Баранник Владимир Викторович, доктор технических наук, профессор, начальник кафедры, Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба.
Barannik Vladimir Viktorovich, Doctor of Science (eng.), Professor, chief of chair, Kharkov University of Aircraft of the name of Ivan Kozhedub.

Сідченко Сергій Олександрович, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник наукового центру, Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба.
E-mail: sidserg@list.ru.
Сидченко Сергей Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник научного центра, Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба.
Sidchenko Sergey, PhD (eng.), Senior Scientist Researcher, senior scientist researcher of scientific center, Kharkov University of Aircraft of the name of Ivan Kozhedub.

Ларін Володимир Валерійович, кандидат технічних наук, викладач кафедри, Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба.
E-mail: l_vv83@ukr.net.
Ларин Владимир Валериевич, кандидат технических наук, преподаватель кафедры, Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба.
Larin Vladimir Valerievich, PhD (eng.), lecturer of chair, Kharkov University of Aircraft of the name of Ivan Kozhedub.

УДК 519.711/.22(02)

СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ УОЛША И КОДЫ ГРЕЯ

Евгений Белецкий

В работе разработаны метод синтеза симметричных систем Уолша на основе их индикаторных матриц (метод определен как прямая задача Уолша) и вычисления индикаторных матриц этих систем (обратная задача Уолша). Порядок индикаторных матриц является логарифмической функцией по основанию 2 от двоично-рационального порядка систем Уолша. Введены матричные формы полного множества простых кодов Грея. Множество содержит классические прямые и обратные преобразования (названные левосторонними кодами Грея) и новый класс правосторонних преобразований Грея, дополненные оператором сохранения исходной кодовой комбинации (единичной матрицей) и матрицей инверсной перестановки. Предложены составные коды Грея, являющиеся мультипликативной комбинацией произвольного набора простых кодов. Показана взаимосвязь простых и симметричных составных кодов Грея с индикаторными матрицами соответствующих систем функций Уолша.

Ключевые слова: *системы функций Уолша, индикаторные матрицы, коды Грея.*

I. Введение. Симметричные системы функций Уолша находят в настоящее время разнообразное применение в задачах спектральной обработки сигналов, при построении специализированных вычислительных устройств с целью помехоустойчивого кодирования и сжатия аудио- и видеоданных, в аппаратах сотовой связи с разделением каналов [1-3] и во многих других областях науки и техники, включая системы криптографической защиты информации. В дальнейшем будем называть их системами функций Уолша, или просто системами Уолша.

Системы Уолша составляются из полной совокупности взаимно ортогональных эквидистантных (по Хеммингу) базисных функций, принимающих на двоично-рациональном интервале определения $N = 2^l$, где l – натуральное число, значения +1 или –1. Поскольку нумерация (упорядочение) функций может быть произведена разными способами, то возможны и различные системы функций Уолша. Удобным способом представления таких систем является изображение их в виде квадратных матриц N-го порядка, в которых каждая строка – это базисная функция Уолша, причем для простоты вместо значений этих функций обычно записывают только их знаки + или –.

Первое упорядочение функций было предложено Адамаром (Hadamard) в 1883 г. [4] в связи с исследованиями по теории определителей. В 1923 г. Уолш (Walsh) предложил упорядочить базисные функции Адамара в порядке возрастания перемен знаков [5], что придало такой системе большое сходство с привычными для инженеров гармоническими функциями [6]. С этих пор подобные симметричные системы стали называться системами функций Уолша. И, наконец, в 1932 г. Пели (Paley) предложил упорядочение функций по скорости нарастания фазы [7]. Несмотря на то, что в последующие годы были проведены ряд Международных симпозиумов по функциям Уолша, фактически с тех пор не было предложено ни одного нового упорядочения базисных функций Адамара и, соответственно, не была получена ни одна новая симметричная система Уолша.

Исключение, может быть, составляет система четвертого порядка, названная в статье [8] системой Уолша – Трахтмана. Такая система (обозначим ее T) получена в [9] методом простого перебора и дополняет три кратко охарактеризованные выше системы Уолша, упорядоченные по Адамару (H), Качмажу (W, именно такое название получила в последующем система, разработанная непосредственно Уолшем [10]) и Пели (P). Все эти системы Уолша четвертого порядка представлены соотношениями:

$$H = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Одной из основных задач (назовем ее первой задачей), решение которой достигается настоящим исследованием, является разработка регулярных правил синтеза полного множества симметричных систем функций Уолша произвольного двоично-рационального порядка N.

Еще в начале 70-х годов прошлого столетия бала установлена взаимосвязь между номерами базисных функций в различных системах Уолша [11], осуществляемая с помощью кодов Грея [12]. Граф взаимосвязи номеров функций Уолша представлен на рис. 1 в интерпретации, заимствованной из [9]. На этом рисунке обозначены такие операторы преобразования: ДИП – двоично-инверсной перестановки; КГ и ОКГ – прямого и обратного кодирования Грея соответственно.

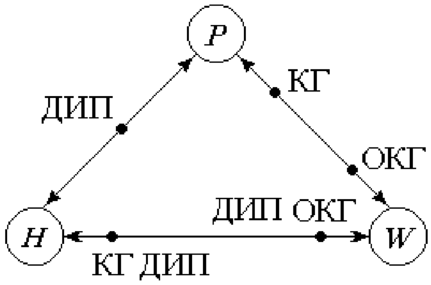

Рис. 1. Взаимосвязь номеров функций в системах Уолша

Коды Грея, предложенные в 1953 г. в ответ на запросы инженерной практики относительно построения оптимальных по критерию минимума ошибки неоднозначности преобразователей типа "угол–код", за шесть десятилетий с момента своего появления не претерпели сколь-нибудь существенных изменений, сохраняя свои классические формы. Поэтому в качестве второй проблемы, решаемой в рамках настоящего исследования, ставится задача дальнейшего развития преобразований Грея (ПГ) за счет введения правосторонних и составных кодов и разработки на основе простых и симметричных составных кодов Грея алгоритмов синтеза систем Уолша произвольного порядка.

II. Алгебраические основы ПГ. Преобразования Грея трактуются в данной работе как обобщение понятия кодов Грея. Укажем на одну существенную, на наш взгляд, особенность известных кодов Грея. По-видимому, оказались вне поля зрения, как математиков, так и разработчиков аппаратуры возможности построения кодов, инверсных по направлению формирования классическим кодам Грея. В классической схеме процесс формирования прямых и обратных кодов Грея развивается слева направо. При этом старший (левый) разряд преобразуемого числа сохраняется неизменным, как при прямом, так и обратном преобразованиях. Вместе с тем, можно построить схему преобразования обратную по направлению классическому (левостороннему) преобразованию Грея. В таком классе преобразований, который назван «правосторонним», при прямом и обратном преобразованиях сохраняется неизменным значение младшего (правого) разряда преобразуемого числа.

Обозначим разряды числа, представленного в двоичном позиционном коде, через x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, x_0 (старший разряд слева), а разряды того же числа, выраженного в коде Грея, через y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_1, y_0, где $n-$ число разрядов в кодовых векторах x и y. Правило преобразования вектора x в вектор y достаточно простое и имеет вид:

$$y_i = x_{i+1} \oplus x_i\,, \quad i = \overline{n-1, 0}\,, \quad x_n = 0\,, \qquad (2)$$

где $\oplus$ – операция поразрядного сложения по модулю 2, которую для операндов a и b мы будем иногда записывать и в такой форме $c=(a+b)_2$.

Изложение материала по кодовым преобразованиям целесообразно вести, опираясь на структурные схемы формирования кодов. Такой подход к пояснению сути алгоритма кодирования удобен тем, что делает материал не только более понятным для инженеров, но существенно упрощает задачу формального математического описания процедуры кодирования. Для того чтобы придать схемам законченную форму, ограничим (без потери общности) порядок системы уравнений (2), полагая $n=4$.

Тогда

$$\begin{aligned} y_3 &= x_3; \\ y_2 &= (x_3+x_2)_2; \\ y_1 &= (x_2+x_1)_2; \\ y_0 &= (x_1+x_0)_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Структурная схема, соответствующая преобразованиям (3), показана на рис. 2.

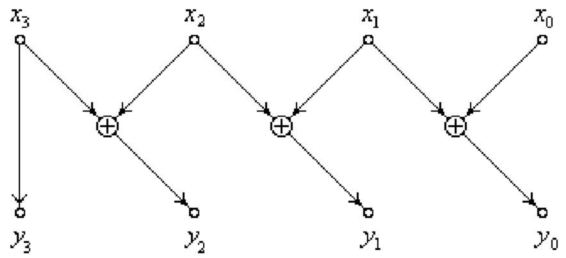

Рис. 2. Структурная схема алгоритма формирования прямого двоичного кода Грея левостороннего

К обратному левостороннему преобразованию Грея приходим, решая обычными алгебраическими приемами систему модульных уравнений (2) относительно разрядов x_i исходной кодовой комбинации $\boldsymbol{x}$.

В частности, из соотношений (3) имеем:

$$\begin{aligned} x_3 &= y_3; \\ x_2 &= (y_2+x_3)_2; \\ x_1 &= (y_1+x_2)_2; \\ x_0 &= (y_0+x_1)_2, \end{aligned} \tag{4}$$

причем в системе (4) учтено, что в двоичной модулярной арифметике $(-1)_2 \equiv 1$.

Преобразованию (4) отвечает структурная схема, представленная на рис. 3.

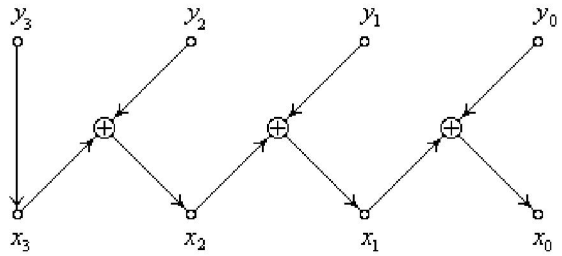

Рис. 3. Структурная схема алгоритма формирования обратного двоичного кода Грея левостороннего

К алгоритмам формирования двоичных кодов Грея правосторонних (рис. 4) приходим, развернув на 180° вокруг центральной вертикальной оси соответствующие структурные схемы формирования прямого (рис. 2) и обратного (рис. 3) кодов Грея левосторонних, сохраняя при этом неизменным положение разрядов кодовых комбинаций x и y.

Из сопоставления рис. 2–4 следует, что процесс формирования классических кодов Грея (рис. 2 и 3) развивается по направлению слева направо, тогда как правосторонних (рис. 4) – справа налево, что и послужило обоснованием названий кодов.

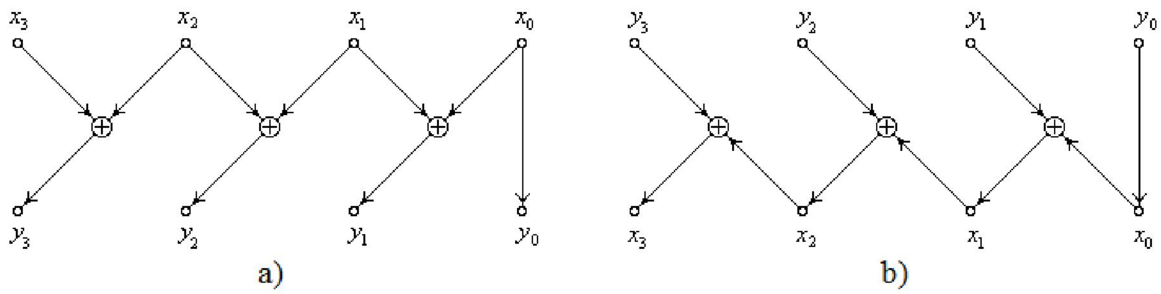

Рис. 4. Структурные схемы алгоритмов формирования правосторонних кодов Грея: прямого – a); обратного – b)

Из сопоставления рис. 2–4 следует, что процесс формирования классических кодов Грея (рис. 2 и 3) развивается по направлению слева направо, тогда как правосторонних (рис. 4) – справа налево, что и послужило обоснованием названий кодов.

Преобразованиям (кодам) Грея можно придать матричные формы $y=(x\cdot M)_2$; $x=(y\cdot\overline{M})_2$, в которых $M\left(\overline{M}\right)$ – матрицы прямого (обратного) преобразований Грея.

Совокупность операторов (матриц) прямого и обратного, как лево-, так и правостороннего преобразований Грея, дополненная оператором сохранения исходного кода или матрицы (единичной матрицей) и матрицей инверсной перестановки, образует множество «простых операторов Грея», сведенных в табл. 1. Для удобства использования простым операторам Грея приданы цифровые обозначения (левая колонка табл. 1).

Таблица 1

Полное множество простых операторов Грея

Обозна-чение оператора	Выполняемая операция
0 (*e*)	Сохранение исходного операнда
1	Инверсная перестановка
2	Прямое кодирование по Грею левостороннее
3	Обратное кодирование по Грею левостороннее
4	Прямое кодирование по Грею правостороннее
5	Обратное кодирование по Грею правостороннее

В качестве альтернативного варианта оператор 0 может обозначаться также буквой *e*, что соответствует единичной матрице. Пример матриц простых операторов Грея приведен в табл. 2.

Таблица 2

Матричные формы простых операторов Грея четвертого порядка

$e:=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$	$2:=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$	$4:=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$
$1:=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$	$3:=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$	$5:=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

Обратим внимание на то, что матрицы простых операторов Грея являются «правосторонне симметрическими», т.е. симметричными относительно вспомогательной диагонали, а операторы 0 и 1, названные «инвариантами преобразований Грея», – двусторонне симметрическими, т.е. симметричными как относительно главной, так и вспомогательной диагонали.

Каждому простому оператору Грея g отвечает обратный $\overline{g}$ и сопряженный g^* операторы, также являющиеся правосторонне симметричными. Такие коды определяются соотношениями

$$g\overline{g}=\overline{g}g=0=e\,;\;\; g^*=1g1. \qquad (5)$$

Левое соотношение в (5) вполне очевидно (аксиоматическое), а правое введено по аналогии с общепринятым определением «сопряженного элемента» [13]. В общей алгебре два элемента u и v из множества Ω называются сопряженными, если $u=\omega^{-1}v\omega$, причем ω – некоторый элемент из Ω. Полагая, что Ω есть множество простых операторов Грея, сведенных в табл. 1, и, выбирая в качестве элемента ω оператор 1, приходим к выражениям для сопряженных операторов в правой части равенств (5), поскольку $1^{-1}=1$. И как следствие определения сопряженного оператора, принимая во внимание, что $1\cdot 1=e$, получим

$$1g=g^*1. \qquad (6)$$

Назовем соотношение (6) «фундаментальной леммой» преобразования простых операторов Грея (***Леммой*** **1**).

Полная совокупность простых и соответствующих им обратных и сопряженных операторов Грея приведена в табл. 3.

Таблица 3

Соответствие между простыми операторами Грея

g	0	1	2	3	4	5
$\overline{g}$	0	1	3	2	5	4
g^*	0	1	4	5	2	3

Из цифровых символов простых кодов Грея можно составлять произведения точно так же, как это принято в обычной алгебре, образуя так называемые «составные коды Грея» (СКГ). Кроме символьного представления СКГ можно записывать и в матричной форме, но при этом следует иметь в виду, что, во-первых, матричные операции выполняются в кольце вычетов по $\bmod 2$, т.е. все элементы матриц приводятся к остатку по $\bmod 2$. И, во-вторых, естественно, что $2\cdot 3=3\cdot 2=0=e$, также как и $4\cdot 5=5\cdot 4=0=e$, поскольку произведения взаимно обратных матриц равны единичной матрице (0 или *e*).

Рассмотрим пример. Пусть СКГ $G=24135$ и порядок матриц операторов Грея равен четырем. Получим

$$G=1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}, \qquad (8)$$

поскольку согласно (6) и (7) имеем $G=24135=24515=215=231=1$.

Введем ряд аксиом, необходимых для построения алгебраических преобразований Грея с целью последующего их применения для доказательства ряда фундаментальных лемм «алгебры Грея», используемых в задачах синтеза систем Уолша.

***Аксиома* 1.** Умножение квадратной матрицы M справа на оператор инверсной перестановки 1 эквивалентно операции перестановки столбцов этой матрицы.

В самом деле, умножив, например, справа матрицу четвертого порядка

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

на матрицу инверсной перестановки (8), приходим к матрице

$$M \cdot 1 = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix},$$

столбцы которой инверсно переставлены по отношению к столбцам матрицы (9).

***Аксиома* 2.** Умножение квадратной матрицы M слева на оператор инверсной перестановки 1 эквивалентно операции перестановки строк этой матрицы, т.е.

$$1 \cdot M = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}.$$

***Аксиома* 3.** Совместное умножение квадратной матрицы M справа и слева на оператор инверсной перестановки 1 эквивалентно операции классического (левостороннего) транспонирования этой матрицы, т.е.

$$1 \cdot M \cdot 1 = M^{\mathrm{T}}.$$

***Аксиома* 4.** Умножение квадратной симметрической матрицы M слева или справа на оператор инверсной перестановки 1 приводит к инверсии симметричности исходной матрицы M. Это означает, что правосторонне симметрическая матрица становится левосторонне симметрической и наоборот.

Используя матричные формы операторов, представленных в табл. 2, и, последовательно выполняя операции матричных преобразований над полем $GF(2)$, приходим к результату, являющимся частным случаем правой части соотношения (5). Например,

$$121 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Лемма 1 применима не только к простым, но и составным кодам Грея. Так, если $G-$СКГ, образованный произведением элементарных операторов Грея g_i, т.е.

$$G = \prod_{i=1}^{k} g_i, \qquad (10)$$

то

$$1G = G^{*}1, \qquad (11)$$

где $G^{*}-$составной код Грея, сопряженный G, такой, что

$$G^{*} = \prod_{i=1}^{k} g^{*}_{k+1-i}. \qquad (12)$$

Соотношение (11) будем называть «обобщенной фундаментальной леммой» алгебры Грея (***Леммой* 2**).

Умножив обе части равенства (11) сначала справа, а затем слева на оператор инверсной перестановки, получим, как следствие обобщенной фундаментальной леммы 2,

$$G^{*} = 1G1; \quad G = 1G^{*}1, \qquad (13)$$

где G и G^{*} заданы соотношениями (10) и (12) соответственно. Например, если $G = 22122$, то $G^{*} = 1(22122)1 = 44144$ и т.д.

Проиллюстрируем применение леммы 2 на примере оценки периода цикла СКГ $G = 212$. Предположим, что преобразованию подвергается трехбитный код 100. Период цикла $L_{G,l}$ СКГ G длины l для выбранных параметров определяется системой переходов

$$100 \xrightarrow{2} 110 \xrightarrow{1} 011 \xrightarrow{2} 010;$$
$$010 \xrightarrow{2} 011 \xrightarrow{1} 110 \xrightarrow{2} 101;$$
$$101 \xrightarrow{2} 111 \xrightarrow{1} 111 \xrightarrow{2} 100,$$

в которой над стрелками переходов указаны простые операторы Грея, входящие в состав СКГ. Из данной системы следует, что период цикла кода $G = 212$ равен трем. Контур (граф) переходов этого кода изображен на рис. 5.

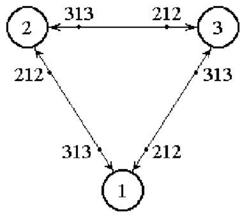

Рис. 5. Граф переходов СКГ $G = 212$

Код 313 является обратным коду 212, так как

$$\underbrace{2\overbrace{1\underbrace{2\cdot 3}_{e}1}^{e}3}_{e} = e$$

На основании графа переходов, представленного на рис. 5, можно получить ряд эквивалентных преобразований составного кода 212. Так, из узла 1 можно перейти в узел 3, обходя контур по часовой стрелке. Этот маршрут движения эквивалентен формированию составного кода $G_1 = 212 \cdot 212$. Вместе с тем узел 3 связан с узлом 1 непосредственно кодом $G_2 = 313$. Следовательно, соблюдается равенство таких составных кодов:

$$212 \cdot 212 = 313.$$

Воспользовавшись следствием (13) обобщенной фундаментальной леммы Грея 2, приведем последнее соотношение к виду:

$$2442 = 313. \qquad (14)$$

Умножив обе части равенства (14) слева и справа на оператор 2, и учитывая, что $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = e$, получим:

$$224422 = 1. \qquad (15)$$

На основании равенства (15) можно сформулировать следующее заключение: период цикла СКГ $G = 224422$ равен двум. Кроме того, преобразуя обе части равенства (15) по формуле (13), приходим к тождеству: $224422 \equiv 442244$ и т.д.

Подобные преобразования можно выполнять для различных СКГ G и кодовых комбинаций длины l.

***Лемма* 3**. Составному коду Грея $\mathcal{G} = G \cdot G^{\mathrm{T}}$, где G - произвольный СКГ, отвечает левосторонне симметрическая матрица.

В самом деле, из общей алгебры [13] известно, что если A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка, то

$$(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}. \qquad (16)$$

Следуя преобразованию (16), получим

$$\mathcal{G}^{\mathrm{T}} = (G \cdot G^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (G^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \cdot G^{\mathrm{T}} = G \cdot G^{\mathrm{T}} = \mathcal{G},$$

т.е. $\mathcal{G}^{\mathrm{T}} = \mathcal{G}$, а это означает, что $\mathcal{G}$ – левосторонне симметрическая матрица, чем и завершается доказательство леммы 3. Введем оператор правостороннего транспонирования, обозначив его $\perp$, т.е. оператор, осуществляющий поворот матрицы относительно ее вспомогательной диагонали. Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$ – квадратные матрицы с лево- и правосторонней симметрией соответственно. Для этих матриц соблюдаются тождества $\mathcal{L}^{\mathrm{T}} = \mathcal{L}$; $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{P}$. Операция правостороннего транспонирования произведения двух квадратных матриц A и B подобна операции левостороннего транспонирования (16), т.е.

$$(A \cdot B)^{\perp} = B^{\perp} \cdot A^{\perp}, \qquad (17)$$

что легко можно подтвердить непосредственной проверкой.

***Лемма* 4**. Оператор правостороннего транспонирования $\perp$ по отношению к составному коду Грея осуществляет инверсию этого кода.

Другими словами, если, например,

$$G = g_1 \cdot g_2, \qquad (18)$$

где g_1 и g_2 – произвольные простые операторы Грея, то

$$G^{\perp} = g_2 \cdot g_1. \qquad (19)$$

Для доказательства леммы 4 примем во внимание, что по определению операторы g_1 и g_2 являются квадратными правосторонне симметрическими матрицами преобразования Грея g, для которых $g^{\perp} \equiv g$. Поэтому, в соответствии с равенством (17), для СКГ (18) получим $(g_1 \cdot g_2)^{\perp} = g_2^{\perp} \cdot g_2^{\perp} = g_2 \cdot g_1$, т.е. приходим к преобразованию (19), чем и завершается доказательство леммы 4.

***Лемма* 5**. Симметричному составному коду Грея отвечает правосторонне симметрическая матрица преобразования.

В самом деле, симметричный СКГ G_s можно записать в виде такого соотношения

$$G_s = G \omega G^{\perp}, \qquad (20)$$

где G – произвольный СКГ, а ω – ядро преобразования, в качестве которого выбирается любой простой оператор Грея.

Симметричность СКГ (20) является следствием леммы 4. Рассмотрим пример. Пусть $G = 243$, тогда $G^{\perp} = 342$ и СКГ $G_s = 243\,\omega\,342$ будет симметричным для любого простого оператора ω. В самом деле, приняв за основу СКГ (20), получим

$$G_s^{\perp} = (G \omega G^{\perp})^{\perp} = (G^{\perp})^{\perp} \omega^{\perp} G^{\perp} = G \omega G^{\perp} = G_s.$$

чем и завершается доказательство леммы 5.

III. Синтез симметричных систем функций Уолша. Как показано на рис. 1 номера базисных функций систем Уолша, упорядоченных по Адамару и Качмажу, связаны с номерами базисных функций системы Уолша-Пели простыми операторами ДИП (двоично-инверсной перестановки) и ОКГ (обратным кодированием Грея классическим, т.е. левосторонним) соответственно. Рассмотрим, в качестве примера, систему Уолша-Пели восьмого порядка

$$P_8 = \{p(k,n)\} = \begin{array}{c|c} & 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7 \ \rightarrow n \\ \hline \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ \downarrow \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \end{array}, \qquad (21)$$

в которой $p(k,n)$ – базисная функция k – го порядка (номер функции) аргумента (дискретного времени) n, причем $k,n=\overline{0,7}$.

Переход к системам Уолша-Адамара и Уолша-Качмажа осуществляется, как отмечено выше, перестановкой номеров базисных функций системы Уолша-Пели, представленной матрицей (21), простыми операторами ДИП и ОКГ третьего порядка соответственно. Операции перестановок базисных функций можно отобразить матричными формами

$$k_h = k \cdot I_h = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$k_w = k \cdot I_w = k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad , \qquad (22)$$

$$k = \overline{0,7}$$

где k – номер базисной функции системы Уолша-Пели; k_h и k_w – номера строк матриц, в которые перемещаются функции Уолша-Пели при формировании систем Уолша-Адамара и Уолша-Качмажа соответственно (табл. 4); I_h и I_w – перестановочные матрицы, которые будем называть «индикаторными матрицами» систем функций Уолша.

Таблица 4

Взаимосвязь номеров базисных функций систем восьмого порядка

k	0	1	2	3	4	5	6	7
k_h	0	4	2	6	1	5	3	7
k_w	0	1	3	2	7	6	4	5

Осуществляя перестановку базисных функций системы (матрицы) Уолша-Пели (21) так, как они определены в табл. 4, приходим к системам Уолша-Адамара (H) и Уолша-Качмажа (W), представленными соотношениями (23) и (24). В этих матрицах шкала k задает натуральную последовательность номеров базисных функций систем H и W, а шкала k_p определяет тот номер базисной функции системы Уолша-Пели, который порождает k-ю базисную функцию системы Уолша-Адамара (23) или Уолша-Качмажа (24).

Индикаторные матрицы (ИМ) играют чрезвычайно важную роль в теории систем функций Уолша [14]. Дело в том, что между ИМ и системами функций Уолша существует вполне однозначное соответствие, т.е. каждой системе Уолша отвечает единственная ИМ, и наоборот. Это, во-первых. И, во-вторых, порядок индикаторных матриц определяется логарифмической функцией от двоично-рационального порядка матриц систем Уолша. Это означает, в частности, что, например, любая система Уолша порядка может быть однозначно представлена своей ИМ восьмого порядка. Индикаторные матрицы систем Уолша, порождаемые простыми операторами Грея, совпадают с матрицами этих операторов. Так, матрицы четвертого порядка простых операторов Грея (табл. 2) являются ИМ соответствующих систем Уолша 16 порядка. При этом единичная матрица выбрана в качестве ИМ системы Уолша-Пели.

$$H_8 = \begin{array}{c|c} & 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7 \ \rightarrow n \\ \hline \begin{array}{cc} 0 & 0\\4 & 1\\2 & 2\\6 & 3\\1 & 4\\5 & 5\\3 & 6\\7 & 7\\ \downarrow & \downarrow \\ k_p & k \end{array} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \end{array} \qquad (23)$$

$$W_8 = \begin{array}{c|c} & 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7 \ \rightarrow n \\ \hline \begin{array}{cc} 0 & 0\\1 & 1\\3 & 2\\2 & 3\\7 & 4\\6 & 5\\4 & 6\\5 & 7\\ \downarrow & \downarrow \\ k_p & k \end{array} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{bmatrix} \end{array} \qquad (24)$$

Остальные системы Уолша образуются из системы Уолша-Пели (P) перестановками номеров базисных функций этой системы. Правила перестановки номеров k базисных функций системы P подобны тем, которые приведены в соотношениях (22), и имеют вид

$$k_s = k \cdot I_s, \quad s = \overline{0, l}, \quad l = \log_2 N, \qquad (25)$$

где k_s – номер базисной функции s – й системы Уолша, образуемый k – м номером функции P системы; I_s – ИМ s – й системы Уолша и N – порядок систем.

В литературных источниках, например, [9], предлагается лишь рекуррентный алгоритм синтеза систем Уолша-Пели (как и систем Уолша-Адамара), что для больших значений N не всегда удобно. Так, если необходимо построить P систему 128 порядка предварительно следует построить систему 64 порядка и т.д. В [14] для так названных «фундаментальных систем Уолша», порождаемых простыми операторами Грея, разработаны методы непосредственного вычисления этих систем по заданному порядку N. Приведем далее соотношения, используемые для построения систем Уолша-Пели.

Безотносительно к способу упорядочения базисная функция нулевого порядка в любой системе Уолша равна +1 на всем интервале определения, т.е.

$$p(0,n) = +, \quad n = \overline{0, N}.$$

Базисная функция первого порядка $p(1,\ n)$ матрицы P_N удовлетворяет системе равенств

$$p(1,n) = \begin{cases} +, & n = \overline{0, \frac{N}{2} - 1}; \\ -, & n = \overline{\frac{N}{2}, N-1}. \end{cases}$$

Функции более высокого порядка вычисляются по формулам:

$$p(2k,n) = p\left(k,(2n)_N\right), k \geq 1, \ n = \overline{0, N-1}$$

– для четных и $p(2k+1,n) = p(2k,n) \cdot p(1,n)$,

– для нечетных номеров базисных функций.

Подобными формулами вычисляются также функции системы Уолша-Кули, обозначаемой $C_N = \{c(k,n)\}$, являющейся обобщением системы Уолша-Трахтмана (1). Система Уолша-Кули впервые была доложена на Международной конференции в 2000 году в г. Вроцлав (Польша) [15]. Данная система функций построена на основании Кули-Тьюки-алгоритма [16] быстрого преобразования Фурье (БПФ) и названа так в честь одного из авторов алгоритма. Различие в способах алгебраического определения P – и C – систем состоит лишь в задании базисных функций первого порядка, которая для C_N составляется по правилу:

$$c(1,n) = \begin{cases} +, & n = \overline{0, \frac{N}{4} - 1} \ \text{и} \ n = \overline{\frac{3N}{4}, N-1}; \\ -, & n = \overline{\frac{N}{4}, \frac{3N}{4} - 1}. \end{cases}$$

Отличительная особенность систем Уолша-Кули N-го порядка состоит в том, что они являются единственными системами, доставляющими «линейную связанность» частотным шкалам процессоров БПФ в базисах Уолша [14], в связи с чем «удобны» для построения цифровых частотомеров.

Симметричные системы Уолша могут быть образованы перестановками (25) не только индикаторными матрицами, порождаемыми простыми операторами Грея, но также индикаторными матрицами, формируемыми симметричными составными кодами Грея.

На рис. 6 показан пример полного множества, состоящего из 28 систем Уолша восьмого порядка, образуемых перестановками базисных функций системы Уолша-Пели простыми и симметричными составными кодами Грея.

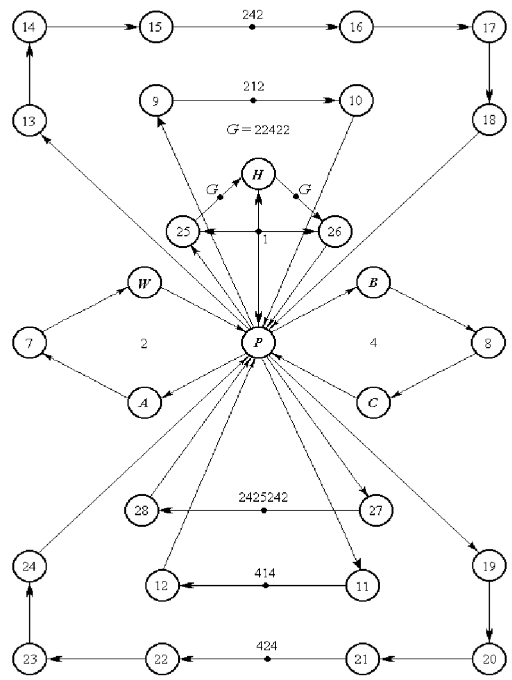

Рис. 6. Дерево Пели-связанных систем Уолша восьмого порядка

Число L_N систем Уолша совпадает с оценкой числа симметричных систем N-го порядка, полученной в работе [6] и позднее другим способом в [14]

$$L_N = \prod_{i=1}^{l} \left(2^i - i(\mathrm{mod}\ 2)\right), \quad l = \log_2 N. \tag{26}$$

Ансамбль систем Уолша, приведенный на рис. 6, назван «Пели-связанным» [14].

Тем самым предполагается, что в качестве центральной системы может быть выбрана не только система Уолша-Пели, но и другие, например, система Уолша-Адамара.

ИМ систем Уолша, расположенные в узлах дерева (рис. 6), сведены в табл. 5. Из анализа данных табл. 5, дерева Пели-связанных систем Уолша на рис. 6 и оценки (26) следует, что симметричным системам функций Уолша отвечают взаимно однозначно связанные с ними индикаторные матрицы, определение которых дается следующей, легко доказываемой методом непосредственной проверки, теоремой.

Таблица 5

Индикаторные матрицы систем Уолша восьмого порядка

P	$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$	8	$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{matrix}$	15	$\begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{matrix}$	22	$\begin{matrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{matrix}$
H	$\begin{matrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{matrix}$	9	$\begin{matrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{matrix}$	16	$\begin{matrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{matrix}$	23	$\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{matrix}$
A	$\begin{matrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}$	10	$\begin{matrix}1&0&1\\1&0&0\\1&1&1\end{matrix}$	17	$\begin{matrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix}$	24	$\begin{matrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{matrix}$
B	$\begin{matrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{matrix}$	11	$\begin{matrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{matrix}$	18	$\begin{matrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{matrix}$	25	$\begin{matrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{matrix}$
C	$\begin{matrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{matrix}$	12	$\begin{matrix}1&1&1\\0&0&1\\1&0&1\end{matrix}$	19	$\begin{matrix}0&1&0\\1&1&1\\1&1&0\end{matrix}$	26	$\begin{matrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{matrix}$
W	$\begin{matrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}$	13	$\begin{matrix}0&1&1\\1&1&1\\0&1&0\end{matrix}$	20	$\begin{matrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{matrix}$	27	$\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix}$
7	$\begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$	14	$\begin{matrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{matrix}$	21	$\begin{matrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix}$	28	$\begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}$

Теорема. Индикаторными матрицами J_w систем функций Уолша W_N двоично-рационального порядка $N = 2^l$, $l \geq 2$, является правосторонне симметрические (0,1)-матрицы l-го порядка (*необходимые условия*), невырожденные в кольце вычетов по $\mathrm{mod}\, 2$ (*достаточные условия*).

IV. Прямая и обратная задачи Уолша. Поясним этапы выполнения эмпирически разработанного алгоритма синтеза систем функций Уолша на основе их индикаторных матриц. Выберем, например, из табл. 5 индикаторную матрицу третього порядка № 18, т.е. матрицу

$$J = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}. \tag{27}$$

Этап 1. Находим матрицу $\overline{J}$, обратную индикаторной матрице (27)

$$\overline{J} = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}. \tag{28}$$

Этап 2. Вычисляем «обратно инверсную» J индикаторную матрицу

$$J = \overline{J} \cdot 1 = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}, \tag{29}$$

где 1 – матрица инверсной перестановки.

Этап 3. Составляем «проверочную матрицу» H (термин заимствован из теории кодирования [17]) $H = x \cdot J$.

Последовательно придавая вектору x значения двоичного эквивалента десятичных цифр от 0 до 7, имеем

$$H = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}. \tag{30}$$

Этап 4. Транспонируя H, получим «порождающую матрицу»

$$G = \begin{bmatrix}0&0&1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\end{bmatrix}. \tag{31}$$

Этап 5. По формуле $W = x \cdot G$, приходим к синтезируемой матрице системы функций Уолша восьмого порядка, представленной соотношением (32).

Для того чтобы представить систему (32) в общепринятой форме, достаточно заменить в ней символ 0 на +, а 1 на –.

$$W_8 = \{w(k,n)\} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \rightarrow n \\ \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ \downarrow \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&1&0 \end{bmatrix} \end{array} . \qquad (32)$$

Назовем предложенный алгоритм синтеза систем функций Уолша W по заданной индикаторной матрице J «прямой задачей Уолша». К «обратной задаче Уолша» будем относить алгоритм вычисления индикаторной матрицы J, соответствующей выбранной системе функций Уолша W. Решение обратной задачи Уолша, естественно, состоит в последовательности этапов вычислений, обратных последовательности этапов, выполняемых при решении прямой задачи Уолша. Пусть, для примера, W задана системой функций (32).

Этап 1. Находим порождающую матрицу G системы функций W_N согласно общему соотношению

$$G = \begin{bmatrix} w(2^l, n) \\ \vdots \\ w(2^1, n) \\ w(2^0, n) \end{bmatrix}, \quad l = \log_2 N. \qquad (33)$$

На основании выражений (33) и (32) приходим к матрице (31).

Этап 2. Транспонированием порождающей матрицы (31) восстанавливаем проверочную матрицу H, заданную соотношением (30).

Этап 3. Обратно инверсную J индикаторную матрицу (29) получим из проверочной матрицы (30) по формуле

$$J = \begin{bmatrix} h(2^l, j) \\ \vdots \\ h(2^1, j) \\ h(2^0, j) \end{bmatrix}, \quad j = \overline{0, l},$$

в которой $h(i, j)$ – элементы строк проверочной матрицы H.

Этап 4. Преобразованием $\overline{J} = J \cdot 1$ восстанавливаем обратную индикаторную матрицу (28).

Этап 5. Обращая матрицу $\overline{J}$, находим индикаторную матрицу J (27), соответствующую заданной системе функций W, чем и завершается решение обратной задачи Уолша.

V. Заключение. В результате проведенных исследований на основе конструктивних правосторонне симметрических индикаторных матриц (т.е. матриц, симметричных относительно вспомогательной диагонали) разработаны достаточно простые правила синтеза симметричных систем функций Уолша произвольного двоично-рационального порядка.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. / Л.А. Залманзон. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

[2]. Карповский М.Г. Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. / М.Г. Карповский, Э.С. Москалев. – Ленинград: Энергия, 1973. – 142 с.

[3]. Никитин Г.И. Применение функций Уолша в сотовых системах связи с кодовым разделением каналов. / И.Г. Никитин. – Санкт-Петербург: СПбГУАП, 2003. – 86 с.

[4]. Hadamard H.J. Résolution d'une question relative aux déterminants. "Bull. Sci. Math." 17, 1893, p. 240-246.

[5]. Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal functions. – "Amer. J. Math.", 1923, v. 45, p. 5-24.

[6]. Артемьев М.Ю. Алгоритм формирования симметричных систем функцій Уолша / М.Ю. Артемьев, Г.П. Гаев, Т.Э. Кренкель, А.П. Скотников // Радиотехника и электроника, 1978, № 7. – С. 1432-1440.

[7]. Paley R.E. A remarkable series of orthogonal functions. – "Proc. London Math. Soc.", 1932, v. 34, p. 241-279.

[8]. Зеленков А.В. О формировании симметрических систем функций Виленкина – Крестенсона. / А.В. Зеленков // Радиотехника и электроника, 1982, № 5. – С. 921-929.

[9]. Трахтман А.М. Основы теории конечных сигналов на конечных интервалах. / А.М. Трахтман, В.А. Трахтман. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.

[10]. Kaczmarz S., Steinhaus H. Theorie der ortogonalreihen. – Warszava-Lvov, 1935. – 508 p.

[11]. Yen C. Walsh functions and Grey code. IEEE Trans., 1971. EMC-13, № 3, p. 68-73.

[12]. Gray F. Pulse code communication. – Pat. USA, № 2632058, 1953.

[13]. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. / А.Г. Курош – М.: Наука, ГРФМЛ, 1973. – 400 с.

[14]. Белецкий А.Я. Преобразования Грея. / А.Я. Белецкий, А.А. Белецкий, Е.А. Белецкий. Монография в двух томах. – К.: Книжное изд-во НАУ, 2007. – Т. 1. Основы теории. – 412 с. – Т. 2. Прикладные аспекты. – 644 с.

[15]. Белецкий А.Я. Syntesis and analysis of system of Wolsh-Cooly basis functions. / А.Я. Белецкий. – Материалы МК: NIKON-2000: XIII International Conference. – Wroclaw, 2000.
[16]. Cooley J.W., Tukey J.W. An algorithm for the machine computation of complex Fourier series. – Math. Comp., 1965, v. 19, p. 297-301.
[17]. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1986. – 576 с.

REFERENCES

[1]. Zalmanzon L.A. Fourier, Walsh, Haar and their application in management, communication and other areas. / L. Zalmanzon, Moscow: Nauka, 1989, 496 p.
[2]. Karpovskiy M.G. Spectral methods of analysis and synthesis of discrete devices. / MG Karpovskiy, ES Moskalev. - Leningrad: Energy, 1973, 142 p.
[3]. Nikitin GI Application of Walsh functions in cellular communication systems, code division tion channels. / IG Nikitin. - St. Petersburg: SPbSUAI, 2003, 86 p.
[4]. Hadamard H.J. Résolution d'une question relative aux déterminants. "Bull. Sci. Math." 17, 1893, p. 240-246.
[5]. Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal functions. – "Amer. J. Math.", 1923, v. 45, p. 5-24.
[6]. Artemyev, M. The algorithm for generating symmetric systems funktsiy Walsh / M. Artemyev, GP Guai, TE Ernst, AP Cattlemen / / Technology and Electronics, 1978, № 7., p. 1432-1440.
[7]. Paley R.E. A remarkable series of orthogonal functions. – "Proc. London Math. Soc.", 1932, v. 34, p. 241-279.
[8]. Zelenkov A.V. On the formation of symmetric systems of functions Vilenkin - a cross-son. / A. Zelenkov / / Technology and Electronics, 1982, № 5., pp. 921-929.
[9]. Trahtman A.M. Fundamentals of the theory of finite signals on finite intervals. / A.M. Trahtman. - Moscow: Sov. radio, 1975, 208 p.
[10]. Kaczmarz S., Steinhaus H. Theorie der ortogonalreihen. – Warszava-Lvov, 1935, 508 p.
[11]. Yen C. Walsh functions and Grey code. IEEE Trans., 1971. EMC-13, № 3, p. 68-73.
[12]. Gray F. Pulse code communication. – Pat. USA, № 2632058, 1953.
[13]. Kurosh AG Lectures on general algebra. / AG Kourosh - Nauka, GRFML, 1973, 400 p.
[14]. Beletsky A.Ya. Conversions Gray. / A.Ja Beletsky, A.A. Beletsky, E.A. Beletsky. The monograph is in two volumes. - K.: Book publishing house NAU, 2007, T. 1. Fundamentals of the theory, 412 p., T. 2. Applied aspects., 644 p.

СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ УОЛША І КОДИ ГРЕЯ

Розроблено метод синтезу симетричних систем Уолша на основі їх індикаторних матриць (метод визначений як пряма задача Уолша) і обчисленні індикаторні матриці цих систем (зворотна задача Уолша). Порядок індикаторних матриць є логарифмічною функцією за основою 2 від двійково-раціонального порядку систем Уолша. Введені матричні форми повної множені простих кодів Грея. Множина містить класичні прямі і зворотні перетворення (названі лівосторонніми кодами Грея) і новий клас правосторонніх перетворень Грея, доповнені оператором збереження вихідної кодової комбінації (одиничною матрицею) і матрицею інверсної перестановки. Запропоновано складові коди Грея, які є мультиплікативною комбінацією довільного набору простих кодів. Показано взаємозв'язок простих і симетричних складових кодів Грея з індикаторними матрицями відповідних систем функцій Уолша.
Ключові слова: системи функцій Уолша, індикаторні матриці, коди Грея.

WALSH FUNCTIONS AND GRAY CODES

The paper developed a method of synthesis of symmetric systems Walsh based on their indicator matrices (the method is defined as a direct challenge Walsh) and calculating the indicator matrix of these systems (the inverse problem Walsh). The order of the indicator matrix is a logarithmic function of the base 2 of the binary-rational order systems Walsh. Introduced matrix forms a complete set of simple Gray codes. The set contains the classical direct and inverse transform (called left-Gray codes) and a new class of right transformations Gray, supplemented by the operator to maintain the original codeword (identity matrix) and the matrix inverse permutation. Proposed composite Gray codes, which are the multiplicative combination of an arbitrary set of simple codes. The relationship of simple and symmetrical composite Gray codes with indicator matrices of appropriate systems of Walsh functions.
Keywords: system of the Walsh functions, indicator matrix, Gray codes.

Білецький Євген Анатолійович, молодший науковий співробітник кафедри електроніки, Національний авіаційний університет.
E-mail: ebeletskiy@gmail.com
Белецкий Евгений Анатольевич, младший научный сотрудник кафедры электроники, Национальный авиационный университет.
Beletsky Evgeniy, Junior Research Fellow Department of Electronics, National Aviation University.