ЛИТЕРАТУРА

1. Самохвалов Ю.Я. Доказательство теорем в немонотонной логике умолчаний как метод синтеза планов решений // Электронное моделирование. - 1997. - Том 12. - № 2. - С. 43-52.

2. Тей А., Грибомон П., Луи Ж., Лог Ж. Логический подход к искусственному интеллекту. - М.: Мир, 1990. - 429 с.

3. Самохвалов Ю.Я. Метод проблемно-ориентированного доказательства в нечеткой логике // Кибернетика и системный анализ. - 1995. - № 5. - С. 58-68.

4. Самохвалов Ю.Я. Декомпозиция логико-лингвистических моделей принятия решений в распределенной вычислительной среде // Кибернетика и системный анализ. - 1997. - № 1. - С. 57-65.

5. Самохвалов Ю.Я. Доказательство в бесконечной эрбрановой области // Кибернетика и системный анализ. - 1997. - № 3. - С. 185-187.

Поступила 12.12.2000 р.

УДК 519.21

М.Т.Корнійчук, А.І.Присяжнюк, І.К.Совтус

МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ФУНКЦІОНУВАННЯ СПЕЦИФІЧНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ І РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ЙОГО СТАНІВ

В роботі розглядаються математичні методи дослідження процесу функціонування алгоритмічно-технологічних систем накопичення та обробки інформації. Використовується специфічний підхід до процесу функціонування системи обробки інформації, коли обробка починається лише при наявності певної накопиченої в ній визначеної кількості необхідної інформації.

Дослідження процесу функціонування (ПФ) алгоритмічно-технічних систем (АТС) накопичення та обробки іноформації (НОІ) вимагає застосування урізноманітненого математичного апарату для вдосконалення структури та форм управління процесом функціонування цих ергономічних підприємств. Таке управління передбачає використання досить адекватних математичних методів і моделей для аналізу та оптимізації різноманітних виробничих та технологічних процесів. Для побудови високоймовірного прогнозу оптимального управління подальшим ПФ в літературі відомі частково розроблені математичні моделі подібного призначення та проведені на їх основі дослідження для найпоширеніших виробничих задач прогнозу ПФ АТС. Проте інколи виникають такі специфічні умови в технологічних процесах, що відомі математичні моделі стають недостатньо адекватними. Розглянемо реальну задачу в термінах теорії масового обслуговування (ТМО) специфіка якої полягає в тому, що виробнича система НОІ починає функціонування і діє лише при наявності накопиченої в ній визначеної кількості необхідної інформації, необхідного програмного забезпечення, або в термінах ТМО – необхідної кількості вимог. Наприклад, виробництво кінцевої продукції НОІ на підприємстві може починатися лише в тому випадку, коли накопичена певна первинна кількість сировини у вигляді певної бази даних, певного математичного й програмного забезпечення, що може бути обумовлено використанням спеціальної технології. Надалі обсяг виготовленої продукції, накопиченої та обробленої інформації утворює достатній запас для подальшого зв'язку зі споживачами до того моменту, коли буде повністю задоволена потреба в інформаційній сировині, що необхідна для нового технологічного циклу. Такий спосіб функціонування є найбільш раціональним, оскільки виключає можливість неповного завантаження устаткування АТС НОІ та зниження ефективності використання виробничих ресурсів.

Таким чином, маємо наступну інтерпретацію: вимога – квант-набір інформаційної сировини і можливих програмних комплектуючих, обслужена вимога – готовий накопичений інформаційно оброблений та упакований продукт. Нагадаємо, що мова йде про обробку та накопичення інформації, її формалізацію та форматизацію лише в сенсі кількості інформації з позицій теорії інформації, без розгляду прикладного сенсу і змісту, що вкладається в цю кількість. Отже в систему ТМО надходить деяка кількість сировини. Моделюючи течію надходження вважаємо, що найадекватніша модель його буде коли ймовірність того, що за малий проміжок часу $\Delta\ (\Delta \to 0)$ надійде певна кількість m сировини, дорівнює $\lambda_m \Delta + o(\Delta)$. З даного вихідного припущення випливає, що це є стаціонарна неординарна пуасонівська течія. Природно для неї ввести узагальнене позначення параметра $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ і припустити виконання умови

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty \qquad (1)$$

що є логічним продовженням вихідних даних.

Технологічний цикл (перший канал обслуговування) починається лише тоді, коли накопичено достатню кількість інформаційної сировини (кількість вимог в черзі), величину якої позначимо r_0. Наступний технологічний цикл (другий канал обслуговування) вмикається, коли для нього також забезпечено кількість сировини (кількість вимог) r_0, а в системі масового обслуговування їх є не менше $2r_0$. Таким чином n-ий канал включається і може обслуговувати лише після того, коли в системі буде не менше $r_0 n$ вимог; при цьому для простоти дослідження і математичної формалізації обмежень на кількість каналів в системі накладати не будемо, що не є суттєвим обмеженням застосовності результатів, адже реальне співвідношення вхідних параметрів завжди забезпечує досить обмежене граничне значення n. Вважаємо, що час обслуговування однієї вимоги кожним каналом не залежить від обслуговування на інших каналах, від течії вимог і розподілений за показниковим законом. Значення параметра обслуговування знову ж для простоти аналітичних виразів і обчислень покладемо рівним одиниці, що не звужує загальності вихідної задачі, адже параметри усталеного процесу ТМО залежать не від конкретних значень окремих параметрів елементів ТМО, а від їх співвідношення. Тому будь-який параметр можна взяти за одиницю виміру, поклавши його значення рівним одиниці і нормуючи при цьому значення інших параметрів. Таким чином припущення параметра експоненціального обслуговування, рівного одиниці, не має принципового значення.

В цих умовах і припущеннях нас цікавить розподіл кількості зайнятих каналів в режимі роботи системи, що встановився. Іншими словами, нас цікавить ймовірність зайнятості каналів технологічного циклу в усталеному режимі функціонування, тобто коли накопичено достатню кількість запасів інформаційної продукції і після цього пройшло відносно багато часу.

Введемо наступні позначення. Нехай p_r, $r = 0,1,2,...$ – ймовірність того, що в довільно обраний момент часу в усталеному режимі роботи системи обслуговуванням зайнято r каналів; p_k $k = 0,1,2,....$ – ймовірність того, що в усталеному режимі в довільний момент часу в системі знаходиться k вимог. Як бачимо з введеної формалізації вихідної задачі прогноз, а також управління ПФ АТС НОІ визначається саме ймовірностями p_r. Очевидно, що за ймовірностями p_k легко визначити ймовірності p_r. Тому займемося знаходженням ймовірностей p_k. Ще раз відмітимо, що сформульована задача не втрачає загальності за припущення, що параметр обслуговування рівний одиниці; адже стаціонарний розподіл p_k визначається не конкретними значеннями параметрів потоку та обслуговування, а їх співвідношеннями. Якщо в реальній системі параметр обслуговування μ, то пронормувавши відповідно параметр потоку, можна користуватися результатами, що отримані нижче.

Продовжимо формалізацію і позначимо: $[x]$ – ціла частина величини x; $\xi(t)$ – число вимог, що знаходяться в системі в момент часу t. Неважко бачити, що введений до розгляду процес $\xi(t)$ являє собою однорідний ланцюг Маркова, і визначається ймовірностями переходу за малий час $\Delta\ (\Delta \to 0)$ у вигляді

$$\mathrm{P}\ \{\{\xi(t)=k\}\xrightarrow{\Delta}\{\xi(t+\Delta)=k\}\} = 1-\left(\lambda+\left[\frac{k}{r_0}\right]\right)\Delta+o(\Delta),$$

$$\mathrm{P}\ \{\{\xi(t)=k\}\xrightarrow{\Delta}\{\xi(t+\Delta)=k+m\}\} = \lambda_m\Delta+o(\Delta), m\ge 1, \qquad (2)$$

$$\mathrm{P}\ \{\{\xi(t)=k\}\xrightarrow{\Delta}\{\xi(t+\Delta)=k-1\}\} = \left[\frac{k}{r_0}\right]\Delta+o(\Delta).$$

З початкових умов про роботу системи випливає, що стани ланцюга $\xi(t)$ діляться на два класи. Стани $\{0,1,2,...,r_0-2\}$ утворюють клас незворотніх станів (інформаційно програмне накопичення), тому що процес $\xi(t)$, попадаючи у множину станів $\{r_0-1, r_0, r_0+1,...\}$, вже ніколи не повертається до множини станів $\{0,1,...,r_0-2\}$, оскільки обсяг запасів на вироблення продукції не може зменшитися більш ніж до r_0-1 рівня в силу технологічного принципу функціонування об'єкту. Математично це легко випливає із співвідношень (2). Інші стани $\{r_0-1, r_0, r_0+1,...\}$ утворюють замкнений клас сполучних станів, тому що як випливає з (2), від'ємні стрибки процесу $\xi(t)$ можуть бути лише одиничними, що відповідає реальній ситуації, коли закінчення обслуговування відбувається по одному, тобто ординарно. Зі сказаного випливає, що коли

$$\mathrm{P}\{\xi(t)=k\}=p_k(t),$$

то, незалежно від розподілу $\xi(0)$, границі

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t)=p_k, \qquad k=0,1,... \qquad (3)$$

завжди існують і не залежать від $\xi(0)$. Ясно, що стаціонарні

$$p_0=p_1=...=p_{r_0-2}=0.$$

За введених умов шукані ймовірності p_k завжди існують, тобто ланцюг $\xi(t)$ є ергодичним. Факт ергодичності ланцюга $\xi(t)$ встановлюється наступною теоремою.

Теорема. Якщо $\xi(0)\in\{r_0-1, r_0, r_0+1\}$, то ланцюг Маркова $\xi(t)$ має стаціонарний розподіл і, значить, всі його стани $\{r_0-1, r_0, r_0+1,...\}$ утворюють один ергодичний клас.

Доведення. Розглянемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей $\{p_k\}$. Як слідує з співвідношення (2) вони мають такий вигляд

$$\lambda p_{r_0-1}=p_{r_0};$$

$$\left(\lambda+\left[\frac{k}{r_0}\right]\right)p_k=\left[\frac{k+1}{r_0}\right]p_{k+1}+\sum_{j=r-1}^{k-1}p_j\lambda_{k-j},\ k\ge r_0 \qquad (4)$$

Припустимо $p_k = q_{k+1-r_0}$, $k \geq r_0 - 1$. Тоді (4) набуває вигляду

$$\lambda q_0 = q_1;$$

$$\left(\lambda + \left[\frac{m + r_0 - 1}{r_0}\right]\right) q_m = \left[\frac{m + r_0}{r_0}\right] q_{m+1} + \sum_{t=0}^{m-1} q_t \lambda_{m-t}, \ m \geq 1 \tag{5}$$

Для зручності обчислень, аналітичних перетворень та подальших викладок введемо твірні функції послідовностей λ_m і q_m, тобто

$$L(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m z^m, \ Q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m z^m \ \left(|z| \leq 1\right) \tag{6}$$

Згідно одержаних визначень (5) маємо

$$\frac{\lambda - L(z)}{1 - z} Q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{m + r_0}{r_0}\right] q_{m+1} z^m,$$

або в позначеннях правої частини

$$Q'_{\frac{1}{r_0}}(z) = \frac{\lambda - L(z)}{1 - z} Q(z), \tag{7}$$

де для компактності виразу прийняте позначення

$$Q'_{\frac{1}{r_0}}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{m + r_0}{r_0}\right] q_{m+1} z^m.$$

Перетворимо вираз, позначений $Q'_{\frac{1}{r_0}}(z)$ наступним чином: зважаючи на те, що ціла частина $\left[\dfrac{m + r_0}{r_0}\right]$ для будь-якого $m = nr_0 + k$ є незмінною для всіх $k \in [0, r_0 - 1]$, перейдемо від сумування за індексом до індексу , а саме

$$Q'_{\frac{1}{r_0}}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{m + r_0}{r_0}\right] q_{m+1} z^m = \sum_{k=0}^{r_0-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{nr_0 + k + r_0}{r_0}\right] q_{nr_0+k+1} z^{nr_0+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{r_0-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q_{nr_0+k+1} z^{nr_0+k} = \frac{1}{r_0} \left\{ Q'(z) + \sum_{k=0}^{r_0-1} (r_0 - k + 1) \sum_{n=0}^{\infty} q_{nr_0+k+1} z^{nr_0+k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{r_0} Q'(z) + \frac{1}{r_0 z} \sum_{k=1}^{r_0} (r_0 - k) \sum_{n=0}^{\infty} q_{nr_0+k} z^{nr_0+k}$$

Тепер позначимо через $\sqrt[r_0]{1} = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_0-1}$ корені r_0-го степеня з одиниці, тобто

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{r_0} + i \sin\frac{2\pi k}{r_0} \tag{8}$$

$\left(k = 0, 1, \ldots, r_0 - 1\right)$.

Оскільки сума k-их степенів їх

$$\varepsilon_0^k + \varepsilon_1^k + \ldots + \varepsilon_{r_0-1}^k = \begin{cases} r_0, \text{ якщо } k \text{ без залишку ділиться на } r_0, \\ 0, \text{ якщо } k \text{ не ділиться на } r_0, \end{cases}$$

то можна записати

$$\sum_{j=0}^{r_0-1} \varepsilon_j^{-k} Q(\varepsilon_j z) = \sum_{j=0}^{r_0-1} \varepsilon_j^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} q_m \varepsilon_j^m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} q_m z^m \sum_{j=0}^{r_0-1} \varepsilon_j^{m-k} =$$

$$= r_0 \sum_{n=0}^{\infty} q_{nr_0+k} z^{nr_0+k} \tag{9}$$

Використовуючи співвідношення (6) - (9) отримаємо

$$\frac{\lambda - L(z)}{1-z} Q(z) = \frac{1}{r_0} Q'(z) + \frac{1}{zr_0^2} \sum_{k=1}^{r_0-1} (r_0 - k) \sum_{j=0}^{r_0-1} \varepsilon_j^{-k} Q(\varepsilon_j r),$$

або, спростивши рівність і розв'язуючи її відносно похідної, маємо

$$Q'(z) = r_0 \frac{\lambda - L(z)}{1-z} Q(z) - \frac{1}{zr_0} \sum_{t=1}^{r_0-1} t \sum_{j=0}^{r_0-1} \varepsilon_j^t Q(\delta_j z) \tag{10}$$

Оскільки для $j \in \{1,2,\ldots,r_0-1\}$ має місце рівність

$$\sum_{j=1}^{r_0-1} t\varepsilon_j^t = \frac{\varepsilon_j}{(\varepsilon_j - 1)^2} \left[(r_0 - 1)\varepsilon_j^{r_0} - r_0 \delta_j^{r_0-1} + 1\right],$$

що випливає з тотожності

$$\sum_{n=1}^{N-1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \left[(N-1)x^N - Nx^{N-1} + 1\right] (x \neq 1)$$

і рівності $\varepsilon_j^{r_0} = 1$, то маємо

$$\sum_{t=1}^{r_0-1} t\varepsilon_j^t = \frac{r_0}{\varepsilon_j - 1} \quad (j = 1,2,\ldots,r_0-1), \tag{11}$$

що разом з (10) дозволяє записати

$$Q'(z) = \left(r_0 \frac{\lambda - L(z)}{1-z} - \frac{r_0 - 1}{2z}\right) Q(z) + \frac{1}{z} \sum_{j=1}^{r_0-1} \frac{Q(\varepsilon_j z)}{1 - \varepsilon_j}. \tag{12}$$

Відмітимо, що в частинному випадку при $r_0 = 1$ (коли не існує запасів, точніше технологічний процес не включає необхідних фіксованих запасів виготовленої продукції) співвідношення (12) набуває вигляду

$$Q'(z) = \frac{\lambda - L(z)}{1-z} Q(z), \tag{13}$$

що разом з умовою $Q(1) = 1$ дає знайомий результат

$$Q(z) = \exp\left\{-\int_z^1 \frac{\lambda - L(u)}{1-u} du\right\}, \tag{14}$$

який досить добре відомий в літературі для системи масового обслуговування з необмеженою кількістю каналів. Якщо $L(z) = \lambda z$ (тобто потік ординарний), то

$$Q(z) = e^{\lambda(z-1)},$$

і шуканий розподіл в цьому окремому випадку добре відомий, тобто

$$p_k = q_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k \geq 0).$$

Маємо частковий побічний результат з ТМО, який одержаний раніше іншими авторами. Нас цікавить загальний розв'язок поставленої задачі. А тому продовжимо займатися розв'язуванням отриманого диференціально-функціо-нального рівняння (10). Введемо позначення

$$Q_j(z) = Q(\varepsilon_j z) \quad (j = 0,1,...,z_0 - 1).$$

Підставляючи в (10) замість z значення $\varepsilon_l z$, отримаємо

$$Q_l'(z) = \left(\varepsilon_l r_0 \frac{\lambda - L(\varepsilon_l z)}{1 - \varepsilon_l z} - \frac{r_0 - 1}{2z}\right) Q_l(z) + \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{r_0 - 1} \left(1 - \varepsilon_j\right)^{-1} Q_{j + l (\operatorname{mod} r_0)}(z) \tag{15}$$

$\left(l = 0,1,...,r_0 - 1\right)$.

Вводячи вектор-стовпчик (для зручності записаний рядком)

$$\vec{Q}(z) = \left\{Q_0(z),...., Q_{r_0 - 1}(z)\right\}$$

і матрицю

$$\mathrm{P}(z) = \begin{Vmatrix} p_{00}(z) & .... & p_{0,r_0-1}(z) \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ p_{r_0-1,0}(z) & .... & p_{r_0-1,r_0-1}(z) \end{Vmatrix}$$

де елементи

$$p_{ll}(z) = \varepsilon_l r_0 \frac{\lambda - L(\varepsilon_l z)}{1 - \varepsilon_l z} - \frac{r_0 - 1}{2z},$$

$$p_{lk}(z) = z^{-1}\left(1 - \varepsilon_{k-l}\right)^{-1}, \quad (k \neq l)$$

і корені з від'ємним індексом визначені $\varepsilon_{-k} = \varepsilon_k^{-1}$, можемо переписати систему лінійних диференціальних рівнянь (15) у матричному вигляді

$$\frac{d}{dz}\vec{Q}(z) = P(z)\vec{Q}(z) \tag{16}$$

Оскільки як при всіх l має місце $Q_l(0) = q_0$, то систему (16) потрібно розв'язувати разом з початковою умовою

$$\vec{Q}(0) = q_0 \vec{e}, \tag{17}$$

де

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи (16), (17) (див. [2]) можливо подати у вигляді

$$Q(z) = q_0 \Omega_0^z(P)\vec{e}\,, \tag{18}$$

де матриця $\Omega_0^z(P)$ – матрицант, що відповідає матриці $P(z)$ на проміжку $(0, z)$. Згідно [2], $\Omega_0^z(P)$ можна обчислювати за будь-яким із наступних правил:

$$\Omega_0^z(P) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^z P(u)du\right]^k,$$

$$\Omega_0^z(P) = \lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{z}{n}P(z)} e^{\frac{z}{n}P\left(\frac{(n-1)z}{n}\right)} \cdots e^{\frac{z}{n}P\left(\frac{z}{n}\right)}\right],$$

$$\Omega_0^z(P) = \int_0^z [E + P(u)]du =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[E + P(z)\frac{z}{n}\right]\left[E + P\left(\frac{(n-1)z}{n}\right)\frac{z}{n}\right]\cdots\left[E + P\left(\frac{z}{n}\right)\frac{z}{n}\right],$$

де E – одинична матриця.

З приводу представлення (18) відмітимо наступне: цей вираз має невизначеність в нулі, тому вираз треба розуміти в сенсі правої границі. В дійсності $\Omega_0^z(P)$ не існує, так як елементи матриці $P(z)$ в околі нуля не тільки не обмежені, а і до того ж не інтегровані через наявність в них доданку виду $\frac{c}{z}$. Однак границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \Omega_\varepsilon^z(P)\vec{e}$ існує, оскільки:

а) при множенні матриці на $\vec{e}$ отримуємо вектор-стовпчик, елементами якого є суми рядків матриці;

б) в матриці $P(z)$ суми рядків вже не містять "нехороших" доданків типу $\frac{c}{z}$, тому що

$$\sum_{\substack{k=0\\k\neq l}}^{r_0-1}\frac{1}{1-\varepsilon_{k-l}} - \frac{r_0-1}{2} = 0\,. \tag{19}$$

Дійсно, згідно з рівностями (11)

$$r_0\sum_{\substack{k=0\\k\neq l}}^{r_0-1}\frac{1}{1-\varepsilon_{k-l}} = r_0\sum_{k=0}^{r_0-1}\frac{1}{1-\varepsilon_k} = -\sum_{t=1}^{r_0-1}t\sum_{k=1}^{r_0-1}\varepsilon_k^t = -\sum_{t=1}^{r_0-1}t\sum_{k=1}^{r_0-1}\varepsilon_t^{tk} =$$

$$= -\sum_{t=1}^{r_0-1}t\sum_{k=1}^{r_0-1}(\varepsilon_t)^k = -\sum_{t=1}^{r_0-1}t\,\frac{\varepsilon_t^{r_0}-\varepsilon_t}{\varepsilon_t-1} = \sum_{t=1}^{r_0-1}t = \frac{r_0(r_0-1)}{2},$$

що рівносильно рівності (19).

ЗІ СКАЗАНОГО МАЄМО, ЩО (18) ПОТРІБНО РОЗУМІТИ ЯК

$$\vec{Q}(z) = q_0 \lim_{\varepsilon\to+0}\Omega_\varepsilon^z(P)\vec{e}\,.$$

НЕХАЙ МАТРИЦЯ

$$\Omega_\varepsilon^z(P) = \left\|\varpi_{lk}^{(\varepsilon)}(z)\right\| \quad (l,k = 0,1,\ldots,r_0-1)$$

має елементи, що задовольняють співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{k=0}^{r_0-1} \varpi_{lk}^{(\varepsilon)}(z) = \varpi_l(z) \quad (l = 0,1,\dots,r_0-1).$$

ТОДІ БУДЕМО МАТИ

$$Q(z) = Q_0(z) = q_0 \varpi_0(z),$$

або, використовуючи умову нормування $Q(1)=1$, остаточно отримаємо

$$Q(z) = \frac{\varpi_0(z)}{\varpi_0(1)}. \tag{20}$$

Значить, стаціонарний розподіл ланцюга Маркова ξ_k існує. Його твірна функція, що повністю визначає шуканий розподіл співпадає з правою частиною отриманої рівності (20).

Цим доведено, що всі стани $\{r_0-1, r_0, r_0+1, \dots\}$ утворюють один ергодичний клас, тобто теорема повністю доведена.

Якщо розглядати окремий випадок – потік вимог ординарний $(L(z) = \lambda z)$, то стаціонарний розподіл може бути знайдений в явному вигляді, тому що ξ_k в такому припущенні є частковим випадком процесу розмноження і загибелі. Дійсно, в окремому частинному випадку, що розглядається

$$p_k\left(\lambda + \left[\frac{k}{r_0}\right]\right) = \lambda p_{k-1} + \left[\frac{k+1}{r_0}\right] p_{k+1}, \ (k \ge r_0 - 1),$$

або

$$\lambda p_k - \left[\frac{k+1}{r_0}\right] p_{k+1} = \lambda p_{k-1} - \left[\frac{k}{r_0}\right] p_k, \ (k \ge r_0 - 1). \tag{21}$$

Оскільки $\lambda p_{r_0-1} = p_{r_0}$, то з виразу (21) маємо

$$p_k = \frac{\lambda}{\left[\frac{k}{r_0}\right]} p_{k-1} \ (k \ge r_0),$$

або, отримуючи вираз через значення p_{r_0-1}, маємо

$$p_k = \frac{\lambda^{k+1-r_0}}{\left[\frac{k}{r_0}\right]\left[\frac{k-1}{r_0}\right]\dots\left[\frac{r_0}{r_0}\right]} p_{r_0-1} \qquad (k \ge r_0). \tag{22}$$

Використовуючи умову нормування $\sum_{k=r_0-1}^{\infty} p_k = 1$, останню рівність остаточно можна переписати у вигляді

$$p_k = \left(\sum_{l=r_0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{\prod_{j=r_0}^{l-1}\left[\frac{j}{r_0}\right]}\right)^{-1} \frac{\lambda^{k+1}}{\prod_{j=r_0}^{k}\left[\frac{j}{r_0}\right]}, \ (k \ge r_0 - 1). \tag{23}$$

Зупинимося детальніше на ще одному окремому підвипадку даного випадку, тобто розглянемо $r_0 = 2$. Неважко показати, що при цьому підвипадку величини p_k є коефіцієнтами розкладу в степеневі ряди бесселевих функцій чисто уявного агрументу. Дійсно з (22) при $r_0 = 2$ випливає:

$$p_{2k} = c\frac{\lambda^{2k+1}}{\left[\frac{2}{2}\right]\left[\frac{3}{2}\right]\cdots\left[\frac{2k-1}{2}\right]\left[\frac{2k}{2}\right]} = c\frac{\lambda^{2k+1}}{k!(k-1)!},$$

$$p_{2k-1} = c\frac{\lambda^{2k}}{\left[\frac{2}{2}\right]\left[\frac{3}{2}\right]\cdots\left[\frac{2k-1}{2}\right]\left[\frac{2k}{2}\right]} = c\frac{\lambda^{2k}}{(k-1)!(k-1)!}.$$

Тоді в силу цих співвідношень можна записати рівності:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{2k} z^{2k} = \lambda c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^{2k}}{k!(k-1)!} =$$

$$= \lambda^2 cz \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 2\lambda z\right)^{1+2r}}{r!(r+1)!} = \lambda^2 cz I_1(2\lambda z);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1} z^{2k-1} = \lambda c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^{2k-1}}{(k-1)!(k-1)!} = \lambda^2 cz \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 2\lambda z\right)^{2r}}{r!r!} =$$

$$= \lambda^2 cz I_0(2\lambda z),$$

а з них випливає

$$P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k = z\frac{I_0(2\lambda z) + I_1(2\lambda z)}{I_0(2\lambda) + I_1(2\lambda)}. \tag{24}$$

З ЦЬОГО РІВНЯННЯ МАЄМО

$$p_1 = \frac{1}{I_0(2\lambda) + I_1(2\lambda)}. \tag{25}$$

Одержані аналітичні результати дозволяють визначити стаціонарні ймовірності станів ПФ розглядуваних систем.

Потрібно відмітити, що розрахункову формулу (23) в явному вигляді можна поширити (також узагальнити) для підвипадку неординарного потоку з геометричним розподілом вимог у групі. Отримані аналітичні формули (20), (23)-(25) дозволяють знаходити стаціонарні ймовірності станів ПФ розглядуваних систем при специфічних припущеннях, характерною серед яких є деякий початковий обсяг запасів, що дорівнює $r_0 - 1$.

Насамкінець варто зауважити, що практичне використання одержаних теоретичних аналітичних результатів немає принципових труднощів. Незважаючи на те, що вони не дуже оглядові і мало відчутні на простий чисельний дотик, бо містять неелементарні функції, при наявності сучасних ЕОМ і найрізноманітнішого програмного забезпечення, чисельно-графічні трактування одержаних формул і розв'язки, які з них випливають, не є непереборною перепоною для одержання наглядного розв'язку і практичного використання в розрахунку і обгрунтуванні ефективності процесу функціонування подібних АТС НОІ.

Список літератури

1.*Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. – М.: ФМЛ, 1963. –240 с.

2.*Гантмахер Ф.Ф.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 658 с.

3.*Корнийчук М.Т.* Математические модели оптимизации и оценивания надежности и эффективности функционирования сложных РТС. – К.:КВИРТУ, 1980. – 280 с.

4. *Корнійчук М.Т., Совтус І.К.* Стохастичні моделі інформаційних технологій оптимізації надійності складних систем. – К.: КВІУЗ, 2000. – 316 с.

5.*Корнійчук М.Т.* Про одну задачу масового обслуговування з урахуванням надійності. //Український математичний журнал. – 1970.– т.22, №3, 1970. –С.384-393.

Надійшла 04.12.2000 р.

УДК 629.735.051:681.513.5 Азарсков В.Н, Блохин Л.Н., Держак С.В., Кошевая Л.А.

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ЗАДАЧАХ АВТОНОМНОЙ НАВИГАЦИИ

У статті запропоновані нові алгоритми оптимальної фільтрації і оцінювання (відновлення) первинної навігаційної інформації, що отримується з датчиків блоків безплатформеної інерційної навігаційної системи (БІНС) для цілей максимізації якості автономних вимірювань координат місцеположення ЛА.

Постановка вказаних задач викликана тим, що інтенсифікація польотів і постійне ускладнення задач, що вирішуються при цьому, питання безпеки і регулярність польотів поставили на порядок денний проблему оптимізації точності управління ЛА і його навігацію.

Во многих случаях точность траекторного движения, стабилизации и ориентирования ЛА определяют эффективность решения большинства полетных задач. Для обеспечения высокой точности автономных измерений координат местоположения ЛА целесообразно использовать оптимальные системы фильтрации и оценивания. Разработка таких систем базируется на научно обоснованных алгоритмах оценивания, анализа и синтеза многомерных систем.

Известно, что достигать и оценивать максимальные уровни качества создаваемых оптимальных систем возможно на этапах так называемого динамического их проектирования на основе научно обоснованных и удобных для практики алгоритмов синтеза. При этом учитываются динамические характеристики объекта управления, других заданных звеньев системы управления, результаты динамической аттестации штатных систем измерения, характеристики программных движений и предполагаемых эксплуатационных воздействий, а также цели , задачи и содержание качества разрабатываемой системы.

В настоящее время для повышения точности обработки навигационной информации иногда производят оптимальную фильтрацию выходных сигналов блоков датчиков первичной информации БИНС, что значительно повышает качество (точность) измеряемых