12. *Вайсборд Э.М.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения / Э.М. Вайсборд, В.И. Жуковский. – М.: Советское радио, 1980. – 304 с.

13. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и их модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.

14. *Р-моделювання* складних динамічних систем / [Г.Л. Баранов, М.М. Браіловський, А.А. Засядько та ін.]; за ред. проф. Г.Л. Баранова та проф. В.О. Хорошко. – К.: ДУІКТ, 2008 – 132 с.

Надійшла 23.01.2009

УДК 004.056.5:519.17

Баранов В.Л., Мартынова О.П.

ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА МЕТОДОВ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ

От методов маршрутизации зависит эффективность функционирования компьютерной сети, качество обслуживания и информационная безопасность её пользователей. Современные информационные технологии требуют комплексного решения задач повышения эффективности передачи информации и обеспечения информационной безопасности пользователей компьютерных сетей.

Анализ последних исследований и публикаций показал, что обычно эти задачи рассматриваются раздельно без учета их тесной взаимосвязи. Задача повышения качества обслуживания в компьютерных сетях решается путем выполнения ряда требований, которые должны выполняться при передачи пакетов от источника адресату [1]. Качество обслуживания оценивается набором параметров, которые количественно характеризуют требования:

- к пропускной способности;
- к задержкам передачи информации;
- к изменению задержек между прибытием двух последовательных пакетов адресату;
- к надежности поступления пакетов адресату;
- к загруженности узлов сети.

Если ввести количественную оценку выполнения каждого требования в виде частного критерия качества, то задача повышения качества обслуживания пользователей компьютерных сетей относится к классу задач многокритериальной оптимизации.

С другой стороны, если рассматривать только задачу повышения информационной безопасности пользователей компьютерных сетей без учета качества их обслуживания, то задача также сводится к задаче многокритериальной оптимизации, но с другим набором частных критериев качества [2]. Действительно, угрозы противника можно характеризовать количеством атак на канал передачи информации. Другим частным критериям качества можно оценивать риски потери информации и её модификации. Третьим частным критерием качества можно учитывать внешние воздействия на канал передачи информации. Следует отметить, что частный критерий качества, оценивающий надежность передачи информации по каналам связи, влияет как на качество обслуживания сети, так и информационную безопасность её пользователей. Поэтому надежность передачи информации может учитываться четвертым частным критерием качества.

Характеристика надежности передачи информации показывает взаимосвязь задач повышения качества обслуживания сети и информационной безопасности её пользователей.

Поэтому эти две задачи следует рассматривать совместно. Объединение задач повышения качества обслуживания и информационной безопасности пользователей компьютерных сетей в рамках одной многокритериальной задачи с множеством частных критериев, учитывающих частные критерии качества обслуживания и информационной безопасности, сталкивается с принципиальной проблемой снижения чувствительности общего интегрального критерия качества к изменению каждого частного критерия качества. Выясним причины возникновения этой проблемы. Без потери общности считает, что качество обслуживания и уровень информационной безопасности пользователя оценивается n минимизируемыми критериями качества $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Задаемся предельно допустимыми значениями частных критериев качества $I_{1m}, I_{2m}, \ldots, I_{nm}$ на основании технических характеристик каналов передачи информации, требований к качеству обслуживания и уровню информационной безопасности пользователей компьютерной сети.

Формируем систему относительных частных критериев качества $I_1/I_{1m}, I_2/I_{2m}, \ldots, I_n/I_{nm}$. Свернем систему относительных частных критериев качества в общий интегральный критерий качества в виде линейной свертки частных критериев качества с весовыми коэффициентами:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{I_i}{I_{im}}, \tag{1}$$

где $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$ – весовые коэффициенты.

Предположим, что все относительные критерии качества равнозначны и зададим одинаковые весовые коэффициенты

$$\alpha_i = \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Из анализа выражения (2) следует, что при $n \to \infty,\ \alpha_i \to 0$. Другими словами, влияние изменения любого относительного частного критерия качества на общий интегральный критерий качества (1) уменьшается с ростом количества частных критериев качества.

Цель роботы заключается в повышении чувствительности общего интегрального критерия качества к изменениям частных критериев качества при значительном их количестве.

Поставленную задачу решим на математической модели компьютерной сети в виде графа, вершины которого моделируют узлы-источники и узлы-приемники информации. Направленным ветвям (ребрам) графа сопоставим каналы передачи информации между узлом-источником и узлом-приемником. Ветвям графа присваивается вес (длина), который характеризует качество обслуживания и уровень защищенности моделируемого канала передачи информации. Существует множество методов свертки частных критериев качества в общий интегральный критерий качества, на основе которого присваивается вес ветвям графа, моделирующего компьютерную сеть. Если вес ветвям графа присваивать пропорционально линейной свертке частных критериев качества по выражению (1), то вес ветви графа слабо будет изменяться при изменении каждого частного критерия качества в случае значительного их количества. Существует другой метод свертки частных критериев качества по нелинейной схеме компромиссов [3, 4]:

$$I^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \dfrac{I_i}{I_{im}}}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \tag{3}$$

где I_i – i-й частный критерий качества;

α_i – весовые коэффициенты;

I_{im} – предельно-допустимое значение частного критерия качества I_i, задающее ограничения на частные критерии качества:

$$0 \le I_i \le I_{im}, i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Свертка частных критериев качества по нелинейной схеме компромиссов (3), (4) в случае значительного количества частных критериев качества и их равнозначности задает весовые коэффициенты в виде (2). Выше было установлено, что выбор весовых коэффициентов согласно выражению (2) приводит к уменьшению влияния изменения любого частного критерия качества на общий интегральной критерий качества (3) в случае роста количества частных критериев качества. Проблему снижения чувствительности общего интегрального критерия качества (3) решим методом иерархической многокритериальной оптимизации на основании вложенных скалярных сверток по нелинейным схемам компромиссов [5-7]. Метод основан на формировании из системы n частных критериев качества (4) многоуровневой иерархической структуры в виде пирамиды, в основание которой лежит система n частных критериев качества, каждый S+1-й уровень пирамиды формируется из частных критериев качества нижнего S-го уровня пирамиды, а вершина пирамиды определяет иерархический общий скалярный критерий качества. На каждом S-м уровне пирамиды все частные критерии качества разбиваем на K групп, по $n_k^{(s)}$ частных критериев качества в каждой группе. Скалярная свертка $n_k^{(s)}$ частных критериев выполняется по нелинейной схеме компромиссов (3) согласно выражению:

$$I_K^{(S+1)} = \sum_{i=1}^{n_k^{(S)}} \frac{\alpha_{ik}^{(s)}}{1 - \frac{I_{ik}^{(s)}}{I_{ikm}^{(s)}}}, \alpha_{ik}^{(s)} \ge 0, \sum_{i=1}^{n_k^{(s)}} \alpha_{ik}^{(s)} = 1, \tag{5}$$

где $\alpha_{ik}^{(s)}$ – весовые коэффициенты;

$I_{ik}^{(s)}$ – i-й частный критерий качества на S-м уровне в K-й группе;

$I_{ikm}^{(s)}$ – предельно-допустимые значения i-го частного критерия качества на S-м уровне в K-й группе:

$$0 \le I_{ik}^{(s)} \le I_{ikm}^{(s)}, i = \overline{1, n_k^{(s)}}. \tag{6}$$

Предположим, что пирамида частных критериев качества содержит S уровней. Тогда вершину пирамиды образует иерархический общий критерий качества $I^{(s+1)}$. Согласно методу иерархической многокритериальной маршрутизации предлагается присваивать ветвям графа, моделирующего компьютерную сеть, вес (длину) пропорциональный скалярной величине иерархического общего критерия качества $I^{(s+1)}$ формируемого в вершине пирамиды частных критериев качества (5), (6). Такая математическая модель компьютерной сети позволяет реализовать иерархическую многокритериальную оптимизацию маршрутов передачи информации от узла-источника к узлу-приёмнику путём минимизации длины маршрута

$$\min_j L = \sum_{j=1}^{r} I_{j0}^{(s+1)}, \tag{7}$$

где $I_{j0}^{(s+1)}$ – иерархический общий критерий качества j-й ветви графа,

r – количество ветвей графа вдоль маршрута от узла-источника к узлу-приёмнику.

Задача минимизации (7) известна как задача о кратчайшем пути между узлом-источником и узлом-приёмником, которая в известных маршрутизаторах компьютерных сетей решается алгоритмом Дейкстры [8]. Применение метода вложенных скалярных сверток по нелинейным схемам компромиссов (5), (6) встречает затруднения связанные с выбором предельно-допустимых значений частных критериев качествах $I_{ikm}^{(s)}$ на всех уровнях, кроме нижнего (первого) уровня. Выше указывалось, что предельно- допустимые значения частных критериев качества на нижнем уровне известны из технических характеристик каналов передачи информации, требований к качеству обслуживания и уровню информационной безопасности. На более высоких уровнях иерархии при $S>1$, придельные значения частных критериях на каждом S-м уровне $I_{ikm}^{(s)}$ неизвестны. В работе [7] предлагается при $S>1$ преодолеть это затруднение путём нормировки в свёртке (5) частных критериев качества $I_{ik}^{(s)}$ не к максимальному значению $I_{ikm}^{(s)}$, а к минимальному значению свёртки частных критериев качества (5). Определим по выражению (5) минимальное значение $I_k^{(s+1)}$. Предположим, что минимизируемые частные критерии качества $I_{ik}^{(s)}$ достигают идеальные нулевые значения. Тогда из выражения (5) следует, что $I_{k\min}^{(s+1)}=1$, так как $\sum_{i=1}^{n_k^{(s)}}\alpha_{ik}^{(s)}=1$. Введём в рассмотрение относительные частные критерии качества вида:

$$\overline{I_{ok}^{(s+1)}}=\frac{I_{k\min}^{(s+1)}}{I_k^{(s+1)}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_k^{(s)}}\alpha_{ik}^{(s)}\left[1-I_{ik}^{(s)}/I_{ikm}^{(s)}\right]^{-1}}. \tag{8}$$

Введённые относительные частные критерии качества (8) преобразуются в максимизируемые критерии качества $\overline{I_{ok}^{(s+1)}}$ на S+1-м уровне. Действительно, если $I_{ik}^{(s)}$ стремится к своему максимальному значению $I_{ikm}^{(s)}$, то $\overline{I_{ok}^{(s+1)}}$ обращается в ноль. В том случае, когда $I_{ik}^{(s)}$ стремится к идеальному нулевому значению, относительный частный критерий качества $\overline{I_{ik}^{(s+1)}}$ на S+1-м уровне стремится к единице, так как $\sum_{i=1}^{n_k^{(s)}}\alpha_{ik}^{(s)}=1$. Преобразуем максимизируемый относительный частный критерий качества (8) в минимизируемый

$$I_{ok}^{(s+1)}=1-\overline{I_{ok}^{(s+1)}}. \tag{9}$$

Подстановка (8) в (9) даёт выражение для расчёта относительных частных критериев качества на S+1 уровнях без знания на уровнях $S>1$ их предельных значений

$$I_{ok}^{(s+1)}=1-\left[\sum_{i=1}^{n_k^{(s)}}\frac{\alpha_{ik}^{(s)}}{1-I_{oik}^{(s)}}\right]^{-1}, \tag{10}$$

где $I_{oik}^{(1)}=I_{ik}^{(1)}/I_{ikm}^{(1)}$.

Таким образом, на втором уровне иерархии критериев качества при $S=1$ расчёт относительных частных критериев качества выполняют по выражению (5), а для остальных уровней при $S>1$ вычисления относительных частных критериев качества реализуются согласно выражению (10).

Докажем эффективность построения общего критерия качества по иерархической схеме по сравнению с известными скалярными свёртками (1) и (3). Предположим, что система n_1 частных критериев качества характеризует качество обслуживания сети, а система n_2 частных критериев качества оценивает информационную безопасность пользователей компьютерной сети. Считаем, что все частные критерии качества равноценны.

Это позволяет выбрать в выражениях (1) и (3) весовые коэффициенты $\alpha_i = \dfrac{1}{n+n_2}$. Тогда выражения (1) и (3) примут вид:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n_1+n_2} \frac{I_i}{I_{im}}, \tag{11}$$

$$I^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n_1+n_2} . \frac{1}{1-\dfrac{I_i}{I_{im}}}, \tag{12}$$

где $n = n_1 + n_2$.

Выполним теперь формирование общего критерия качества по двухуровневой иерархической схеме, пологая, что на нижнем (первом) уровне система n_1 частных критериев качества образует первую группу, а система n_2 частных критериев качества объединяется во вторую группу. Полагаем также, что все частные критерии качества в первой и второй группах равнозначны. Тогда в выражении (5) можно считать $\alpha_{i1} = \dfrac{1}{n_1}$, $\alpha_{i2} = \dfrac{1}{n_2}$. С учётом этого согласно (5) имеем

$$I_1^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{n_1} \circ \frac{1}{1-\dfrac{I_{i_1}^{(1)}}{I_{i_{1m}}^{(1)}}}, \tag{13}$$

$$I_2^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{1}{n_2} \circ \frac{1}{1-\dfrac{I_{i_2}^{(1)}}{I_{i_{2m}}^{(1)}}}. \tag{14}$$

Сравнение выражений (13), (14) с выражениями (11), (12) позволяет сделать вывод, что в известных методах скалярных свёрток (11), (12) коэффициенты влияния каждого частного критерия качества на общий критерий качества равны $\dfrac{1}{n+n_2}$, а в иерархической двухуровневой свёртке частных критериев качества коэффициенты влияния в первой группе (13) составляют величину $\dfrac{1}{n_1}$ и во второй группе (14) – $\dfrac{1}{n_2}$. В случае $n_1 = n_2$ и линейной свёртки (13), (14) в общий критерий качества (1) можно сделать вывод, что коэффициенты влияния каждого частного критерия качества на общий критерий качества при иерархической двухуровневой свёртке увеличились вдвое по сравнению с известными методами скалярных свёрток (11) и (12).

Рассмотрим теперь случай, когда система частных критериев качества характеризующих качество обслуживания сети разбивается на две группы по n_1 и n_2 частных критериев качества в каждой группе. Аналогичным образом разбиваем систему частных критериев качества оценивающих информационную безопасность пользователей сети на две группы по n_3 и n_4 частных критериев качества. Полагая все частные критерии во всех группах равноценными выражения (1) и (3) можно записать в виде

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n_1+n_2+n_3+n_4} . \frac{I_i}{I_{im}}, \tag{15}$$

$$I^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} \cdot \frac{1}{1 - I_i / I_{im}}, \tag{16}$$

где $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Выполним теперь формирование общего критерия качества по трёхуровневой иерархической схеме, пологая, что на нижнем уровне частные критерии качества сгруппированы в четыре группы из $n_1^{(1)}, n_2^{(2)}, n_3^{(3)}, n_4^{(4)}$ – частных критериев качества. Считаем также, что все частные критерии качества в каждой группе равнозначны. Это позволяет выбрать весовые коэффициенты равными $\alpha_{i1} = \frac{1}{n_1^{(1)}}$, $\alpha_{i2} = \frac{1}{n_2^{(2)}}$, $\alpha_{i3} = \frac{1}{n_3^{(3)}}$, $\alpha_{i4} = \frac{1}{n_4^{(4)}}$. Тогда выражение (5) принимает вид

$$I_1^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_1^{(1)}} \frac{1}{n_1^{(1)}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{I_{i_1}^{(1)}}{I_{i_{1m}}^{(1)}}}, \tag{17}$$

$$I_2^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_2^{(1)}} \frac{1}{n_2^{(1)}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{I_{i_2}^{(1)}}{I_{i_{2m}}^{(1)}}}, \tag{18}$$

$$I_3^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_3^{(1)}} \frac{1}{n_3^{(1)}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{I_{i_3}^{(1)}}{I_{i_{3m}}^{(1)}}}, \tag{19}$$

$$I_4^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_4^{(1)}} \frac{1}{n_4^{(1)}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{I_{i4}^{(1)}}{I_{i_{4m}}^{(1)}}}, \tag{20}$$

В известных методах скалярных свёрток частных критериев качества (15) и (16) коэффициенты влияния каждого частного критерия качества на общий критерий качества составляют величину $1/n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. В случае $n_1 = n_1^{(1)} = n_2 = n_2^{(1)} = n_3 = n_3^{(1)} = n_4 = n_4^{(1)} = n_0$ коэффициенты влияния каждого частного критерия качества на частные критерии второго уровня иерархии (17) – (20) увеличились в четыре раза по сравнению с известными методами (15) и (16). Такой же эффект увеличения коэффициентов влияния каждого частного критерия качества имеем место, если на третьем уровне иерархии объединить все частные критерии качества второго уровня (17) – (20) в общий критерий качества (1). Объединение частных критериев качества (17) – (20)в общий критерий качества (10) на третьем уровне иерархии позволяет получить ещё больший эффект увеличения коэффициентов влияния. Докажем это утверждение. Рассмотрим случай, когда количество частных критериев качества в группах на каждом уровне иерархии одинаково и равно n_0. Тогда на втором уровне иерархии общие критерии качества в каждой группе согласно выражениям (17) – (20) примут вид:

$$I_{ok}^{(2)} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{1 - \frac{I_{ik}^{(1)}}{I_{ikm}^{(1)}}}, k = \overline{1, n_0}. \tag{21}$$

Согласно выражению (21) на втором уровне иерархии имеем одну группу из n_0 частных критериев качества, которую объединим на третьем уровне иерархии в один общий критерий (10) при одинаковых весовых коэффициентах $\alpha_i^{(3)} = \frac{1}{n_0}$:

$$I_0^{(3)} = 1 - n_0 \left[\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{1 - \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \left[1 - \frac{I_{ik}^{(1)}}{I_{ikm}^{(1)}} \right]^{-1}} \right]^{-1} \qquad (22)$$

Из выражения (22) следует, что весовой коэффициент влияния на критерий качества на третьем уровне иерархии равен n_0, а в известных скалярных свёртках (15) и (16) весовые коэффициенты влияния при $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_0$ равны $1/4n_0$. Следовательно, после объединения частичных критериев качества в общий критерий качества по выражению (22) весовые коэффициенты влияния каждого частичного критерия качества увеличились в $4n_0^2$ раз. Количество частных критериев качества в каждой группе $n_0 \geq 2$. Тогда эффект увеличения коэффициентов влияния каждого частного критерия качества на общий критерий качества составляет более, чем в 16 раз.

Повышение качества методов многокритериальной маршрутизации путём иерархической свёртки частных критериев качества, которая повышает чувствительность общего интегрального критерия качества, доказана для случая равнозначности всех частных критериев качества. В случае приоритета некоторых частных критериев качества над остальными частными критериями качества. Чувствительность приоритетных частных критериев качества увеличивается пропорционально приоритету в весовых коэффициентах за счёт незначительного снижения чувствительности остальных частных критериев качества. Поэтому уровень повышения чувствительности, полученный в предположении равнозначности всех частных критериев качества, для приоритетных частных критериев качества является гарантированным, так как даёт оценку снизу для эффекта повышения чувствительности приоритетных частных критериев качества.

Таким образом, предложен эффективный метод маршрутизации, основанный на иерархической свёртке частных критериев качества по нелинейной схеме компромиссов.

Метод позволяет повысить чувствительность общего критерия качества к изменению приоритетных частных критериев качества более чем в 16 раз при трёхуровневой иерархии. Рекомендуется в случае большого количества частных критериев качества присваивать вес ветвям (рёбра) графа, моделирующего компьютерную сеть, пропорционально величине (10). В этом случае увеличится влияние приоритетных критериев качества на решение задачи маршрутизации в компьютерной сети согласно (7).

Список литературы

1. *Клименко И.А.* Способ динамической маршрутизации с поддержкой качества обслуживания в мобильных сетях без инфраструктуры // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – К.: НАУ, 2005. – Вип.4(15). – С. 102-112.

2. *Мартынова О.П., Баранов В.Л.* Метод многопутевой многокритериальной маршрутизации для повышения информационной безопасности компьютерных сетей // Захист інформації. – 2008. – №4. – С. 47-52.

3. *Воронин А.Н.* Многокритериальный синтез динамических систем. –К.: Наук. думка, 1992. – 160 с.

4. Векторная оптимизация динамических систем / А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, А.И. Козлов и др. / Под ред. А.Н.Воронина. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.

5. *Воронин А.Н.* Многокритериальная оптимизация иерархических структур // Проблеми інформатизації та управління: Зб.наук.пр. – К.:НАУ,2004. – Вип.11. – С. 101-104.

6. *Воронин А.Н.* Метод многокритериальной оценки оптимизации иерархических систем // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №3. – С. 84-92.

7. *Воронин А.Н.* Декомпозиция и композиция свойств альтернатив в многокритериальных задачах принятия решений // Кибернетика и системный анализ. –2009. – №1. – С. 117-122.

8. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

Поступила 04.02.2009

УДК 681.39

Козюра В.Д.

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БИНАРНЫХ ПРИЗНАКОВ В СИСТЕМАХ РАСПОЗНАВАНИЯ

Структура статистической распознающей системы определяется, в основном, видом условных распределений вероятностей значений признаков распознаваемых классов $f(\vec{x}/A_m)$, $m=\overline{1,M}$, где A_m – обозначение m-го класса, M – общее число классов; $\vec{x}=\left(x_1,\ldots,x_n,\ldots,x_N\right)^T$ – N-мерный вектор измеряемых признаков [1].

Если каждый из признаков x_n, $n=\overline{1,N}$ является бинарным (т.е. $x_n=0$ или $x_n=1$), то общее число различных условных вероятностей $f(\vec{x}/A_m)=\left\{P\left(b_j/A_m\right)\right\}_{j=1}^{J}$, $m=\overline{1,M}$ для описания каждого класса составит $J=2^N$. При числе признаков $N \geq 20$ столько вероятностей $P\left(b_j/A_m\right)$ оценить в процессе обучения распознающей системы практически нереально. В связи с этим возникает проблема в непараметрической оценке условных распределений условных распределений значений признаков.

Одним из эффективных путей непараметрической оценки искомых вероятностей является использование разложений дискретных распределений по системе многоортогональных функций [2]. Практически удобным является разложение Бахадура-Лазарсфельда, описывающее искомые распределения в виде:

$$f(\vec{x})=\prod_{n=1}^{N} P_n^{x_n}\cdot\left[1-P_n\right]^{1-x_n}\times$$

$$\times\left\{1+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{l=n+1}^{N}\rho_{nl}\cdot\frac{\left(x_n-P_n\right)\cdot\left(x_l-P_l\right)}{\sqrt{P_n\cdot\left(1-P_n\right)\cdot P_l\cdot\left(1-P_l\right)}}+\ldots+\rho_{12\ldots N}\cdot\frac{\left(x_1-P_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_N-P_N\right)}{\sqrt{P_1\cdot\left(1-P_1\right)\cdot\ldots\cdot P_N\cdot\left(1-P_N\right)}}\right\},$$

где $P_n=P\left(x_n=1\right)$, $n=\overline{1,N}$ - условные вероятности того, что n-й признак принимает значение 1; $\rho_{nl},\rho_{nlk},\ldots,\rho_{12\ldots N}$ - коэффициенты корреляции двух, трех и т.д. бинарных переменных.

Аппроксимация распределения $f(\vec{x})$ заключается в игнорировании статистических связей выше определенного порядка. Например, аппроксимацией первого порядка является выражение, описывающее независимые признаки