakor@mail.ru

Розглянуто побудову сплайн-апроксимації, що враховує випадкову природу даних. Наведено локальний поліноміальний сплайн першого ступеня уточнення на основі лінійної комбінації B-сплайнів п'ятого порядку, близький до інтерполяційного в середньому. Запропоновано сплайн, придатний для реалізації при автоматизації обробки послідовностей відліків функцій спостережень, наприклад, цифрових сигналів із кінцевою енергією. Сформульовано та доведено теорему про величину норми сплайну. Виконано порівняльній аналіз величини норми запропонованого сплайн-оператора з нормами сплайнів другого – четвертого порядків першого ступеня уточнення, який засвідчує про більшу стійкість оцінки при суттєвих осциляціях функції, що апроксимують.

Ключові слова: норма сплайн-оператора, сплайн, близький до інтерполяційного в середньому, уточнюючий сплайн, *B*-сплайн.

Постановка проблеми

Нехай із кроком $h>0$ задано розбиття дійсної осі

$$\Delta_h : t_i = ih,\ i \in Z,$$

у вузлах якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t) \in C^r$, $r \ge 2$, визначеної на $R_1(-\infty;\infty)$. Вважають, що інформація про функцію $p(t)$, задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді

$$\overline{p}_i = \frac{1}{h} \int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt.$$

При цьому справжнє значення функції $p(t)$ у вузлах визначають так:

$$p_i = \overline{p}_i + \varepsilon_i,\ i \in Z, \qquad (1)$$

де ε_i – похибка.

B-сплайном $B_{r,h}(t)$ порядку r $(r \ge 1)$ на розбитті Δ_h називають функцію, що визначається рекурентно таким чином:
якщо

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2], \end{cases}$$

то

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau)\,d\tau.$$

Явні вигляди *B*-сплайнів до п'ятого порядку можна знайти, наприклад, в роботах [1–3].

При обчисленнях обмежуються сплайнами $B_{2,h}(t)$ та $B_{3,h}(t)$, проте при обробці даних вимірювань сигналів є потреба у використанні й вищих порядків *B*-сплайну. Зумовлено це тим, що зі зростанням порядку, властивості *B*-сплайнів у частотній області прямують до властивостей гауссіана [4], але на відміну від останнього *B*-сплайни мають меншу обчислювальну складність.

Будь-яка функція $p(t) \in C^r$ може бути точно наближена лінійною комбінацією *B*-сплайнів [5; 6]:

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i B_{r,h}(t-ih),\ r \ge 1, \qquad (2)$$

де c_i, $i \in \mathbb{Z}$ визначаються із інтерполяційних умов та розв'язку відповідної системи лінійних алгебричних рівнянь

$$p_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^{(r)} B_{r,h}(t-ih),\ r \geq 1,\ i \in \mathbb{Z}. \qquad (3)$$

Зважаючи на скінченність носіїв B-сплайнів, в кожному рядку визначника системи (3) не рівними нулю буде лише r елементів (значень сплайнів $B_{r,h}(t)$), що розташовані вздовж головної діагоналі. Останнє й забезпечує простоту обчислення коефіцієнтів інтерполяції.

Із розв'язку системи (3) отримують фундаментальний сплайн

$$S_r(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^{(r)} B_{r,h}(t-ih),\ r \geq 1,$$

що має інтерполяційні властивості.

На практиці за даними, поданими у вигляді (1), інтерполяція функції за виразом (2) є недоречною. Виникає задача побудови апроксимацій, що враховують випадкову природу даних, наприклад, оператори інтерполяційні в середньому.

Аналіз досліджень та постановка задачі

Наближення гладких функцій на основі лінійних комбінацій B-сплайнів висвітлено в багатьох роботах І. Шоенберга, К. Де Бора, М.П. Корнійчука, М. Унсера та ін.

Поліноміальні локальні сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому, розглядали А.О. Лигуном, О.О. Шумейко, В.В. Кармазіною [1; 7],

Окрім явних виглядів у роботах одержано норми сплайн-операторів та похибки апроксимації.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями (1) на розбитті Δ_h були введені такі лінійні комбінації B-сплайнів другого – п'ятого порядків:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{r,h}(t-(i+0,5)h),$$

$$r = 2, 4,$$

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{r,h}(t-ih),\ r = 3, 5$$

та уточнюючи сплайни, наприклад, першого ступеня уточнення:

$$S_{2,1}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{6}\Delta^2 p_i\right) B_{2,h}(t-(i+0,5)h),$$

$$S_{3,1}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{5}{24}\Delta^2 p_i\right) B_{3,h}(t-ih),$$

$$S_{4,1}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{4}\Delta^2 p_i\right) B_{4,h}(t-(i+0,5)h),$$

де

$$\Delta^2 p_i = p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}.$$

За визначенням $S_{r,u}(p,t)$, $u = 0,1$ є сплайнами з множини сплайнів мінімального дефекту, близькими до інтерполяційних у середньому. При цьому щодо їх норм правдиві такі ствердження [1 – 3]:

$$\left\|S_{r,0}(p,t)\right\|_C = \left\|p(t)\right\|_C,\ r = \overline{2,5};$$

$$\left\|S_{2,1}(p,t)\right\|_C = \frac{4}{3}\left\|p(t)\right\|_C,;$$

$$\left\|S_{3,1}(p,t)\right\|_C = \frac{41}{32}\left\|p(t)\right\|_C;$$

$$\left\|S_{4,1}(p,t)\right\|_C = \frac{5}{4}\left\|p(t)\right\|_C.$$

Про похибку відтворення функції $p(t)$ за використанням сплайнів $S_{r,0}(p,t)$, $r = \overline{2,5}$ свідчать такі твердження [1–3].

За $h \to 0$ для довільної функції $p(t) \in C^2$ виконується

$$\left\|p(t) - S_{r,0}(p,t)\right\|_C \leq \frac{(2+r)h^2}{24}\left\|p''(t)\right\|_C + \varepsilon\left\|p(t)\right\|_C + o(h^2).$$

Для $p(t) \in C^3$ буде вірно таке

$$\left\|p(t) - S_{2,1}(p,t)\right\|_C \leq \frac{h^3}{12\sqrt{3}}\left\|p^{(3)}(t)\right\|_C + \frac{4}{3}\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C + o(h^3).$$

Для $p(t) \in C^4$ правдиво

$$\left\|p(t) - S_{3,1}(p,t)\right\| \leq \frac{121h^4}{2880}\left\|p^{(4)}(t)\right\| + \frac{41}{32}\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C + o(h^4).$$

Для $p(t) \in C^5$ виконується рівність

$$\left\|p(t) - S_{4,1}(p,t)\right\|_C \leq \frac{73h^4}{1440}\left\|p^{(4)}(t)\right\|_C + \frac{5}{4}\varepsilon\left\|p(t)\right\|_C + o(h^5),$$

де $|\varepsilon_i| < \varepsilon$, $i \in Z$.

Наведені оцінки носять асимптотичний характер, проте це дає уяву про відхилення $S_{r,u}(p,t)$, $r = \overline{2,5}$, $u = 0,1$, від функції $p(t)$.

На практиці сплайни $S_{r,0}(p,t)$ краще застосовувати у випадках, коли рівень похибок в (1) відносно високий, сплайни $S_{r,1}(p,t)$ – при низькому рівні похибок.

Мета роботи – отримати в явному вигляді подання сплайну першого ступеня уточнення на основі лінійної комбінації *B*-сплайнів п'ятого порядку та дослідити його норму.

Виклад основного матеріалу

Введемо до розгляду уточнюючий сплайн на основі *B*-сплайну п'ятого порядку, заданий на рівномірному розбитті Δ_h за даними типу (1):

$$S_{5,1}(p,t)=\sum_{i\in Z}\left(p_i-\frac{7}{24}\Delta^2 p_i\right)B_{5,0}(t-ih), \quad (4)$$

або з урахуванням явного подання $B_{5,0}(t)$ [3]:

$$S_{5,1}(p,t)=\frac{1}{92160}((7p_{i-3}-73p_{i-2}+267p_{i-1}-$$
$$-485p_i+485p_{i+1}-267p_{i+2}+73p_{i+3}-7p_{i+4})x^5+$$
$$+(-35p_{i-3}+295p_{i-2}-675p_{i-1}+415p_i+$$
$$+415p_{i+1}-675p_{i+2}+295p_{i+3}-35p_{i+4})x^4+$$
$$+(70p_{i-3}-170p_{i-2}--2050p_{i-1}+6510p_i-$$
$$-6510p_{i+1}+2050p_{i+2}+$$
$$-70p_{i+4})x^3+(-70p_{i-3}-1090p_{i-2}+$$
$$+9450p_{i-1}-8290p_i-8290p_{i+1}+9450p_{i+2}-$$
$$-1090p_{i+3}-70p_{i+4})x^2+(35p_{i-3}-2435p_{i-2}-$$
$$-8825p_{i-1}-32025p_i+32025p_{i+1}+8825p_{i+2}-$$
$$-2435p_{i+3}-35p_{i+4})x+(-7p_{i-3}-1621p_{i-2}-$$
$$-2775p_{i-1}+50483p_i+50483p_{i+1}-2775p_{i+2}-$$
$$-1621p_{i+3}-7p_{i+4})),$$

де $x=2(t-ih)/h$, $|x|\le 1$.

У цьому випадку спостерігається таке твердження щодо норми введеного сплайну.

Теорема. Для сплайну $S_{5,1}(p,t)$ є вірним:

$$\left\|S_{5,1}(p,t)\right\|_C=\frac{871}{720}\left\|p(t)\right\|_C.$$

Доведення. За визначенням норми оператору лінійного нормованого простору, для сплайну $S_{5,1}(p,t)$ маємо

$$\left\|S_{5,1}(p,t)\right\|=\sup_{p_i}\max_i\left|S_{5,1}(p_i,t)\right|.$$

Проведемо перегрупування в (3) відносно p_i:

$$S_{5,1}(p,t)=\frac{1}{92160}\Big(7p_{i-3}(x-1)^5+\ p_{i-2}\big(-73x^5+$$
$$+295x^4-170x^3-1090x^2+2435x--1621\big)+$$
$$+p_{i-1}\big(267x^5-675x^4-2050x^3+9450x^2+$$
$$-8825x--2775\big)+\ p_i\big(-485x^5+415x^4+$$
$$+6510x^3-8290x^2--32025x+50483\big)+$$
$$+p_{i+1}\big(485x^5+415x^4-6510x^3-$$
$$-8290x^2+32025x+50483\big)+\ p_{i+2}\big(-267x^5-$$
$$-675x^4++2050x^3+9450x^2+8825x-2775\big)+$$
$$+p_{i+3}\big(73x^5++295x^4+170x^3-1090x^2-2435x+$$
$$-1621\big)-7p_{i+4}(x+1)^5\Big). \quad (5)$$

Тоді

$$\left\|S_{5,1}(p,t)\right\|\le\frac{1}{92160}\left\|p(t)\right\|\max_{|x|\le 1}A(x). \quad (6)$$

Оскільки $|x|\le 1$, то

$$A(x)=7(1-x)^5+7(1+x)^5+$$
$$+\left|-73x^5+295x^4-170x^3-1090x^2+2435x-1621\right|+$$
$$+\left|267x^5-675x^4-2050x^3+9450x^2-8825x-2775\right|+$$
$$+\left|-485x^5+415x^4+6510x^3-8290x^2-32025x+50483\right|+$$
$$+\left|485x^5+415x^4-6510x^3-8290x^2+32025x+50483\right|+$$
$$+\left|-267x^5-675x^4+2050x^3+9450x^2+8825x-2775\right|+$$
$$+\left|73x^5+295x^4+170x^3-1090x^2-2435x-1621\right|.$$

Функція $A(x)$ парна, тому

$$\max_{|x|\le 1}A(x)=\max_{x\in[0;1]}A(x).$$

Якщо $x\in[0;1]$, то

$$73x^5-295x^4+170x^3+1090x^2-2435x+1621\ge 0;$$
$$-267x^5+675x^4+2050x^3-9450x^2+8825x+2775\ge 0;$$
$$-485x^5+415x^4+6510x^3-8290x^2-32025x+50483\ge 0;$$
$$485x^5+415x^4-6510x^3-8290x^2+32025x+50483\ge 0;$$
$$-73x^5-295x^4-170x^3+1090x^2+2435x+1621\ge 0.$$

Тоді

$$A(x)=-267x^5+985x^4+2050x^3-23710x^2+$$
$$+8825x+106997+$$
$$+\left|-267x^5-675x^4+2050x^3+9450x^2+8825x-2775\right|.$$

Уведемо позначення:

$$q(x) = \left|-267x^5 - 675x^4 + 2050x^3 + \right.$$
$$\left. +9450x^2 + 8825x - 2775\right|.$$

Функція $q(x)$ монотонно зростає на $[0;1]$, при цьому $q(0) < 0$, а $q(1) > 0$. Тому $q(x)$ має єдиний нуль на $[0;1]$ в точці $x_1 = 0,246316$.

Якщо $x \in [0; x_1]$, то $q(x) < 0$.

Тоді

$$A(x) = 1660x^4 - 14260x^2 + 109772.$$

Отже,

$$\max_{x\in[0;x_1]} A(x) = A(x_1) \approx 108887,24.$$

Якщо $x \in [x_1;1]$, то $q(x) > 0$.

Тоді

$$A(x) = -534x^5 + 310x^4 + 4100x^3 -$$
$$-14260x^2 + 17650x + 104222.$$

Отже,

$$\max_{x\in[x_1;1]} A(x) = A(1) = 111488.$$

Таким чином,

$$\max_{x\in[0;1]} A(x) = 111488.$$

Ураховуючи вираз (6), отримуємо

$$\left\|S_{5,1}(p,t)\right\| \le \frac{111488}{92160}\left\|p(t)\right\|. \quad (7)$$

Якщо $x = 1$, з виразу (5) маємо

$$S_{5,1}(p,t) = \frac{1}{92160}\left(-224p_{i-2} - 4608p_{i-1} + 16608p_i + \right.$$
$$\left. +68608p_{i+1} + 16608p_{i+2} - 4608p_{i+3} - 224p_{i+4}\right).$$

Тоді для деякого часткового випадку, коли $p^*_{i-2} = = p^*_{i-1} = p^*_i = p^*_{i+1} = p^*_{i+2} = p^*_{i+3} = p^*_{i+4} = p^*$,

$$\left\|S_{5,1}(p,t)\right\|_C \ge \left\|S_{5,1}(p^*,t)\right\|_C \ge \left|S_{5,1}(p^*,t)\right| = \frac{111488}{92160}\left\|p(t)\right\|_C. \quad (8)$$

Співвідношення (8) разом із нерівністю (7) та врахуванням того, що $\frac{111488}{92160}$, доводить сформульовану теорему.

Висновки

Отримано явний вигляд уточнюючого сплайну на основі *B*-сплайнів п’ятого порядку, визначеного на Δ_h. Досліджено його норму.

Порівняльній аналіз величини норми сплайн-оператора (4) з нормами сплайнів другого – четвертого порядків першого ступеня уточнення засвідчує про більшу стійкість оцінки при суттєвих осциляціях функції, яку апроксимуємо. Це випливає з того, що сплайн (4) має найменшу норму з усіх уточнюючих сплайнів.

Сплайн (4) може бути рекомендований для реалізації в автоматизованих системах обробки результатів вимірів сигналів із кінцевою енергією, часових рядів тощо.

Подальші дослідження будуть проведені для отримання оцінки похибки апроксимації гладких функцій поданим сплайном, одержання дво- та більше вимірних сплайнів, а також для уточнення локальних сплайнів на основі *B*-сплайнів п’ятого порядку.

Література

1. *Лигун А.А.* Асимптотические методы восстановления кривих / А.А. Лигун, А.А. Шумейко. – К.: ІМ НАН України, 1996. – 358 с.

2. *Приставка П.О.* Поліномаільні сплайни при обробці даних / П.О. Приставка. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с

3. *Приставка П.О.* Дослідження *B*-сплайну п’ятого порядку та їх лінійної комбінації / П.О. Приставка, О.Г. Чолишкіна // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2007. – №1(16). – С. 14–17.

4. *Unser M.* Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing / M. Unser // IEEE Signal Processing Magazine, 1999. – Vol. 16, N 6. – P. 22–38.

5. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 351 с.

6. *Чуи Ч.* Введение в вэйвлеты / Ч. Чуи / пер. с. англ. –М.: Мир, 2001. –412 с.

7. *Лигун А.А.* О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка / А.А. Лигун, В.В. Кармазина. – Днепродзержинск: Днепродзерж. индустриальный ин-т. 1989. – 30 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559- Ук89.

Стаття надійшла до редакції 11.04.2011.