В данном случае ЛП "Вычислительное средство" присваивается лингвистическое значение, являющееся составным термом $t$, представляющим собой кортеж составляющих термов: "Вычислительное средство" = $t$, где $t = <X_1, X_2,..., X_m>, t \in T$.

Смыслом конкретного значения $t$ ЛП "Вычислительное средство" является нечеткое множество $U_t$ с функцией принадлежности $\nu_t = (\nu_{1t}, \nu_{2t},..., \nu_{nt})$ заданной на универсальном множестве $U$, включающем в себя все доступные ТС. Значение $\nu_{jt}$ указывает степень соответствия $j$-го ТС совокупности сформулированных термом $t$ функциональных характеристик. Семантическое правило определения смысла каждого значения ЛП имеет вид:

$$\nu_{jt} = \prod_{i=1}^{m} \mu_{ijt}^{\alpha_i}, \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \quad t \in T,$$

где $\alpha_i$ – коэффициент важности $i$-й функциональной характеристики; $\mu_{ijt}$ – степень соответствия $j$-го ТС $i$-й функциональной характеристике (степень полноты ее реализации, причем $0 \le \mu_{ijt} \le 1$). Величины $\alpha_i$ и $\mu_{ijt}$ оцениваются экспертно для каждой функциональной характеристики и рассматриваемого ТС путем усреднения оценок по группе экспертов. Тогда $opt(BC) = \max\limits_{i} \nu_{jt}$.

В заключение отметим, что предложенный в статье подход может использоваться на ранних стадиях проектирования РИС с целью принятия обоснованных технических решений, поскольку на этих стадиях цена ошибочных решений, как правило, очень высока. Так неправильные решения, принятые на этих стадиях, могут быть приняты к реализации на этапе технического проектирования, и возможно, что их ошибочность будет выявлена лишь на этапе испытаний, что может привести к неоправданно большим экономическим затратам.

**Список литературы**

1. Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. - М.: Наука, 1982. - 197 с.
2. Герасимов Б.М., Эйдельман С.Д. Дискретные структуры. - Киев: КВИРТУ ПВО, 1989. - 324с.
3. Нестеров Ю.Г., Папшев И.С. Разработка САПР: Выбор состава программно-технического комплекса САПР. - М.: Высшая школа, 1990. - 157 с.

Поступила 16.06.2004
После доработки 29.06.2004

УДК 517.93
Игнатов В.А., Минаев Ю.Н., Гузий Н.Н.

# АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИТЕРИЕВ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЙ

**Постановка проблемы.** Типовая процедура анализа эффективности и оптимизации решений по любой вновь создаваемой системе, в том числе и системе защиты информации, в общем случае включает следующие необходимые этапы итерационной процедуры: определение практической потребности ; выбор целей и формулировка требований к системе, которая призвана обеспечить достижение этих целей; определение внешних условий функционирования системы и систем, с которыми будет взаимодействовать разрабатываемая система; выбор критериев эффективности (оптимальности) системы и построение их математических моделей; выбор и анализ возможных способов решения поставленных задач; выявление и исследование необходимых ресурсов и ограничений на их использование; составление математических моделей ограничений как функций от управляемых и неуправляемых переменных; сравнительный анализ (сопоставление) эффекта и затрат ресурсов, возможных вариантов построения системы; сравнение альтернатив, отыскание и выбор оптимального решения; анализ адекватности и чувствительности математических моделей критериев и ограничений к изменениям управляемых переменных параметров; предоставление результатов решения задач анализа, синтеза и оптимизации лицу, принимающему окончательное решение .

Итерационная процедура цикла разработки - научных исследований, конструкторской и технологической проработки - завершается созданием опытного образца проектируемой системы. Современные системы защиты информации представляют собой сложные иерархические многоуровневые системы [1]. Основными характеристиками таких систем являются: вертикальная и горизонтальная декомпозиция на относительно самостоятельные подсистемы, которые имеют свои цели, критерии и органы управления, приоритет принятия решений верхних уровней по отношению к нижним, зависимость решений, принимаемых на каждом уровне и в каждой подсистеме от решений, которые принимаются на других уровнях и в других подсистемах, необходимость конкордации (согласования) критериев и решений, координации выполнения решений и действий. Процесс управления критериями и решениями подсистем осуществляется в условиях неопределенности, обусловленной неполной информацией о поведении других подсистем, а также об их внешнем окружении [2].

При выборе критериев и ограничений в иерархических системах возможны такие проблемные ситуации: одноуровневый выбор критериев при наличии одной цели; одноуровневый многоцелевой выбор критериев; многоуровневый выбор критериев при условии, что каждый уровень руководствуется одной целью; многоуровневый многоцелевой процесс формирования критериев. Следовательно, построение математических моделей критериев эффективности и ограничений является ключевой проблемой во всех задачах анализа, синтеза и оптимизации разрабатываемых систем, поэтому построение самих процедур формализации критериев и ограничений само по себе является важной и актуальной проблемой [3,4].

**Цель данной работы** – построение аксиоматической теории для математического моделирования критериев оптимальности и ограничений как определенных функций от управляемых и неуправляемых переменных. Формализация построения математических моделей позволяет содержательно ставить и решать задачи анализа, синтеза и оптимизации систем по выбранным критериям и выявленным ограничениям. Неуправляемые переменные, как правило, играют роль параметров семейства решений и определяют обычно те или иные условия функционирования и взаимодействия систем, и/или области существования и единственности оптимальных решений.

Для построения системы аксиом используются три руководящих принципа:

П1. Критерии эффективности должны позволять оптимальное управление (готовить и принимать оптимальные решения), в том числе и при наличии ограничений.

П2. Так как в двойственных задачах оптимизации ограничения играют роль критериев, то математические модели ограничений конструируют также как и модели критериев.

П3. Любая задача с ограничениями может быть преобразована в последовательность задач без ограничений, поэтому для выбора канонических форм можно использовать вспомогательную функцию Лагранжа как обобщенный критерий оптимальности, который учитывает ограничения.

Система аксиом математического моделирования критериев оптимальности и ограничений строится на необходимых и достаточных условиях существования экстремумов функций и функционалов. Эта система аксиом позволяет разрабатывать канонические формы уравнений оптимизаций, как уравнений баланса, критериев оптимизации и ограничений, как интегральных преобразований этих канонических форм.

Рассмотрим последовательно аксиомы предлагаемой системы.

Аксиома 1. Любая непрерывная дважды дифференцируемая функция $F(x_1, x_n)$ от $n$ независимых переменных (аргументов) может быть критерием оптимальности (целевой функцией), а сами аргументы играть роль управляемых переменных, если для области существования функции соблюдаются необходимые и достаточные условия существования экстремумов.

Аксиома 2. Любая непрерывная дважды дифференцируемая функция $G(x_1, x_n)$ от $n$ независимых переменных (аргументов) может быть ограничением, а сами аргументы играть роль управляемых переменных, если для области существования функции соблюдаются необходимые и достаточные условия существования экстремумов и заданы значения ограничений в виде системы уравнений

$$G_k(x_1, x_n) = G_k^*,\ \kappa = 1,m, \tag{1}$$

где $G_k^*$ - значение $k$ – го ограничения,

$m$-число ограничений.

Аксиома 3. Чтобы оптимальное решение существовало и было единственным, необходимо чтобы число управляемых переменных и число ограничений удовлетворяли условию:

$$n\text{-}m>0,\ n>m,\ m<n \tag{2}$$

Аксиома 4. В случаях, когда ограничения (1) заданы в виде неравенств, задачи оптимизации сводятся к известным способом введения фиктивных вспомогательных переменных

Аксиома 5. В двойственных задачах оптимизации, когда целевые функции и ограничения могут меняться местами, должно выполнятся необходимое условие (2).

Аксиома 6. В задачах оптимизации с ограничениями в роли критерия оптимизации используются вспомогательная функция Лагранжа вида [5-7]:

$$L(x_1, x_n) = F(x_1, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left[G_k(x_1, x_n) - G_k^*\right] \tag{3}$$

где $\lambda_k$ - вспомогательные неопределенные множители Лагранжа.

Аксиома 7. Система из $n+m$ уравнений оптимизации

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_n; \lambda_1, \lambda_m)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,n; \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_n; \lambda_1, \lambda_m)}{\partial \lambda_k} = 0,\ k = 1,m. \end{cases} \tag{4}$$

может быть представленной в канонической форме вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_1(x_1, x_n; \lambda_1, \lambda_m)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial L_2(x_1, x_n; \lambda_1, \lambda_m)}{\partial x_i},\ i = 1,n \\ G_k(x_1, x_n) = G_k^* \end{cases} \tag{5}$$

В дальнейшем систему (5) будем называть первой канонической формой (ПКФ) представления системы уравнений оптимизации. Элементы левой и правой части управлений (5) будет называть типовыми элементами ПКФ (ТЭПКФ), или коротко ТЭ1.

Аксиома 8. Использование ПКФ (5) системы уравнений оптимизации позволяет строить критерии оптимизации в виде сепарабельных аддитивных критериев:

$$F(x_1, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial L_1(x_1, x_n; \lambda_1, \lambda_m)}{\partial x_i} dx_i + C_{1i} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial L_2(x_1, x_n; \lambda_1, \lambda_m)}{\partial x_i} dx_i + C_{2i} \quad (6)$$

где $C_{1i}, C_{2i}$ - постоянные интегрирования.

Сепарабельность $F(x_1, x_n)$ означает, что все недиагональные элементы матрицы вторых частных производных этой функции равны нулю.

Аксиома 9. Для ограничений вида (5) также удобно использовать сепарабельную форму и аддитивность

$$\sum_{i=1}^{n} G_{ik}(x_i) = G_k^* \quad (7)$$

Задачу оптимизации, в которой критерий оптимизации представлен в виде (6), а ограничения в виде (7), будем называть задачей сепарабельного программирования. Решение прямых задач сепарабельного программирования существует, если $F(x_1, x_n)$ является выпуклой, а $G_k(x_1, x_n)$ – вогнутой функцией [5, с. 216]. Для обратных задач функции $F(x_1, x_n)$ и $G_k(x_1, x_n)$ должны обладать противоположными свойствами. Свойства сепарабельности и аддитивности широко используют в математическом программировании, они позволяют создавать эффективные вычислительные алгоритмы поиска оптимальных решений.

Представление критерия оптимизации в виде (6) назовем второй канонической формой (ВКФ) постановки задачи оптимизации. В двойственных задачах оптимизации при построении вспомогательных функций Лагранжа (3) критерий и одно из ограничений меняются местами. При этом меняются и характер экстремума, и требования выпуклости и вогнутости целевых функций и ограничений. Слагаемые суммы (6) будем называть типовыми элементами ВКФ (ТЭВКФ) или коротко ТЭ2.

Аксиома 10. Константы $C_{1i}$, $C_{2i}$ во ВКФ (6) должны выбираться, исходя из содержания и логического смысла критерия оптимизации и ограничений.

Предлагаемая система аксиом позволяет построить общую аксиоматическую теорию математического моделирования сепарабельных критериев оптимизации и ограничений. Она основана на выборе типовых элементов канонических форм (5), (6) и методах сепарабельного программирования. Параметры канонических форм играют роль параметров семейства оптимальных решений, их удобно использовать как параметры условий функционирования рассматриваемой системы, например, как параметры среды (внешнего окружения) или как параметры, которые характеризуют взаимодействия рассматриваемой системы с другими системами.

Для классификации типовых элементов первой канонической формы (5) полезно использовать методы аналитической и дифференциальной геометрии, которые обладают высокой наглядностью. В роли типовых элементов форм могут быть выбраны алгебраические функции (полиномы) $q$-го порядка, показательные, экспоненциальные, тригонометрические, трансцендентные и другие.

Рассмотрим примеры иллюстративного характера, которые раскрывают основные достоинства и недостатки предлагаемой аксиоматической теории математического моделирования критериев оптимизации и ограничений.

Пример 1. Рассмотрим простейший случай, когда $n=1$, $m=0$. Это значит, что в роли критерия оптимальности выбирается функция одной управляемой переменной, а ограничения отсутствуют. Предположим, что первый типовой элемент $F_1'(x)$ является полиномом нулевого порядка:

$$F_1'(x, a_{10}) = a_{10} \tag{8}$$

а второй типовой элемент $F_2'(x, a_{21}, a_{20})$ является полиномом первого порядка:

$$F_2'(x, a_{21}, a_{20}) = a_{21}x + a_{20} \tag{9}$$

Покажем вид канонической формы (5) уравнения оптимизации, вид канонической формы (6) критерия оптимальности, построим математическую модель критерия, найдем оптимальное значение $x_{opt}$ управляемой переменной и экстремальное значение критерия. Исследуем вид экстремума в зависимости от параметров $a_{10}, a_{20}, a_{21}$ типовых элементов формы (5).

В соответствии с (5) уравнение оптимизации имеет вид:

$$a_{10} = a_{20} + a_{21}x \tag{10}$$

Решая это уравнение относительно $x$, получим оптимальное значение управляемой переменной

$$x_{opt} = \frac{a_{10} - a_{20}}{a_{21}} \tag{11}$$

С помощью второй канонической формы (6) определим математическую модель критерия:

$$F(a_{10}, a_{20}, a_{21}, x) = a_{10}x + c_{11} - a_{20}x - a_{21}\frac{x^2}{2} - c_{21} =$$

$$= -a_{21}\frac{x^2}{2} - (a_{20} - a_{10})x - (c_{21} - c_{11}) \tag{12}$$

Из анализа выражения (12) следует, что вторая каноническая форма (6) критерия является, как и следовало ожидать, полиномом второго порядка, экстремумы которого определяют параметры первой канонической формы (5). Таким образом, если первая каноническая форма является линейной и содержит сочетание полиномов нулевого и первого порядка, то вторая каноническая форма (6) для критерия оптимальности является полиномом второго порядка. Следовательно, первые канонические формы типа (12) порождают класс задач квадратического программирования.

Линейная аппроксимация первых канонических форм уравнений оптимизации обладает относительно широкими возможностями для моделирования задач линейного и нелинейного программирования. В этом случае линейная каноническая форма включает 4 параметра $a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}$ и позволяет вариацией сочетаний этих параметров как морфологических параметров формы аппроксимировать многие классы критериев: среднеквадратические критерии, критерии максимального правдоподобия и другие.

Найдем экстремальные значения критерия оптимальности (12) при $x = x_{opt}$ (11). Подставим значения $x_{opt}$ из (11) в (12), получим:

$$F_{ext}(a_{10},a_{20},a_{21},x_{opt}) = -a_{21}\frac{(a_{10}-a_{20})^2}{2a_{21}^2} + \frac{(a_{10}-a_{20})^2}{a_{21}} - (C_{21}-C_{11}) =$$

$$= \frac{(a_{10}-a_{20})^2}{2a_{21}} - (C_{21}-C_{11}) \quad (13)$$

Чтобы уточнить вид экстремума, выполним дифференцирование первой канонической формы по управляемой переменной $x$, получим значения второй производной критерия:

$$F''(x) = a_{21} \quad (14)$$

Следовательно, значение параметра $a_{21}$ ПКФ (5) определяет вид экстремума. Если

$$a_{21} > 0, \quad (15)$$

то экстремум является минимумом:

$$F_{ext}(a_{10},a_{20},a_{21},x_{opt}) = F_{min}(a_{10},a_{20},a_{21},x_{opt}) \quad (16)$$

Если $a_{21} < 0$, (17)

то экстремум является максимумом:

$$F_{ext}(a_{10},a_{20},a_{21},x_{opt}) = F_{max}(a_{10},a_{20},a_{21},x_{opt}) \quad (18)$$

Если $a_{21} = 0$ (19)

линейная форма (5) первого порядка вырождается в каноническую форму нулевого порядка (сингулярный случай), квадратическая форма критерия вырождается в линейную форму:

$$F_0(a_{10},a_{20},a_{21}=0,x) = (a_{10}-a_{20})x + c_{11} - c_{21}, \quad (20)$$

которая, как известно из линейного программирования, имеет экстремальные значения критерия лишь на границах области существования $x$.

Чаще всего такие границы задают, исходя из ограничений или требований к допустимому значению критерия. Например, если, как ограничение, задано требуемое значение критерия $F_0^*$, то значение $x_{opt}$ определяют из неравенства

$$(a_{10}-a_{20})x + c_{11} - c_{21} \geq F_0^* \quad (21)$$

Из (21) следует, что

$$x_{opt} \geq \frac{F_0^* - c_{11} + c_{21}}{a_{10} - a_{20}} \quad (22)$$

Таким образом, линейную каноническую форму (5) удобно рассматривать как некоторую переходную форму, которая в предельном смысле связывает между собой задачи линейного и нелинейного программирования. Постоянные интегрирования $c_{11}, c_{21}$ можно рассматривать как некоторые свободные параметры, значения которых выбирают, исходя из конкретного логического смысла и содержания задачи оптимизации.

Пример 2. Предположим, что по логическому смыслу экстремум критерия оптимизации должен быть минимумом и минимальное значение критерия должно быть равно нулю. Тогда $a_{21} \geq 0$ и

$$\frac{(a_{10}-a_{20})^2}{2a_{21}}-(c_{21}-c_{11})=0 \qquad (23)$$

Отсюда разность постоянных интегрирования, которую можно рассматривать как одну постоянную интегрирования, должна иметь значение

$$c_{21}-c_{11}=\frac{(a_{10}-a_{20})^2}{2a_{21}} \qquad (24)$$

Пример 3. Рассмотрим графические решения уравнений оптимизации, представленных в ПКФ (5) для иллюстрации влияния параметров формы (5),(6) на оптимальное решение (11) и поведение экстремума (13) критерия (6). Выберем следующие значения параметров:

$$a_{00}=5;\ a_{20}=2;\ a_{21}=1/2;\ c_{11}=3;\ c_{21}=10\,.$$

Таблица. Результаты расчета численных значений канонических форм (5), (6)

| i | $x$ | $F_1(x)$ | $F_2(x)$ | $F(x)$ | $F_1'(x)$ | $F_2'(x)$ | $F'(x)$ | Особые точки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0 | 3,0 | 10,0 | -7,0 | 5,0 | 2,0 | 3,0 | |
| 2 | 2,0 | 13,0 | 15,0 | -2,0 | 5,0 | 3,0 | 2,0 | |
| 3 | 3,17* | 18,85 | 18,85 | 0,0* | 5,0 | 3,585 | 1,415 | нуль $F(x)$ |
| 4 | 4,0 | 23,0 | 22,0 | 1,0 | 5,0 | 4,0 | 1,0 | |
| 5 | 6,00* | 33,0 | 31,0 | 2,0* | 5,0 | 5,0 | 0,0* | экстремум $F(x)$ |
| 6 | 8,0 | 43,0 | 42,0 | 1,0 | 5,0 | 6,0 | -1,0 | |
| 7 | 8,83* | 47,15 | 47,15 | 0,0* | 5,0 | 6,415 | -1,415 | нуль $F(x)$ |
| 8 | 10,0 | 53,0 | 55,0 | -2,0 | 5,0 | 7,0 | -2,0 | |
| 9 | 12,0 | 63,0 | 70,0 | -7,0 | 5,0 | 8,0 | -3,0 | |

Примечание. Звездочкой обозначены координаты особых точек.

В таблице приведены результаты расчета численных значений типовых элементов канонических форм (5) и (6) при этих входных данных, указаны особые точки и координаты экстремума.

На рис. 1 *a* показаны графики типовых элементов канонической формы (5): $F_1'(x)$ (1), $F_2'(x)$ (2), $F'(x)$ (3). На рис. 1 *b* показаны графики типовых элементов канонической формы (2.6): $F_1(x)$ (4), $F_2(x)$ (5), $F(x)$ (6). На рисунках приведены четыре из пяти параметров КФ (5), (6).

Пятый параметр

$$a_{21}=F''(x)=\frac{dF_2'(x)}{dx} \qquad (25)$$

представляет собой вторую производную КФ (6) и одновременно первую производную КФ (5). Как известно, он характеризует угол наклона прямой 2 и определяется по формуле:

$$tg\,\alpha=\frac{a_{10}-a_{20}}{x_{opt}}=a_{21} \qquad (26)$$

Параметры $a_{10}$, $a_{20}$, $c_{11}$, $c_{21}$ характеризуют начальные значения КФ (5), (6) при $x=0$. Наглядная геометрическая интерпретация параметров КФ (5), (6) и возможность варьирования сочетаниями их значений придают большую гибкость в описании критериев оптимальности различных видов. По существу, параметры КФ (5), (6) являются морфологическими параметрами математических моделей критериев оптимальности и ограничений, поэтому для конструирования моделей можно широко использовать морфологический метод синтеза и придавать критериям и ограничениям требуемые содержание и форму.

Рис. 1 иллюстрирует КФ (5), (6) для случая, когда необходимо по смыслу обеспечивать максимум критерия, например, максимальный эффект или максимальную прибыль. В то же время, достаточно изменить знак параметра $a_{21}$ (25) и критерий будет иметь минимум.

В рассмотренном примере это
$$F^0(x) = -F(x) = \frac{x^2}{4} - 3x + 7 \qquad (27)$$

который имеет минимум $F_{min} = -2$ при $x_{opt} = -6$. Вершина параболы находится в четвертом квадранте, а ее ветви направлены вверх. Если по логическому смыслу минимальное значение критерия не может быть отрицательным, нулевое или положительное значение критерия обеспечивается выбором параметров $c_{11}, c_{21}$. Разность этих параметров определяет значение в точке $x = x_{opt}$ (см.(13) и рис. 1 *b*).

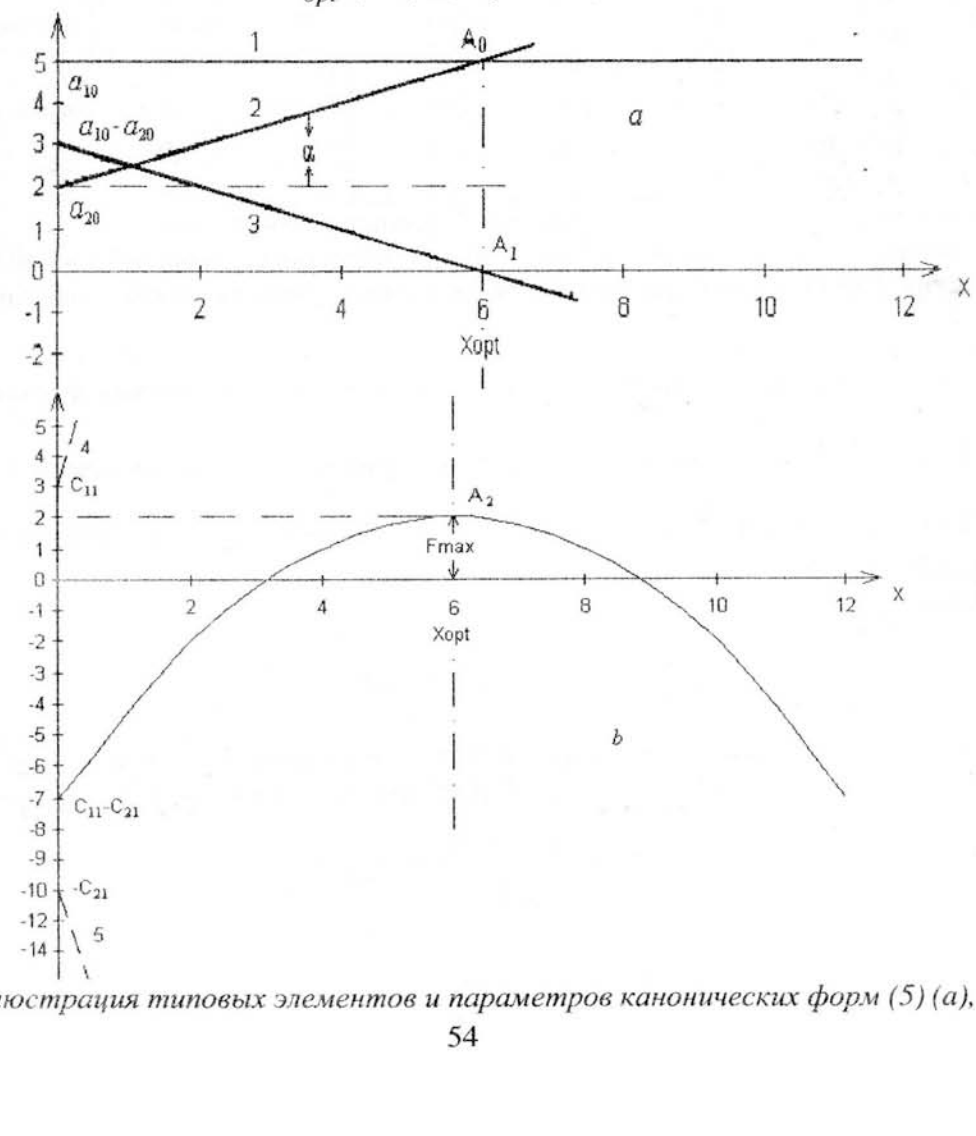


*Рис. 1. Иллюстрация типовых элементов и параметров канонических форм (5) (a), (6) (b)*

**Выводы**

1. Как показывает выполненный анализ, математическое моделирование критериев и ограничений является актуальной ключевой проблемой формализации постановки всех видов задач анализа и синтеза систем, оптимального управления системами, отображения среды, условий функционирования и взаимодействия систем.
2. Для решения этой проблемы предлагается аксиоматическая теория математического моделирования критериев оптимальности и ограничений. Руководящая идея, на основе которой строится эта теория, заключается в использовании того факта, что критерии эффективности и уравнения оптимизации связаны дифференциальными и интегральными преобразованиями.
3. Предложенная аксиоматическая теория позволяет ввести такую форму представления системы уравнений оптимизации (5), названую авторами «первой канонической формой математического моделирования критериев и ограничений», которая с помощью ее интегрального преобразования (6), названого авторами «второй канонической формой математического моделирования критериев и ограничений», позволяет синтезировать морфологическим методом сепарабельные аддитивные критерии и ограничения в виде (6).
4. Такие математические модели критериев и ограничений имеют ряд очевидных достоинств: осмысленный выбор управляемых переменных и параметров для поиска оптимальных решений, построение таких критериев, которые заведомо обеспечивают выполнение необходимых и достаточных условий оптимального управления (синтеза); использование развитых методов сепарабельного программирования; применение морфологического метода синтеза возможных решений; привлечение такого минимального числа свободных параметров (неуправляемых переменных), которые позволяют адекватное отображение, в пределах заданной точности моделирования, условий функционирования и взаимодействия исследуемых систем; возможность использования методов вариационного исчисления для отыскания оптимальных в определенном смысле типовых элементов форм (5), (6) и другие.
5. К выявленным недостаткам предложенной теории можно отнести: трудности интерпретации типовых элементов канонических форм и их параметров для многокритериальных и многопараметрических задач, необходимость отыскания интегральных преобразований для сложных канонических форм; возможности появлений несобственных интегралов в форме (6); сложности интегральных преобразований для иерархических систем управления с замкнутыми обратными связями, и другие.
6. По мере дальнейшего развития аксиоматической теории математического моделирования критериев и ограничений с помощью канонических форм (5), (6) эти недостатки будут все более успешно преодолеваться.

**Список литературы**

1. Герасименко В.А. Защита информации в автоматизированных системах обработки данных. В 2-х кн.: Кн. 1.-Энергоатомиздат, 1994.-400 с.: ил.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971, 342с.
3. Месарович М. Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем: Пер с англ. / Под ред. И.Ф.Шахнова. М.: Мир, 1973, 324с.
4. Гольдштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 228с.
5. Фиакко А., Мак Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир. 1972. 242с.
6. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / Под ред. В.С. Михалевича. -Киев: Наукова думка, 1977, 178с.
7. Игнатов В.А, Маньшин Г.Г, Трайнев В.А. Статистическая оптимизация качества функционирования электронных систем. М.: Энергия, 1974. 264с.

Поступила 26.02.2004