УДК 519.8

Т.В. Авдєєва
(Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна)
Л.М. Іллічева
(Національний авіаційний університет, Україна)

Відношення «домінування-байдужості» у системі переваг децидента

Описані особливості застосування відношень при визначенні структури «домінування-байдужості» у системі переваг децидента.

Одним із застосувань графів є представлення бінарних відношень при побудові відношення «домінування-байдужості» (при порівнянні альтернатив у процесі прийняття рішень).

Відношення – це твердження, які відображають взаємний зв'язок між об'єктами. А – множина об'єктів (наприклад, множина варіантів рішень). Множина всіх пар $(x, y), x \in A, y \in A$ є декартовим добутком А саму на себе, $A \times A$. Бінарним відношенням на множині А називається підмножина $A \times A$, тобто якщо пара знаходиться у відношенні R, цей факт позначається як xRy, або $(x, y) \in R$.

Бінарне відношення може бути задане або переліком пар, що знаходяться у даному відношенні, або за допомогою правила, що дозволяє встановити, чи знаходиться пара у певному відношенні. Задаються основні типи бінарних відношень (порожнє, повне, діагональне та антідіагональне) та можливі операції над ними у матричній та графовій формах.

Якщо бінарне відношення R визначене на скінченній n-елементній множині А, розглядають квадратну матрицю В розміром $n \times n$ (і-й рядок та і-й стовпчик відповідають і-му елементу множини А). Елементи В визначаються наступним чином (в залежності від виконання відношення)$(x_i \in A, x_j \in A)$:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } x_i R x_j \\ 0, \text{якщо } (x_i, x_j) \notin R \end{cases}$$

Вводяться операції над бінарними відношеннями (об'єднання, різниця, симетрична різниця, доповнення до відношення, обернене відношення, композиція відношень) та зв'язки між ними (ізо- та гомоморфізм відношень, поняття двоїстого відношення)[1, 2]. Згідно означення основних дій над бінарними відношеннями мають місце фориули для отримання відповідних елементів матриці В(n$\times n$) у матричному вигляді для результуючого відношення. Також, якщо носієм відношення Q є множина $A = \{x_i,\ i = 1, \dots, n\}$, та поставивши у відповідність вершинам графу елементи $\{x_i,\ i = 1, \dots, n\}$, можна отримати подання відношення у вигляді графа (1, стор. 47).

У теорії прийняття рішень використовуються типи бінарних відношень, які мають конкретні властивості. Основними властивостями цих відношень є: рефлексивність, антирефлексивінсть, симетричність, асиметричність, антисиметричність, транзитивність, ациклічність.

На основі властивостей бінарних відношень визначають типи бінарних відношень, що мають важливе значення в теорії прийняття рішень. А саме: відношення толерантності, еквівалентності, квазіпорядку (або півпорядку, неповного порядку) та строгого порядку (або лінійного порядку).

Так, толерантністю (байдужістю) називається відношення, яке одночасно є рефлексивним та симетричним. (Його позначають як I). Еквівалентністю називається відношення, що є одночасно рефлексивним, симетричним та транзитивним. Таким чином, еквівалентність – це толерантність, що має властивості транзитивності.

Такі результати використовуються при дослідженні властивостей бінарних відношень, в основному, отриманих експериментально як результат опитування експерта в ситуаціях прийняття рішень. Можна побудувати алгоритми перевірки експериментальних відношень на наявність таких важливих властивостей, як транзитивність, ациклічність, лінійність та ін. Що й дозволяє виявити та скорегувати суперечності в поведінці експерта та можливі аномальні ситуації при прийнятті рішень.

Розглянемо приклади. Нехай матриці відношень P та Q мають вигляд (носієм P та Q є множина A = $\{x_1, x_2, x_3\}$):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Представимо відношення P у вигляді верхніх та нижніх перетинів. Верхнім перетином $R^+(x)$ відношення R з множиною-носієм A відносно елемента x є множина

$$R^+(x) = \{y \in A | (y, x) \in R\}$$

Нижнім перетином $R^-(x)$ відношення R з множиною-носієм A відносно елемента x є множина

$$R^-(x) = \{y \in A | (x, y) \in R\}$$

Також іноді використовують терміни «прообраз» та позначення $R^{-1}(x) = R^+(x)$ і «образ» для R$(x) = R^-(x)$.

Для даного відношення P: $P^+(x_1) = \{x_1, x_2, x_3\};\ P^+(x_2) = \{x_1, x_2\}; P^+(x_3) = \{x_3\};\ P^-(x_1) = \{x_1, x_2\}; P^-(x_2) = \{x_1, x_2\}; P^-(x_3) = \{x_1, x_3\}$. Помітимо, що при знаходженні множин P^+, P^- зручно розглядати індекси елементів відповідних рядків (у випадку P^+) та індекси елементів відповідних стовпців (у випадку P^-).

Запишемо результати наступних операцій у матричному та графовому вигляді: $P \cap Q, P \cup Q, P \backslash Q,\ \overline{P},\ P^{-1}, P \circ Q, P \Delta Q$.

Перетином відношень P та Q називаєтся відношення, до якого входять пари (x, y), спільні для P та Q:

$$P \cap Q = \{(x, y) \in A \times A | (x, y) \in P \wedge (x, y) \in Q\}$$

$$P \cap Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Об'єднанням відношень P та Q називаєтся відношення, до якого входять пари (x, y), що входять до P або до Q:

$$P \cup Q = \{(x, y) \in A \times A | (x, y) \in P \vee (x, y) \in Q\}$$

$$P \cup Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Різницею P \ Q відношень P та Q називаєтся відношення, до якого входять пари $(x, y) \in P$, які не входять до Q:

$$P \backslash Q = \{(x, y) \in A \times A | (x, y) \in P \wedge (x, y) \notin Q\}$$

$$P \backslash Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Доповненням $\bar{P}$ відношення P називається відношення, до складу якого входять пари $(x, y) \notin P$, тобто

$$\bar{P} = (A, A) \backslash P$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Оберненим відношенням P^{-1} до відношення P називається відношення, до складу якого пара (x, y) входить лише тоді, коли $(y, x) \in P$.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Композицією відношень $P \circ Q$ називається відношення, яке утворюють всі пари $(x, y) \in (A, A)$, для яких існує $z \in A$, що справедливі відношення $(x, z) \in P$ та $(z, y) \in Q$:

$$P \circ Q = \left\{(x, y) \in (A, A) \middle| (\exists z \in A): \left((x, z) \in P \wedge (z, y) \in Q\right)\right\}$$

$$P \circ Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Симетричною різницею $P \Delta Q$ називається відношення, що складається з пар об'єднання, що водночас не належать до перетину відповідних відношень:

$$P \Delta Q = (P \cup Q) \backslash (P \cap Q) = (P \backslash Q) \cup (Q \backslash P)$$

$$P \Delta Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рефлексивним називається відношення P, для якого справедливе твердження: для всіх $x \in A$, виконується xPx, де A – носій P. В матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі завжди стоять 1, а у відповідному графі при кожній вершині знаходиться петля.

Симетричним називається відношення P, для якого справедливе твердження: для всіх $x, y \in A$, які перебувають у відношенні P, тобто xPy, справедливе твердження yPx. В матриці симетричного відношення елементи, розташовані симетрично головної діагоналі, рівні між собою, у відповідному графі наявність дуги (x_i, x_j) означає наявність також дуги (x_j, x_i).

Транзитивним називається відношення P, для якого справедливе твердження: якщо xPz та zPy, то xPy. За індукцією як наслідок отримуємо: якщо $xPz_1, z_1Pz_2, \dots, z_nPy$, то xPy. У відповідному графі існує дуга (x, y), якщо існує шлях з x в y.

Нехай P – довільне бінарне відношення. Відношення $P_s = P \cap P^{-1}$ називається симетричною складовою P, а $P_A = P \backslash P_s$ – асиметричною складовою P.

При вивченні відношення переваги між реальними об'єктами можна відзначити два аспекта: один відображає перевагу (домінування) одного об'єкта над іншим, а інший – байдужість (толерантність) об'єктів. Таким чином, визначаються два відношення між об'єктами, які надалі називають відношеннями домінування і байдужості. При порівняння альтернатив між собою також можливі ситуації двох типів:

- можна вирішити, що альтернатива x_i переважає (домінує) x_j;
- не можна розрізнити за якістю альтернативи x_i та x_j (альтернативи рівнозначні, байдужі)

Взагалі, для будь-яких елементів a і b, довільно узятих з множини, на якій задана структура «домінування-байдужості», обов'язково виконується точно одна із чотирьох умов:

- a домінує b;
- b домінує a;
- a і b байдужі;
- a і b не порівняльні.

Якщо виконується одна із перших трьох умов, структура вважається лінійною.

Таким чином, статична складова системи переваг може моделюватися за допомогою структури «домінування-байдужість». А саме, нехай носій бінарного відношення A=$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ є множиною альтернатив, тоді відношення P рефлексивне. Побудуємо відповідні йому відношення байдужості $P^E = P \cap P^{-1}$ та домінування $P^D = P \backslash P_s$.

Наприклад,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ P^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ P^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ (P^D)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P^D \cup P^E \cup (P^D)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ P^N = \overline{P^D \cup P^E \cup (P^D)^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Оскільки, $P^N \neq \emptyset$, то відношення P не є лінійним. Перевіримо транзитивність відношення P.

Транзитивним називається відношення, для якого $P \circ P \subseteq P$, тобто якщо xPz та zPy, то xPy. За індукцією як наслідок отримуємо: якщо $xPz_1, z_1Pz_2, \dots z_nPy$, то xPy. У відповідному графі існує дуга (x, y), якщо існує шлях з x в y.

В даному випадку, відношення P не є транзитивним. Перевіримо:

$$P \circ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad P \circ P \nsubseteq P$$

Можна помітити, наприклад, що шлях x_1, x_4, x_5, x_2 не має дуги (x_1, x_2).

Таким чином, довільне відношення можна розглядати як відношення переваги (об'єднання відношень домінування і байдужості): лише потрібно перетворити його в рефлексивне, додавши відсутні петлі, і взяти як «домінування» - асиметричну складову, а як «байдужість» - симетричну складову отриманого відношення.

В більшості випадків відношення порівняльності постулюється як транзитивне, і якщо в результаті дослідження виявляється його нетранзитивність, її усунення прагнуть шляхом додаткового опитування та корегування відношення.

Список літератури

1. А.В. Катренко, В.В. Пасічник Прийняття рішень: теорія та практика. – Львів: «Новий світ»-2000». 2013.-447с.
2. О.Ф. Волошин - Моделі та методи прийняття рішень./О.Ф. Волошин, С.О. Міщенко, - К.: «Київський ун-т», 2010.- 336с.