

МАТРИЦЫ СОПРОТИВЛЕНИЙ МИКРОПОЛОСКОВЫХ ДВУМЕРНЫХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

В настоящее время микрополосковые узлы СВЧ в основном рассчитываются на основе теории длинных линий [1-3]. Теорией длинных линий можно пользоваться только в том случае, когда толщина подложки и ширина токоведущего проводника значительно меньше длины волны. Следовательно, с увеличением частоты колебаний, когда ширина проводника становится соизмеримой с длиной волны, точность расчетных соотношений, полученных на основе теории длинных линий, снижается. Поэтому на достаточно больших частотах, когда по конструктивным соображениям невозможно выполнить условия применимости теории длинных линий, существующие соотношения линий передач часто приводят не только к большим расчётным погрешностям, но и к принципиально неверным результатам. Например, при расчете микрополосковых резонансных систем, теория линий передач не позволяет описать дополнительные резонансы, вызванные высшими типами волн. В результате рассчитанная резонансная система обладает на самом деле совершенно другими свойствами.

Повысить точность расчетов микрополосковых конструкций можно при рассмотрении их как двумерных цепей [4,5]. В этом случае, при условии, что ширина выводов значительно меньше длины волны, элементы матрицы сопротивлений двумерного многополюсника, определяются функцией Грина [4]

$$Z_{il} = -Z_I G_I(S_i, S_l); \quad (1)$$

$$l, i = 1, 2, \dots, m.$$

где Z_I - распределённое сопротивление; $G_I(S_i, S_l)$ - функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta U_I + k^2 U_I = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0); \quad (2)$$

k - волновое число; i - номер строки матрицы; l - номер столбца матрицы; $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака; S - двумерная переменная x, y ; x_0, y_0 - координаты включения источника в виде функции Дирака; U_I - скалярная функция, связанная с продольной составляющей электрического поля E_z в планарной структуре [4]. Функция U_I выражается через напряжение U двумерной структуры $U = U_I Z_I$.

Таким образом, зная функцию Грина $G_I(S, S_0) = G_I(x, y, x_0, y_0)$ планарной области, по формуле (1) можно найти матрицу сопротивлений многополюсника. В настоящее время наиболее подробно изучены элементы матрицы сопротивлений микрополосковой прямоугольной цепи [5]. Что касается цепей другой формы, то аналитические выражения для определения элементов их матриц сопротивлений, на основе которых можно непосредственно рассчитать цепь, на сегодняшний день отсутствуют.

Целью данной статьи является систематизация микрополосковых двумерных цепей, отличных от прямоугольных, для которых известны (или их можно получить) функции Грина $G_I(S, S_0) = G_I(x, y, x_0, y_0)$. Изложение материала базируется на известных математических результатах, приведенных в основном в [6, 7].

1. Микророзривна ланка в вигляді прямокутного трикутника (рис.1)

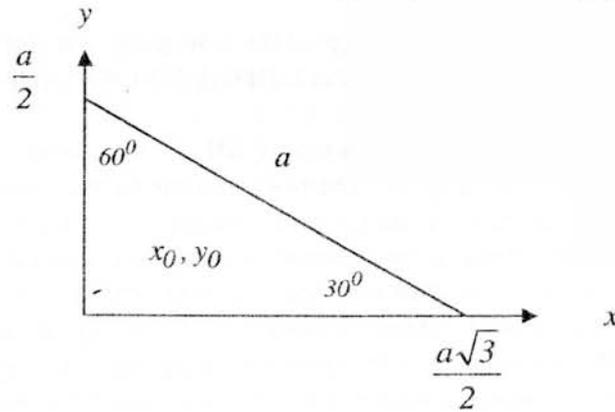


Рис.1. Прямокутний трикутник

При наявності магнітної стінки функція Грина описується виразом [6]:

$$G_I(S, S_0) = G_I(x, y, x_0, y_0) = 8 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T_1(x_0, y_0) T_1(x, y)}{9\sqrt{3}a^2 k^2 - 16\sqrt{3}\pi^2(m^2 + mn + n^2)}, \quad (3)$$

$$T_1(x, y) = (-1)^c \cos\left(\frac{2\pi cx}{\sqrt{3}a}\right) \cos\left[\frac{2\pi(m-n)y}{3a}\right] + (-1)^m \cos\left(\frac{2\pi mx}{\sqrt{3}a}\right) \cos\left[\frac{2\pi(n-c)y}{3a}\right] + (-1)^n \cos\left(\frac{2\pi nx}{\sqrt{3}a}\right) \cos\left[\frac{2\pi(c-m)y}{3a}\right], \quad (4)$$

$$c = -(m+n).$$

Підставив (3) в (1), знайдемо елементи матриці спротивлень багатополосника на основі трикутної ланки рис.1.

2. Микророзривна ланка в вигляді рівностороннього трикутника (рис.2)

В даному випадку

$$G_I(S, S_0) = G_I(x, y, x_0, y_0) = 4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T_1(x_0, y_0) T_1(x, y) + T_2(x_0, y_0) T_2(x, y)}{9\sqrt{3}a^2 k^2 - 16\sqrt{3}\pi^2(m^2 + mn + n^2)}, \quad (5)$$

де $T_1(x, y)$ визначається виразом (4), а функція

$$T_2(x, y) = (-1)^c \cos\left(\frac{2\pi cx}{\sqrt{3}a}\right) \sin\left[\frac{2\pi(m-n)y}{3a}\right] + (-1)^m \cos\left(\frac{2\pi mx}{\sqrt{3}a}\right) \sin\left[\frac{2\pi(n-c)y}{3a}\right] + (-1)^n \cos\left(\frac{2\pi nx}{\sqrt{3}a}\right) \sin\left[\frac{2\pi(c-m)y}{3a}\right] \quad (6)$$

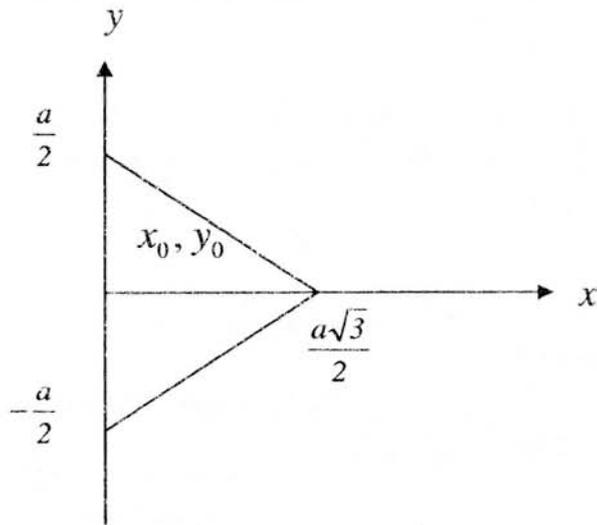


Рис.2. Равносторонний треугольник

3. Микророскоковая цепь в виде прямоугольного равнобедренного треугольника (рис.3)

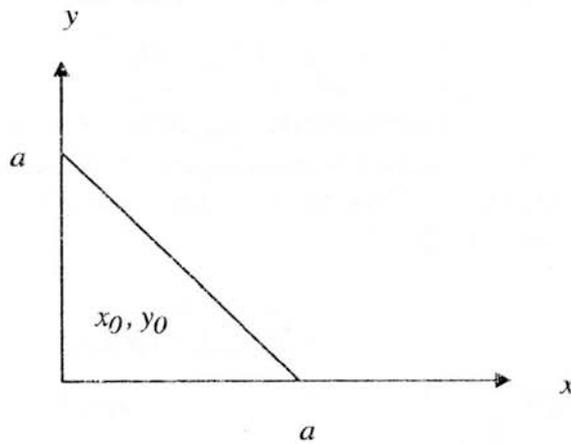


Рис.3. Равнобедренный прямоугольный треугольник

В данном случае функция Грина [6]

$$G_I(S, S_0) = G_I(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_m \sigma_n T(x_0, y_0) T(x, y)}{(m^2 + n^2) \pi^2 + a^2 k^2}, \quad (7)$$

где

$$T(x, y) = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} + (-1)^{m+n} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a}, \quad (8)$$

$$\sigma_i = 1 \text{ при } i=0 \text{ и } \sigma_i = 2 \text{ при } i \neq 0.$$

4. Микрополосковая цепь в виде круговой области (рис.4)

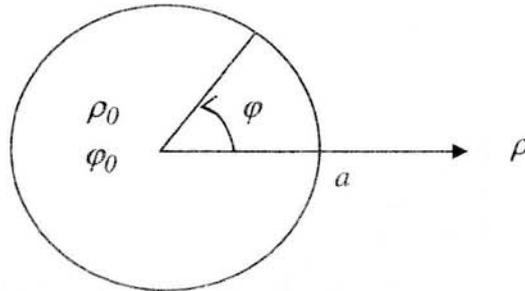


Рис.4. Круговая область

Для данной области [6,7]

$$G_I(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) = \frac{I}{k^2 \pi a^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_n J_n(k_{mn} \rho_0) J_n(k_{mn} \rho) \cos[n(\varphi - \varphi_0)]}{\pi \left(a^2 - \frac{n^2}{k_{mn}^2} \right) J_n^2(k_{mn} a)} \quad (9)$$

Величины σ_n имеют те же значения, что и в выражении (7), J_n - функции Бесселя n -го порядка, числа k_{mn} определяются из решения уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k_{mn} \rho) = 0 \quad (10)$$

при $\rho = a$. Индекс m в коэффициенте k_{mn} соответствует m -му корню уравнения. Для функции Бесселя нулевого порядка первый корень выбирается ненулевым.

Для планарной цепи, замкнутой вдоль границы $\rho = a$, функцию Грина можно представить в двух видах [6,7]:

А.

$$G_I(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(k\rho) \cos m\varphi, & \rho < \rho_0, \\ m=0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} B_m [J_m(k\rho) N_m(ka) - N_m(k\rho) J_m(ka)] \cos m\varphi, & \rho > \rho_0, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$A_m = \frac{J_m(ka) N_m(k\rho_0) - J_m(k\rho_0) N_m(ka)}{2\sigma_m J_m(ka)}, \quad (12)$$

$$B_m = \frac{-J_m(k\rho_0)}{2\sigma_m J_m(ka)}, \quad \sigma_m = \begin{cases} 2 & (m=0) \\ 1 & (m>0) \end{cases}, \quad (13)$$

N_m - функции Неймана m -го порядка.

Б.

$$G_I(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) = \frac{I}{4} N_0(k\rho_a) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(k\rho) \cos n\varphi}{2\pi J_n(ka) \sigma_n} \int_0^\pi N_0(k\rho_a) \cos n\varphi d\varphi, \quad (14)$$

$$\rho_a^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \varphi.$$

5. Микроролосковая цепь в виде сектора круга (рис.5)

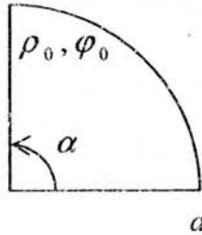


Рис.5. Сектор круга

$$G_I(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) = \frac{2A}{k^2 \pi a^2} + 2A \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_n J_n(k_{mn}, \rho_0) J_n(k_{mn}, \rho) \cos(n_i \varphi_0) \cos(n_i \varphi)}{\pi \left(a^2 - \frac{n_i^2}{k_{mn}^2} \right) \left(k^2 - k_{mn}^2 \right) J_n^2(k_{mn}, a)}, \quad (15)$$

где $n_i = nA$, а величина k_{mn} определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k_{mn}, \rho) = 0$$

при $\rho = a$. Угол сектора $\alpha = \pi/A < \pi$. Величина σ_n определяется как и ранее (8).

6. Микроролосковая цепь в виде круглого кольца (рис.6)

$$G_I(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{k^2 (b^2 - a^2) \pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_n F_{mn}(\rho_0) F_{mn}(\rho) \cos[n(\varphi - \varphi_0)]}{\pi \left[\left(b^2 - \frac{n^2}{k_{mn}^2} \right) F_{mn}^2(b) - \left(a^2 - \frac{n^2}{k_{mn}^2} \right) F_{mn}^2(a) \right] \left(k^2 - k_{mn}^2 \right)}, \quad (16)$$

$$F_{mn}(\rho) = N'_n(k_{mn} a) J_n(k_{mn} \rho) - J'_n(k_{mn} a) N_n(k_{mn} \rho). \quad (17)$$

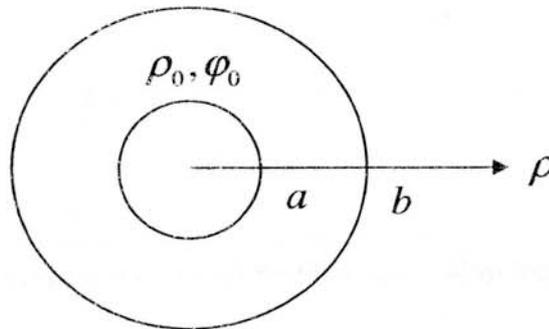


Рис. 6. Планарная кольцевая цепь

При этом числа k_{mn} являются решением уравнения

$$\frac{J'_n(k_{mn} a)}{N'_n(k_{mn} a)} = \frac{J'_n(k_{mn} b)}{N'_n(k_{mn} b)}. \quad (18)$$

В приведенных формулах J'_n, N'_n - первые производные по ρ соответствующих функций.

7. Микроролосковая цепь в виде сектора кольца (рис.7)

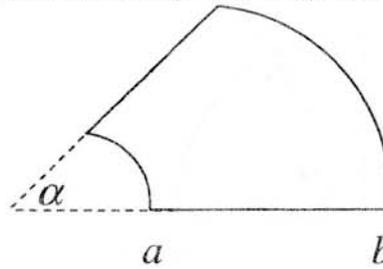


Рис.7. Сектор кольца

$$G_I(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) = \frac{2A}{k^2(b^2 - a^2)\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_n F_{mn_i}(\rho_0) F_{mn_i}(\rho) \cos(n_i \varphi_0) \cos(n_i \varphi)}{\pi \left[\left(b^2 - \frac{n_i^2}{k_{mn_i}^2} \right) F_{mn_i}^2(b) - \left(a^2 - \frac{n_i^2}{k_{mn_i}^2} \right) F_{mn_i}^2(a) \right] (k^2 - k_{mn_i}^2)}, \quad (19)$$

где $n_i = nA, A > 1$; F_{mn_i} определяется формулой (17). Числа k_{mn_i} являются решением уравнения (18). Величина σ_n определяется как и ранее (8). Угол сектора $\alpha = \pi/A, A > 1$.

8. Микроролосковая цепь в виде неограниченной области (рис.8)

В данном случае [8]

$$G_I(x, y, x_0, y_0) = \frac{j}{4} H_0^{(2)}(kR), \quad R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (20)$$

где $H_0^{(2)}$ - функция Ханкеля второго рода.

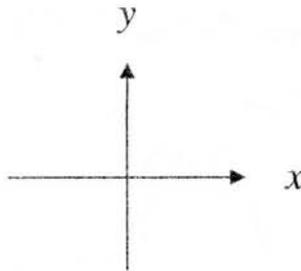


Рис.8. Неограниченная область

9. Микроролосковая цепь в виде полубесконечной прямоугольной области (рис.9)

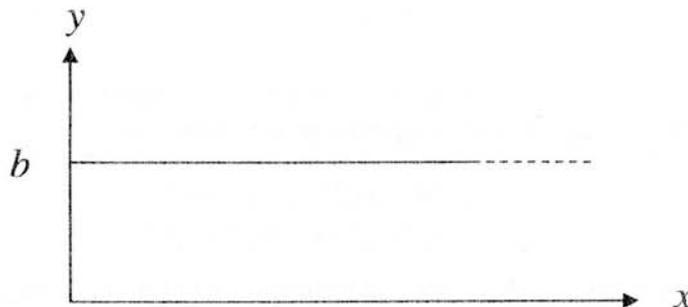


Рис. 9. Полубесконечная прямоугольная область

В данном случае воспользуемся представлением функции Грина через систему ортонормированных собственных функций уравнения (2) при нулевой правой части

$$\Delta U_I - \lambda U_I = 0, \lambda = -k^2. \quad (21)$$

Предположим, что к двумерной цепи подключён источник тока с плотностью тока J_{cm} . Тогда процессы в цепи будут описываться уравнением

$$\Delta U_I - \lambda U_I = J_{cm}, \lambda = -k^2. \quad (22)$$

При этом решение уравнения (22) можно представить в виде [9]

$$U_I = \int_{D_A} H(\lambda) \psi(s, \lambda) d\lambda, \quad H(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda} \int_V \psi^*(s, \lambda) J_{cm}(s) ds, \quad (23)$$

где D_A - спектр уравнения (22), V - область планарной цепи, $\psi(S, \lambda)$ - ортонормированные собственные функции уравнения (22), символ * означает комплексное сопряжение.

При $J_{cm} = \delta(S, S_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ решением уравнения (22) является функция Грина. При этом, как следует из (23),

$$G_I(S, S_0) = \int_{D_A} H(\lambda) \psi(S, \lambda) d\lambda, \quad H(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda} \psi^*(S_0, \lambda). \quad (24)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$G_I(S, S_0) = \int_{D_A} \frac{1}{\lambda - \lambda} \psi(S, \lambda) \psi^*(S_0, \lambda) d\lambda. \quad (25)$$

Из анализа (25) следует, что в случае дискретного спектра

$$G_I(S, S_0) = \sum_n \frac{\psi_n(S) \psi_n^*(S_0)}{\lambda_n - \lambda} = \sum_n \frac{\psi_n(S) \psi_n^*(S_0)}{k^2 - k_n^2}, \quad (26)$$

где n - номер собственного значения и номер соответствующей собственной функции.

Предположим, что границы полубесконечной области $x=0, y=0, b$ (рис.9) замкнуты, то есть, вдоль границ помещена электрическая стенка. Тогда собственные функции [7]:

$$\psi_n(S) = \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \sin \xi x \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad 0 < \xi < \infty. \quad (27)$$

Из выражения (27) видно, что вдоль оси y спектр является дискретным, а вдоль оси x непрерывным: $0 < \xi < \infty$. Поэтому интеграл по спектру D_A в формуле (25) преобразуется в суммирование и интегрирование. Учитывая, что $\lambda = -k^2$ и $\lambda = -k_n^2$ находим, что для непрерывного спектра $\lambda = \xi^2$. Следовательно, $d\lambda = 2\xi d\xi$ и выражение для функции Грина (25) принимает вид

$$G_I(S, S_0) = \frac{8}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{k^2 - \xi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin \xi x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \xi x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b} y\right)^2}. \quad (28)$$

Если вдоль границ расположить магнитную стенку, то собственные функции [7]

$$\psi_n(S) = \sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\pi b}} \cos \xi x \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad 0 < \xi < \infty, \quad (29)$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 (n \geq 1).$$

В данном случае функция Грина

$$G_I(S, S_0) = \frac{4}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{k^2 - \xi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon_n \cos \xi x \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \xi x_0 \cos \frac{n\pi}{b} y_0}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b} y\right)^2}. \quad (30)$$

10. Микрополосковая цепь в виде четверть плоскости (рис.10)

В данном случае спектр является чисто непрерывным и при наличии электрической стенки вдоль границ собственные функции равны [7]

$$\psi(S) = \frac{2}{\pi} \sin \xi x \sin \eta y, \quad 0 < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < \infty. \quad (31)$$

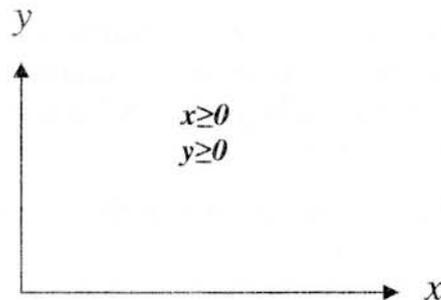


Рис.10. Четверть плоскости

Подставив (31) в (25), получим

$$G_I(S, S_0) = \frac{8}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{k^2 - \xi^2} \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{k^2 - \eta^2} \sin \xi x \sin \eta y \sin \xi x_0 \sin \eta y_0. \quad (32)$$

Если вдоль границ $x=0, y=0$ поместить магнитный экран, то в выражении (32) следует осуществить замену \sin на \cos .

11. Микрополосковая цепь в виде полуплоскости (рис.11)

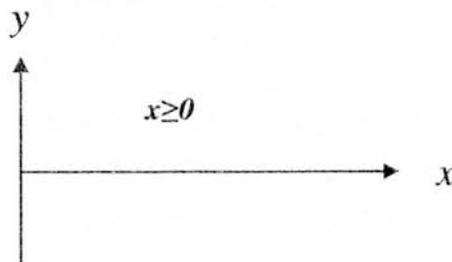


Рис.11. Полуплоскость

При расположении электрической стенки вдоль границы $x=0$ собственные функции [7]

$$\psi(S) = \frac{1}{\pi} \sin \xi x \cdot e^{-j\eta y}, \quad 0 < \xi < \infty, \quad -\infty < \eta < \infty. \quad (33)$$

Подставив (33) в (25), получим

$$G_I(S, S_0) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{k^2 - \xi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\eta d\eta}{k^2 - \eta^2} e^{j(y_0 - y)} \sin \xi x \sin \xi x_0. \quad (34)$$

При расположении магнитной стенки вдоль границы $x=0$ в формуле (34) следует \sin заменить на \cos .

Заключение. Таким образом, используя функции Грина планарных цепей различной формы, рис.1-11, по формуле (1) можно определить элементы матрицы сопротивлений

соответствующих многополюсников. Полученные выражения позволяют на основе двумерных цепей методами классической теории сосредоточенных цепей синтезировать различные устройства: фильтры, резонаторы, цепи согласования и т.д. Следует иметь ввиду, что выражением (1) можно пользоваться, когда размеры выводов значительно меньше длины волны и распределением тока по сечению вывода можно пренебречь. В тех случаях, когда необходимо учитывать распределение плотности тока по сечению вывода следует пользоваться более точной формулой для элементов матрицы сопротивлений планарных многополюсников [4]:

$$Z_{ik} = \frac{Z_1 \int_{D_k} G_1(S_i, S_0) J_{ck}(S_0) dS_0}{- \int_{D_k} J_{ck}(S_i) dS_i}; \quad (35)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

где J_{ck} - распределение плотности тока в выводе с номером k , D_k - область k -го вывода, m - количество выводов многополюсника.

Список литературы

1. Hunter I. Theory and Design of Microwave Filters. IEE, 2002.- 458p.
2. Lo W.-T. Miniaturized multilayer ceramic filter with high impedance lines connected to parallel coupled lines // IEEE Microwave and wireless components letters.-2001.-V.11.-№3.- P.133.
3. Беляев В.А., Лексиков А.А., Шихов Ю.Г. Микрополосковые резонаторы с плавным изменением ширины проводника и фильтры на их основе //Электромагнитные волны и электронные системы.-2001.-№1.- С.35-42.
4. Козловский В.В. Построение высокодобротных планарных фильтров // Зб. наук. пр. в.ч. А1906. - 2003.- Вип.7.- С.69-77.
5. Козловский В.В. Четырёхполюсные матрицы сопротивлений планарных прямоугольных цепей при различных граничных условиях // Зб. наук. пр.- К.: НА СБУ.- 2003.- №9.- С.63-76.
6. K.C. Gupta Analysis and Design of Integrated Circuit Antenna Modules. Wiley, John and Sons, 2001.- 478p.
7. Фелсен Л, Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Том 1.-М.:Мир,1978.-548с.
8. Марков Г.Т., Васильев Е.Н. Математические методы прикладной электродинамики.- М.:Сов. радио,1970.-122с.
9. Корн Г.,Корн Т. Справочник по математике. - М.:Наука,1974.-831с.

Поступила 15.04.2004
После доработки 8.06.2004