

## ПЕРЕХВАТ ОБЪЕКТОВ ОПЕРАТИВНОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ

В статье рассматривается проблема совместной оптимизации процессов управления и оперативного сопровождения на примере исследования двумерной задачи перехвата цели в однородном силовом поле.

Ключевые слова: цель, объект, перехват, сопровождение.

*Введение.* Совместная оптимизация процессов управления и радиоэлектронной и разведки является важной частью решения задачи оперативного сопровождения одного движущегося объекта другим в условиях неполной информированности о фазовом состоянии системы объекта.

Под оперативным состоянием сопровождением понимается поиск, нахождение и сопровождение объекта (цели) в воздушном пространстве при решении задач в интересах противовоздушной и противоракетной обороны.

Задачи такого рода исследовались с применением минимаксного подхода в работах [1,2], а с использованием стохастического подхода - в работах [3].

При описании процесса оперативного сопровождения (ОС) в рамках детерминированного подхода учесть влияние ошибок измерений, вносимых помех и т.п., например, путём задания детерминированных ограничений, наложенных на тетафазовые координаты, значения которых определяются в ходе ОС и задания закона описывающего изменение этих ограничений во времени.

В работе используется именно такое описание ОС и рассматривается двумерная задача перехвата в однородном гравитационном поле, в котором цель перемещается равномерно и прямолинейно, а динамика преследования описывается уравнениями реактивного движения [4].

При решении находится момент оптимальной остановки процесса ОС преследователя за целью. Исследование задачи проводится на основе необходимых условий оптимальности, изучается зависимость законов управления и структуры решения от начальных условий и энергетических возможностей системы перехвата (СП) объекта ОС.

*Постановка задачи.* Пусть движение объектов происходит в однородном гравитационном поле в вертикальной плоскости ХОУ, начальное положение СП совпадает с точкой О (рис. 1). СП, оставаясь на месте, ведёт наблюдение за целью Е, находясь в начальный момент  $t = t_0$  в точке  $(x_0, y_0)$ . В некоторый момент  $t = t_1$  СП прекращает наблюдение, выключает реактивный двигатель и, управляя величиной вектора тяги  $f$ , а также углом его наклона  $\alpha$ , при  $t = T$  осуществляет перехват цели. На величину момента  $T$  наложено ограничение  $T \leq \tau$ , где  $\tau$  задано.

Специфика задачи состоит в том, что на этапе  $[t_1, T]$  собственно ОС (преследования) наблюдение за целью не проводится.

Следует также подчеркнуть, что момент  $t_1$  и  $T$  выбирается СП и должны быть при решении задачи.

Цель Е представляет собой зону неопределенности, о свойствах которой известно следующее:

1. В любой момент времени  $t \in [O, T]$  зона Е находится внутри окружности А радиуса  $r(t)$ , причём диаметр  $d_E$  зоны Е равен  $2r(t)$ , т.е.

2.

$$d_E = \max_{x \in E, y \in E} \|x - y\| = 2r(t),$$

где:

$$r(t) = \begin{cases} r_0 - at & \text{при } t \in [0, t_1]; \\ r_0 - at_1 + b(t - t_1) & \text{при } t \in [t_1, T]; \end{cases} \quad (1)$$

$\| \cdot \|$  - евклидова норма,  $r_0, a, b$  - заданные положительные константы, причём  $r_0 > at$ .

Зависимость (1) отражает тот факт, что в процессе наблюдения характерный размер  $d_E$  зоны неопределённости уменьшается, а на отрезке  $[t_1, T]$ , когда наблюдение за целью не проводится, величина  $d_E$  растёт.

3. Центр окружности  $A$  при  $t \in [0, t_1]$  движется равномерно и прямолинейно так, что  $x$ -компонента его скорости равна  $V$ , причём  $V > 0$ , а  $y$ -компонента равна  $W$ , величины  $V$  и  $W$  СП известны. Кроме того, предполагается, что начальное положение цели (т.е. положение центра окружности  $A$  в момент  $t_0$ ) удовлетворяет неравенству:

$$y_0 \geq \max(O_1 - W\tau). \quad (2)$$

Под перехватом цели будем понимать попадание СП  $P$  в центр окружности  $\Phi$ . Задача заключается в минимизации величины

$$r(T) = \frac{1}{2} d_E(T).$$

Введём следующие обозначения. Пусть  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  - текущие значения координат СП,  $v_x = v_x(t)$ ,  $v_y = v_y(t)$  - текущее значение компонент его скорости,  $m = m(t)$  - масса СП,  $K = K(t)$  - переменная, играющая роль времени,  $g$  - ускорение свободного падения,  $S$  - скорость истечения продуктов сгорания при работе двигателя ( $g$  и  $S$  - заданные компоненты). Оптимальные значения управлений и фазовых переменных будем обозначать верхним индексом "0". Символ  $\square$  означает "равно по определению", а символ ' - дифференцирование по времени.

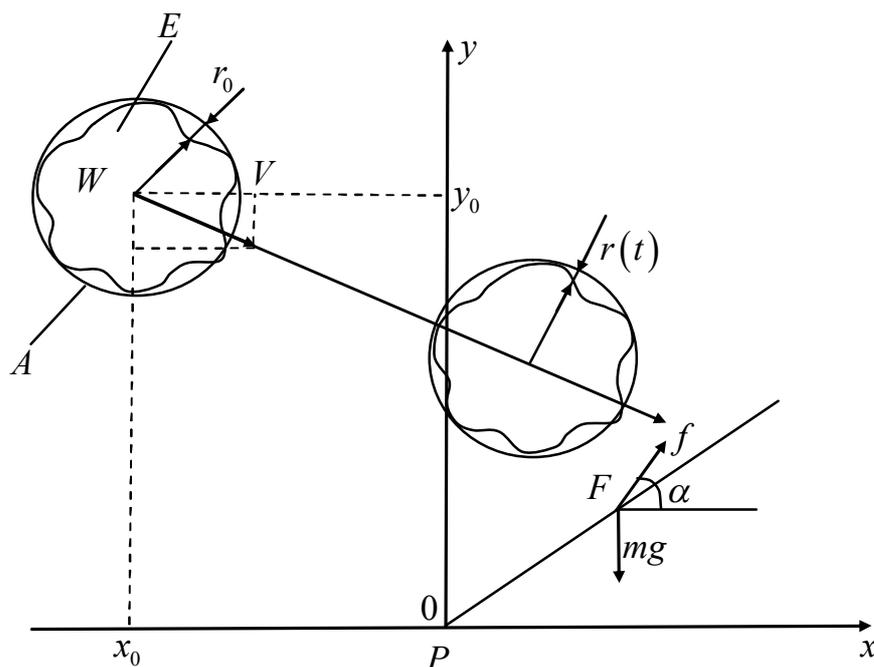


Рис.1. Начальное положение СП

Рассмотрим задачу на отрезке  $[t_1, T]$ , взяв в качестве начальных условий значение фазовых координат в момент  $t_1$ . Тогда математическая модель задачи имеет следующий вид:

1. Уравнение движения при  $t \in [0, t_1]$

$$\text{а) } x' = v_x, \quad \text{б) } y' = v_y$$

$$\text{в) } v_x = \frac{f}{m} \cos \alpha, \quad \text{г) } v_y' = \frac{f}{m} \sin \alpha - g$$

$$\text{д) } r' = b \quad \text{е) } m' = \frac{f}{S} \quad \text{ж) } K' = 1$$

2. Граничные условия (при  $t = t_1$  и при  $t = T$ )

$$x(t_1) = 0, v_x(t_1) = 0, m(t_1) = m_0, K(t_1) = t_1, \quad (4)$$

$$y(t_1) = 0, v_y(t_1) = 0, r(t_1) = r_0 - dt_1;$$

$$x(T) = x_0 + VT, y(T) = y_0 + WT. \quad (5)$$

3. Ограничение на управление

$$0 \leq f \leq F,$$

где  $F$  - задано, причём  $m_0 g < F < m_0 \frac{S}{\tau}$ .

4. Ограничение  $T \leq \tau$  преобразуется к виду

$$K(T) \leq \tau \quad (6)$$

5. Критерий

$$G = r(T) \rightarrow \min_{f, \alpha}. \quad (7)$$

*Основная часть.* Поскольку правые части уравнений (3) и функция  $G$  являются гладкими функциями от фазовых координат и управлений, то для данной задачи применимы необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума [5,6].

Рассмотрим функцию Гамильтона для данной задачи:

$$H(\lambda, f, \alpha, v_x, v_y, m) = \lambda_1 v_x + \lambda_2 v_y + \lambda_3 \frac{f}{m} \cos \alpha + \lambda_4 \left( \frac{f}{m} \sin \alpha - g \right) + \lambda_5 b - \lambda_6 \frac{f}{S} + \lambda_7,$$

где  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_7)$  - вектор сопряженных переменных, удовлетворяющий следующей системе уравнений:

$$\text{а) } \lambda_1' = 0, \quad (\lambda_1 = \text{const} \square C_1),$$

$$\text{б) } \lambda_2' = 0, \quad (\lambda_2 = \text{const} \square C_2),$$

$$\text{в) } \lambda_3' = -\lambda_1,$$

$$\text{г) } \lambda_4' = -\lambda_2, \quad (8)$$

$$\text{д) } \lambda_5' = 0,$$

$$\text{е) } \lambda_6' = \frac{f}{m^2} (\lambda_3 \cos \alpha + \lambda_4 \sin \alpha),$$

$$\text{ж) } \lambda_7' = 0,$$

кроме того предполагается, что вектор  $\lambda$  не есть нулевым.

Тогда в соответствии с принципом максимума

1. Функция  $H(\lambda^0, f^0, \alpha, v_x^0, v_y^0, m^0)$  достигает максимума на оптимальных управлениях  $f^0$  и  $\alpha^0$ ;
2. В момент  $t = t_1$  и  $t = T$  выполняется условие трансверсальности

$$\left[ \delta G - H \delta t + \lambda_1 \delta x + \lambda_2 \delta y + \lambda_3 \delta v_x + \lambda_4 \delta v_y + \lambda_5 \delta r + \lambda_6 \delta m + \lambda_7 \delta K \right]_{t_1}^T = 0.$$

Так как ограничение на  $\alpha$  отсутствует, условие максимума  $H$  по  $\alpha$  даёт

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= \frac{f}{m} (\lambda_4 \cos \alpha - \lambda_3 \sin \alpha) = 0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} &= -\frac{f}{m} (\lambda_3 \cos \alpha + \lambda_4 \sin \alpha) < 0, \end{aligned}$$

отсюда следует

$$\operatorname{tg} \alpha^0 = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}. \quad (9)$$

Поскольку функция  $H$  линейная по  $f$ , она достигает своего максимума в одной из конечных точек отрезка  $[O, F]$ , т. е.

$$f^0 = \begin{cases} F & \text{при } k_f(t) > 0, \\ O & \text{при } k_f(t) < 0, \end{cases}$$

где  $k_f(t) \square \frac{\sqrt{\lambda_3^2(t) + \lambda_4^2(t)}}{m(t)} - \frac{\lambda_6(t)}{S}$ .

Далее с учетом (4) условие трансверсальности для момента  $t_1$  даёт

$$\lambda_7 - \lambda_5 \alpha = H(T). \quad (10)$$

Из условия трансверсальности для момента  $T$  вытекает, что

$$\lambda_5 = -1, \lambda_3(T) = 0, \lambda_4(T) = 0, \lambda_6(T) = 0, \lambda_1 V + \lambda_2 W = H(T). \quad (11)$$

Из-за наличия ограничения (6) при решении задачи следует рассмотреть два случая:

- а) перехват происходит при  $T = \tau$ ;
- б) при  $T < \tau$ .

В случае (а) - вариация  $\delta k$  равна нулю и константа  $\lambda_7$  находится из уравнения (11).

В случае (б) - произвольность вариации  $\delta k$  приводит к тождеству  $\lambda_7 \equiv 0$ .

Покажем теперь, что  $f^0$  не может принимать значений, отличных от  $O$  и  $F$ . Действительно, случай  $O < f^0 < F$  означал бы обращение функции  $K_f(t)$  в ноль на некотором отрезке  $[v_1, v_2]$ .

С другой стороны, в силу автономности системы (3) гамильтониан является первым интегралом уравнений движения, тогда на отрезке  $[v_1, v_2]$  существуют два интеграла:

$$H(t) = \lambda_1 v_x + \lambda_2 v_y - \lambda_4 g - b + \lambda_7 = \text{const},$$

$$K_f(t) = 0.$$

Из теоремы Пуассона [7] следует существование ещё двух интегралов:

$$\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_2^2 + \lambda_1^2 = 0.$$

Последнее означает, что  $\lambda_1 \equiv 0$  и  $\lambda_2 \equiv 0$ . Как не трудно заметить (8), обращение  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в ноль влечёт за собой равенство нулю остальных компонентов вектора  $\lambda$ , что противоречит предположению о нулевом характере этого вектора. Таким образом, возможны значения  $f^0$  только  $O$  и  $F$ .

Перейдём теперь к интегрированию систем (3) и (8) при  $t \in [t_1, T]$ . Поскольку  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_6$  в момент  $T$  равны нулю, то интегрирование уравнений (8 в, г, е) даёт:

$$\lambda_3(t) = C_1(T-t), \lambda_4 = C_2(T-t);$$

$$k_f = \frac{S^2}{F} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \ln \frac{m_0 - \frac{F}{S}(t-t_1)}{m_0 - \frac{F}{S}(T-t_1)}. \quad (12)$$

Из последнего равенства вытекает, что  $k_f(t) > 0$  при  $t_1 \leq t < T$ , т. е. на отрезке  $(t_1, T)$   $f^0 \equiv F$  и переключение тяги СП не происходит.

Из (9) и (12) следует, что

$$\text{tg} \alpha^0 = \frac{C_2}{C_1}. \quad (13)$$

Далее (10) и (11) получаем

$$C_1 V + C_2 W = \alpha + \lambda_7. \quad (14)$$

Интегрирование уравнений (3 а-г, е) на отрезке  $t \in [t_1, T]$  приводит к выражениям

$$x(t) = R(t, t_1) \cos \alpha^0, \quad y(t) = R(t, t_1) \sin \alpha^0 - \frac{g}{2}(t-t_1)^2,$$

$$v_x(t) = v \cos \alpha^0, \quad v_y(t) = v \sin \alpha^0 - g(t-t_1),$$

$$m = m_0 - \frac{F}{S}(t-t_1),$$

где использованы обозначения

$$v = v(t, t_1) = -S \ln \left( 1 - \frac{F}{m_0 S}(t-t_1) \right),$$

$$R(t, t_1) = \frac{S^2 m_0}{F} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{F}{m_0 S}(t-t_1) \right) \times \left( \ln \left( 1 - \frac{F}{m_0 S}(t-t_1) \right) - 1 \right) \right].$$

В момент  $t = T$  должны выполняться условия (5), т. е.

$$\begin{aligned}x_0 + VT &= R(T, t_1) \cos \alpha^0, \\ y_0 + WT &= R(T, t_1) \sin \alpha^0 - \frac{g}{2}(T - t_1)^2.\end{aligned}\quad (15)$$

С учётом выражения для  $v_x(T)$  и  $v_y(T)$  из уравнений (10) и (11) вытекает

$$\frac{a+b}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = v(t_1, T) - g(T - t_1) \sin \alpha^0. \quad (16)$$

В случае (а) уравнения (13)-(16) вместе с равенством  $T = \tau$  образуют систему уравнений для нахождения неизвестных  $C_1, C_2, \alpha^0, t_1, \lambda_7$ , а в случае (б) когда  $\lambda_7 = 0$ , те же уравнения служат для отыскания  $C_1, C_2, \alpha^0, t_1, T$ .

После исключения  $C_1$  и  $C_2$  из уравнений (15) можно определить значение угла  $\alpha^0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha^0 = \frac{y_0 + WT + \frac{g}{2}(T - t_1)^2}{x_0 + VT}. \quad (17)$$

Из системы (15) получаем следующее соотношение:

$$R^2(T, t_1) = (x_0 + VT)^2 + \left( y_0 + WT + \frac{g}{2}(T - t_1)^2 \right)^2. \quad (18)$$

В случае (а) уравнение (18) позволяет найти момент  $t_1$  выключения двигателя СП.

Наконец, из уравнения (16) в случае (б) вытекает

$$V^* \cos \alpha^0 + W^* \sin \alpha^0 = v(T, t_1), \quad (19)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}V^* &= V \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \\ W^* &= W^*(T, t_1) = W \left( 1 + \frac{b}{a} \right) + g(T - t_1).\end{aligned}$$

В случае (б) искомые моменты  $T, t_1$  и угол  $\alpha^0$  находится из уравнений (17)-(19).

Перейдём теперь к определению структуры решения для различных начальных условий  $(x_0, y_0)$ . Целью анализа является отыскание таких множеств значений  $(x_0, y_0)$  при которых:

1) перехват в принципе возможен, т.е. найденные моменты таковы, что  $0 \leq t_1 \leq T, T \leq \tau$ ;

2) имеет место случай (а), т.е.  $t_1 \leq T, T = \tau$ ;

3) имеет место случай (б), т.е.  $t_1 \leq T, T < \tau$ .

Преобразуем (18) к виду  $F_1(t_1) = 0$ , где

$$F_1(t_1) \square R(T, t_1) - \sqrt{(x_0 + VT)^2 + \left[ y_0 + WT + \frac{g}{2}(T - t_1)^2 \right]^2}.$$

Функция  $F_1(t_1)$  непрерывна и монотонна на отрезке  $[O, T]$ , причём всегда  $F_1(T) \leq 0$ , поэтому для существования на данном отрезке единственного решения уравнения  $F_1(t_1) = 0$  необходимо выполнить условие  $F_1(0) \geq 0$  или

$$R^2(T, O) \geq (x_0 + VT)^2 + \left( y_0 + WT + \frac{g}{2}T^2 \right)^2. \quad (20)$$

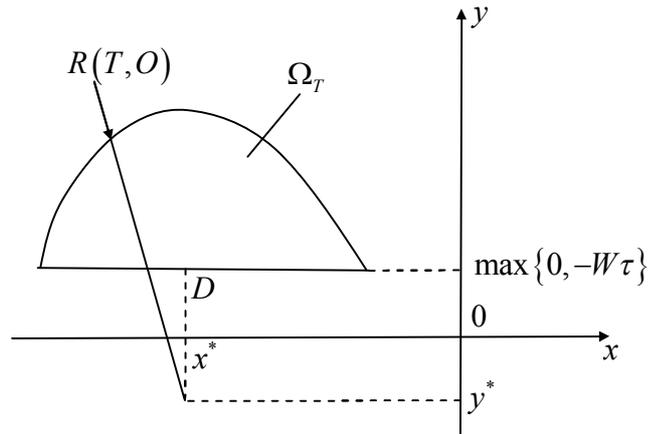


Рис.2. Сегмент круга радиуса  $R(T, O)$

Неравенство (2) и (20) при каждом  $T \in [O, \tau]$  будут определять множество начальных  $(x_0, y_0)$ , при которых  $t_1 \in [O, T]$ . Обозначим это множество через  $\Omega$ . Нетрудно видеть, что оно представляет собой сегмент круга радиуса  $R(T, O)$  с центром в точке  $(x^*, y^*)$  (см. рис. 2), где:

$$x^* = -VT, y^* = -WT - \frac{g}{2}T^2.$$

Объединение  $\Omega_0$  всех сегментов  $\Omega_T : \Omega_0 = \bigcup_{T=0}^{T=\tau} \Omega_T$  даёт искомое множество начальных положений цели, при которых перехват в принципе возможен.

Далее случай (а) будет иметь место при  $(x_0, y_0) \in \Omega_\tau$ . Заметим здесь, что не всегда  $\Omega_0 \subseteq \Omega_\tau$ .

Рассмотрим более подробно структуру области  $\Omega_\tau$ . Для этого выберем некоторые значения моментов  $T, t_1$  и найдём геометрическое место точек (ГМТ), соответствующих этим моментам. Очевидно, при фиксированных  $T$  и  $t_1$  выражения (2) и (20) будут задавать дугу окружности, являющуюся искомым ГМТ.

На таких дугах значение функционала (7), как функция начальных условий, будет постоянным. Максимальное значение  $G_{\max}$  этот функционал достигает на дуге соответствующей  $T = \tau, t_1 = 0$ , при этом  $G_{\max} = r_0 + b\tau$ . Минимальное значение  $G_{\min}$  достигается в точке  $D$  (рис. 2), которая соответствует  $T = \tau, t_1 = \tau$  и  $G_{\min} = r_0 - a\tau$ .

Теперь перейдём к нахождению области фазового пространства, где имеет место случай (б) т.е. область  $\Sigma$ , в которой существует решение уравнений (17)-(19), что принадлежит множеству  $\{0 \leq t_1 \leq T, T < \tau\}$ .

$$y_0 + WT + \frac{g}{2}(T - t_1) = \frac{V^*}{W^*}(x_0 + VT) + \frac{v(T, t_1)}{W^*}R(T, t_1). \quad (21)$$

Это уравнение при заданных значениях моментов  $T$  и  $t_1$  определяет прямую на плоскости  $XOY$ . Тогда область  $\Sigma$  можно определить как объединение множества  $\Omega_0/\Omega_\tau$  и множества точек пересечения прямых (21) и дуг, заданных уравнением (18) и неравенством (2) при  $(t_1, T) \in \{t_1 : 0 \leq t_1 \leq T, T : T < \tau\}$ . На рис. 3 это множество обозначено через  $AB$ , а множество  $\Omega_0/\Omega_\tau$  - через  $B$ .

Граница  $L$  области  $\Sigma$  определяется как ГМТ пересечения прямых (21) и дуг  $\{(2), (18) \text{ при } T = \tau \text{ и } t_1 \in [0, \tau]\}$ . Другими словами кривая  $L$  состоит из точек, в которых имеет место решение в случае (б), такое что  $T = \tau, t_1 \in [0, \tau]$ . Тогда  $D$  всегда принадлежит границе  $L$ . Параметрическое уравнение кривой  $L$  легко найти, решив систему (18), (21) относительно  $x_0, y_0$ , тогда

$$\begin{aligned} x_0 &= -V_\tau + \frac{V^*v \pm W^*\sqrt{W^{*2} + V^{*2} + v^2}}{W^{*2} + V^{*2}}R(\tau, t_1), \\ y_0 &= -W_\tau - \frac{g}{2}(\tau - t_1)^2 + \frac{W^*v \pm W^*\sqrt{V^*W^{*2} + V^{*2} + v^2}}{W^{*2} + V^{*2}}R(\tau, t_1), \\ y_0 &\geq \max(0, -W_\tau), \end{aligned} \quad (22)$$

параметром здесь является значение момента  $t_1$ , изменяющееся от 0 до  $\tau$ . В (22) аргументы функций  $v$  и  $W^*$  совпадают с аргументами  $R(\tau, t_1)$ .

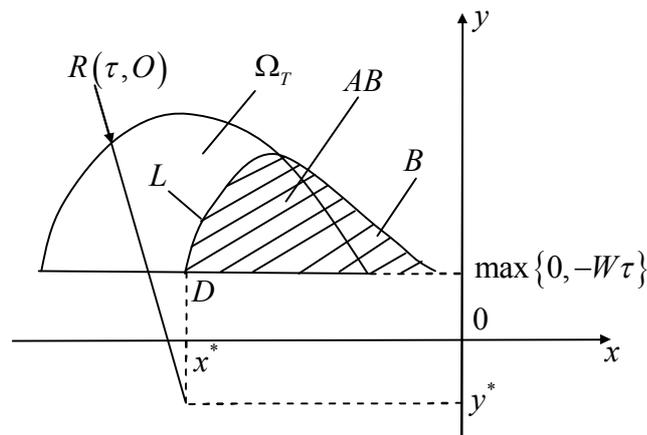


Рис.3. Определение области  $\Sigma$

Теперь рассмотрим множество  $\sum \square \Omega_\tau \cap \sum$ . Из предыдущих рассуждений следует, что в области  $\Sigma$  имеет место как случай (а), так и случай (б). Другими словами, при  $(x_0, y_0) \in \sum$  необходимые условия оптимальности не позволяют одинаково определить моменты  $T, t_1$ , при которых функционал (7) достигает минимума.

Докажем, что в области  $\Sigma$  случай (б) приводит к меньшему значению функционала, чем случай а. С этой целью для каждой точки из  $\Sigma$  определим значение функционал  $G_a$ , соответствующее случаю (а), и значение  $G_b$  соответствующее случаю (б). Из определения границы  $L$  вытекает, что во всех её точках  $G_a = G_b$ . Рассмотрим точку  $K_1$ , принадлежащую  $L$  и находящуюся на дуге окружности  $O_1$  радиуса  $R(\tau, t_1)$  с центром в точке  $\left(-W\tau, -W\tau - \frac{g}{2}(\tau - t_1)^2\right)$  (рис. 4). Дадим координаты  $x_{K_1}, y_{K_2}$  точки  $K_1$  приращение  $\Delta x > 0, \Delta y$ , чтобы полученная точка  $K_2$  находилась внутри области  $\Sigma$  и лежала на окружности  $O_1$ . Поскольку  $K_2 \in O_1$ , то  $G_a(K_2) = G_a(K_1)$ , где запись  $G_a(K_2)$  означает, что функционал  $G_a$  вычисляется при  $x_0 = x_{K_2}, y_0 = y_{K_2}$ .

Оценим значения функционала  $G_b$  в точке  $K_2$ . Из уравнения окружности  $O_1$  следует связь между приращением  $\Delta x$  и  $\Delta y$ :

$$\Delta y = -\Delta x \frac{x_{K_1} + v_\tau}{y_{K_1} + W\tau + \frac{g}{2}(\tau - t_1)^2}.$$

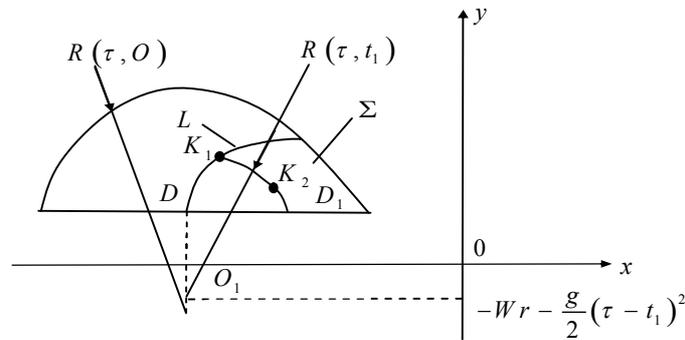


Рис.4. Определение точки  $K_1$ ,

Найдём теперь приращение моментов  $T$  и  $t_1$  при переходе из точки  $K_1$  в точку  $K_2$ :  $\Delta T = T - \tau, \Delta t_1 = t_1^* - t_1$ , где  $T$  и  $t_1^*$  - решение системы (17)-(19) при  $x_0 = x_{K_2}, y_0 = y_{K_2}$ . Считая приращение  $T$  и  $t_1$  малыми по сравнению с  $\tau$  и  $t_1$ , найдём приближенное решение уравнения (18). Для этого разложим правую и левую часть (22) по приращениям моментов и координат до членов первого порядка малости. Имеем

$$R(\tau, t_1)v(\tau, t_1)(\Delta T - t_1) = \Delta T \left[ V(x_0 + V\tau) + (W + g(\tau - t_1)) \times \left( y_0 + W\tau + \frac{g}{2}(\tau - t_1^2) \right) \right] - \Delta t_1 g(\tau - t_1) \times \left[ y_0 + W\tau + \frac{g}{2}(\tau - t_1)^2 \right].$$

Использование равенства (19) позволяет упростить это выражение и получить в первом приближении связь между  $\Delta T$  и  $\Delta t_1$  для внутренних точек области  $\Sigma$ :

$$\Delta t_1 = -\Delta T \frac{ba^{-1}}{1 + ba^{-1}}.$$

В точке  $K_2$  функционал  $G_b$  приближенно равен

$$G_b(K_2) = G_b(K_1) + b(\Delta T - \Delta t_1) - a\Delta t_1.$$

В точке  $K_1$  момент  $T$  равен  $\tau$ , поэтому в точке  $K_2$ , отличной от  $K_1$  и не принадлежащей границе  $L$ , значение момента  $T$  может быть только меньшим, чем  $\tau$ , т.е.  $\Delta T < 0$ . Тогда  $G_b(K_2) < G_a(K_2)$ , и для точек вблизи границы  $L$  утверждение доказано. Покажем теперь, что для всех внутренних точек области  $\Sigma$  выполняется неравенство  $G_b < G_a$ . Предположим противное, т.е. пусть существует множество точек внутри  $\Sigma$ , такое, что при  $(x_0, y_0)$ , принадлежащих этому множеству, имеет место неравенство  $G_b > G_a$ . Но тогда в силу непрерывности функционала внутри области  $\Sigma$  должны существовать точки, где  $G_b = G_a$ . Однако все точки, где  $G_b = G_a$ , описывается уравнением (22), задающими границу  $L$ . Отсюда следует, что внутри области  $\Sigma$  нет точек, в которых  $G_b < G_a$ . Таким образом, для всех  $(x_0, y_0) \in \Sigma$  случай (б) даёт меньшее значение функционала (7) по сравнению с случаем (а), что и требовалось доказать.

Окончательное разбиение фазового пространства на области показано на рисунке 5. Здесь область, где имеет место случай (а), обозначена через А и соответственно через В обозначена область, где существует случай (б). Области А и В, а также граница  $L$  на рисунке 5 построены для следующих числовых значений:  $F = 1000\text{Н}$ ,  $V = 200\text{м/с}$ ,  $\tau = 10\text{с}$ ,  $m_0 = 20\text{кг}$ ,  $W = 0\text{ м/с}$ ,  $S = 800\text{ м/с}$ ,  $b/a = 1$ .

Отметим одну особенность схемы разбиения фазового пространства, показанной на рисунке 5. Область В не является односвязной и состоит из двух частей. При этом в области  $MNO$  перехват при  $T = \tau$  (т.е. случай (а)) невозможен в принципе, так как все точки из  $MNO$  не принадлежат к  $\Omega_\tau$ . Физически это означает, что при близких начальных положениях цели и системы перехвата к моменту  $T = \tau$  будет находится вне пределов досягаемости СП, поэтому перехват нужно проводить при  $T < \tau$ . В области же, ограниченной кривой  $L$ , возможен как случай (а), т.е. перехват при  $T = \tau$ , так и случай (б) (перехват при  $T < \tau$ ). Однако, как показано, перехват при  $T < \tau$  обеспечивает наименьшее значение функционала (7) во всех точках этой области.

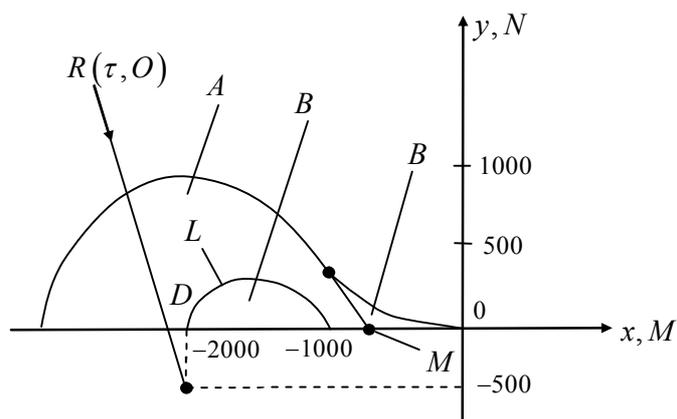


Рис.5. Схема разбиения фазового пространства

**Выводы.** Проведённые исследования показали, что при любых начальных положениях цели и системы перехвата при постоянном оперативном сопровождении её перехват нужно проводить в области  $\Sigma$  для всех случаев.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределённости: гарантирование результата в задачах управления и идентификации / В.М. Кунцевич. - К.: Наукова думка, 2006. - 264 с.

2. Костевич Л.С. Теория игр. Исследование операций / Л.С. Костевич, А.А. Ланко - Минск: Высшая школа, 1982. - 231 с.
3. Висильев В.В. Моделирование задачи оптимизации и дифференциальных игр / В.В. Васильев, В.Л. Баранов. - К.: Наукова думка, 1989. - 286 с.
4. Летов А.М. Динамика полётов и управления / А.М. Летов. - М.: Наука, 1985. - 342 с.
5. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска / Хеллман О. - М.: Наука, 1985. - 248 с.
6. Кунцевич В.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления: игровой подход / В.М. Кунцевич. - К.: Наукова думка, 1985. - 248 с.
7. Азаренко Е.В. - Проектирование автоматизированных систем управления на компьютерных сетях / Е.В. Азаренко, Б.М. Герасимов, Б.П. Шохин. - Севастополь: Гос. океанариум, 2007. - 272 с.

Надійшла: 15.12.2011

Рецензент: д.т.н., проф. Прокопенко І.Г.