УДК 621.372.06

Баранов В.Л., Молодецька К.В., Шевченко О.М.

МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ СИСТЕМОЮ ОДНОМІРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Постановка проблеми. Управління об'єктами з розподіленими параметрами потребує моделювання фізичних процесів в реальному часі. Це може бути виконано шляхом спрощення процесу моделювання засобами ЕОМ на основі застосування чисельно-аналітичних методів розв'язання крайових задач, які на сьогодні недостатньо розвинені і вимагають подальших досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1-7] показав, що чисельно-аналітичні методи моделювання фізичних процесів розробляються на основі інтегральних і диференціальних перетворень математичних моделей. Область застосування методів інтегральних перетворень обмежується дослідженням лінійних математичних моделей [4]. Моделювання фізичних процесів багатомірними диференціальними перетвореннями [5,6] дозволяє моделювати нелінійні процеси, але дуже ускладнює процес моделювання. Відомі чисельно-аналітичні методи моделювання на основі використання одномірних диференціальних перетворень [3] потребують вирішення некоректної задачі у випадку перевищення кількості невідомих параметрів опису фізичного процесу кількості початкових і граничних умов крайової задачі.

Мета статті полягає в розробці методу моделювання фізичних процесів на основі системи одномірних диференціальних перетворень, що дозволяє виключити необхідність вирішення некоректної задачі і цим спростити процес моделювання.

Розглянемо фізичні процеси, які моделюються функцією $u(x,t)$ двох незалежних змінних в області:

$$0 \le |x| \le H_x,\ 0 \le t \le H, \tag{1}$$

де H_x, H_t – задані додатні сталі; t - час; x - просторова змінна.

Обмежимося класом фізичних процесів, які описуються диференціальним рівнянням з частинними похідними у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \tag{2}$$

де f - задана неперервна функція.

Початкові умови для рівняння (2)мають вигляд:

$$u(x,0) = u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = Q(x), \tag{3}$$

де $u_0(x)$, $Q(x)$ - задані функції.

Граничні умови для рівняння (2) задаються у вигляді:

$$\begin{gathered} u(x,t)\big|_{x\in\Gamma} = \alpha(t) \text{ - умови Діріхлє,} \\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\right|_{x\in\Gamma} = \beta(t) \text{ - умови Неймана,} \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial N} + \mu u(x,t)\big|_{x\in\Gamma} = \gamma(t) \text{ - змішані умови,} \end{gathered} \tag{4}$$

де α, β, γ - задані неперервні функції, які визначені на граничній поверхні Γ;

μ - задана стала величина;

$\frac{\partial u}{\partial N}$ - означає похідну, яка взята в точці граничної поверхні Γ в напрямку внутрішньої (чи зовнішньої) нормалі N до неї.

Область змінної x поділимо на два відрізки h, тому $h=\frac{H_x}{2}$. Метод моделювання фізичних процесів побудуємо на основі системи одномірних диференціальних перетворень по змінній x [3]:

$$U(q,t)=\frac{h^q}{q!}\left[\frac{\partial^q u(x,t)}{\partial x^q}\right]_{x=0},\quad u(x,t)=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{x}{h}\right)^q U(q,t); \tag{5}$$

$$\overline{U}(q,t)=\frac{h^q}{q!}\left[\frac{\partial^q u(x,t)}{\partial x^q}\right]_{x=H_x},\quad u(x,t)=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{x-H_x}{h}\right)^q \overline{U}(q,t), \tag{6}$$

де q - цілочисельний аргумент, який приймає значення 0, 1, 2, …, ∞;
$U(q,t)$ - диференціальне зображення функції $u(x,t)$ в точці $x=0$;
$\overline{U}(q,t)$ - диференціальне зображення функції $u(x,t)$ в точці $x=H_x=2h$;
$h=\frac{H_x}{2}$ - додатна стала.

Диференціальні зображення $U(q,t)$, $\overline{U}(q,t)$ прийнято називати диференціальними спектрами [7], а їх значення при фіксованих значеннях цілочисельний аргументів – дискретами диференціальних спектрів.

Переведемо диференціальне рівняння з частинними похідними (2) в область зображень диференціальними перетвореннями (5) і (6):

$$U(q+2,t)=\frac{h^2}{(q+1)(q+2)}F\left[q,t,U(q,t),\frac{q+1}{h}U(q+1,t),\frac{dU(q,t)}{dt},\right.$$
$$\left.\frac{q+1}{h}\frac{dU(q+1,t)}{dt},\frac{d^2U(q,t)}{dt^2}\right]; \tag{7}$$

$$\overline{U}(q+2,t)=\frac{h^2}{(q+1)(q+2)}\overline{F}\left[q,t,\overline{U}(q,t),\frac{q+1}{h}\overline{U}(q+1,t),\frac{d\overline{U}(q,t)}{dt},\right.$$
$$\left.\frac{q+1}{h}\frac{d\overline{U}(q+1,t)}{dt},\frac{d^2\overline{U}(q,t)}{dt^2}\right]. \tag{8}$$

де F і $\overline{F}$ - зображення функції f на основі диференціальних перетворень (5) і (6) відповідно.

Диференціальне рівняння (2) частинними похідними в області зображень набуло вигляду рекурентних виразів (7) і (8), які дають змогу знайти дискрети диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$ послідовно надаючи цілочисельні значення 0,1,2,3,... аргументу q.

Початкові дискрети диференціальних $U(0,t)$, $U(1,t)$ і $\overline{U}(0,t)$, $\overline{U}(1,t)$, які необхідні для реалізації рекурентних обчислень (7) і (8), знайдемо із граничних умов (4) і основних властивостей диференціальних перетворень [5-7]:

$$U(0,t)=u(x,t)\big|_{x=0};\quad U(1,t)=h\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}; \tag{9}$$

$$\overline{U}(0,t)=u(x,t)\big|_{x=H_x};\quad \overline{U}(1,t)=h\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=H_x}. \tag{10}$$

Якщо частина граничних умов у виразах (9), (10) невідома, то їх слід задати в символьному вигляді як невідому функцію часу.

Математичних опис фізичного процесу в області зображень отримуємо шляхом рекурентного обчислення в аналітичному вигляді дискрет диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$ за виразами (7) і (8) на основі початкових дискрет (9), (10) відповідно. У виразах дискрет диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$ є невідомі початкові дискрети у вигляді функцій часу, які треба визначити.

З цією метою застосовуються умови спряження функції $u(x,t)$ і її похідної $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ у точці $x_c = \frac{H_x}{2} = h$. На основі правих виразів диференціальних перетворень (5) і (6) умови спряження набувають вигляду:

$$u(x_c,t) = \sum_{q=0}^{\infty} U(q,t) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \overline{U}(q,t), \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=h} = \sum_{q=0}^{\infty} (q+1) U(q+1,t) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q (q+1) \overline{U}(q+1,t) \tag{12}$$

Якщо врахувати обмежену кількість дискрет диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$, то умови спряження (11) і (12) набувають вигляду:

$$\sum_{q=0}^{n} U(q,t) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \overline{U}(q,t), \tag{13}$$

$$\sum_{q=0}^{n} (q+1) U(q+1,t) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q (q+1) \overline{U}(q+1,t). \tag{14}$$

В роботі [8] доведено, що у випадку врахування обмеженої кількості дискрет диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$ верхня межа похибки оцінюється величиною $2^{-n}\varepsilon$, де n - номер останніх врахованих дискрет диференціальних спектрів, а ε - похибка, яка виникає при врахуванні скінченого числа членів ряду Тейлора в диференціальних перетвореннях (5) і (6). Ця похибка може бути оцінена наближено по Коші і точно за формулою Лагранжа чи Ейлера-Лагранжа [9]. Система (13), (14) має вигляд системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій часу, від яких залежать початкові дискрети $U(0,t)$, $U(1,t)$ і $\overline{U}(0,t)$, $\overline{U}(1,t)$диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$. З метою визначення невідомих дискрет диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$застосуємо одномірні диференціальні перетворення по змінній t:

$$U(q,k) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{\partial^k U(q,t)}{\partial t^k}\right]_{t=0}; \; U(q,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H}\right)^k U(q,k), \tag{15}$$

де H - задана додатна стала, яка звичайно дорівнює відрізку часу процесу, що моделюється; k - цілочисельний аргумент.

Переведемо рівняння (13), (14) в область зображень на основі одномірних диференціальних перетворень (15):

$$\sum_{q=0}^{n} U(q,k) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \overline{U}(q,k), \tag{16}$$

$$\sum_{q=0}^{n} (q+1) U(q+1,k) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q (q+1) \overline{U}(q+1,k). \tag{17}$$

Система рівнянь (16), (17) надає змогу визначити усі дискрети $U(q,k)$ і $\overline{U}(q,k)$, якщо враховувати початкові умови (3) і перевести їх в область зображень диференціальними перетвореннями (5), (6) і (15):

$$U(q,0) = \frac{h^q}{q!}\left[\frac{\partial^q u(x,0)}{\partial x^q}\right]_{x=0}; \; \overline{U}(q,0) = \frac{h^q}{q!}\left[\frac{\partial^q u(x,0)}{\partial x^q}\right]_{x=H_x}, \tag{18}$$

$$U(q,1) = HQ(q); \; \overline{U}(q,1) = H\overline{Q}(q), \tag{19}$$

де $Q(q)$ - зображення (5) функції $Q(x)$ в точці $x = 0$;

$\overline{Q}(q)$ - зображення (6) функції $Q(x)$ в точці $x = H_x$.

У випадку лінійного диференціального рівняння (2) система (16), (17) із врахуванням (18), (19) має вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих дискрет $U(q,k)$ і $\overline{U}(q,k)$.

Після визначення дискрет $U(q,k)$ і $\overline{U}(q,k)$ на основі правого виразу (15) розраховуються дискрети диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$:

$$U(q,t)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{t}{H}\right)^{k}U(q,k), \tag{20}$$

$$\overline{U}(q,t)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{t}{H}\right)^{k}\overline{U}(q,k). \tag{21}$$

Далі, на основі диференціальних спектрів (20), (21) і правих виразів (5), (6) відновлюється модельований процес в області оригіналів у вигляді:

$$u(x,t)=\sum_{q=0}^{n}\left(\frac{x}{h}\right)^{q}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{t}{H}\right)^{k}U(q,k),\ \text{при}\ x\in[0,h]; \tag{22}$$

$$u(x,t)=\sum_{q=0}^{n}\left(\frac{x-H_x}{h}\right)^{q}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{t}{H}\right)^{k}\overline{U}(q,k),\ \text{при}\ h\in[h,H_X=2h]. \tag{23}$$

Запропонований метод моделювання фізичних процесів на основі одномірних диференціальних перетворень (5), (6), (15) описує фізичних процес в області (1) у вигляді (22) і (23), який не містить невідомих параметрів, що потребують визначення. Тому реалізація запропонованого методу не потребує вирішення некоректної задачі, що виникає у випадку перевищення числа невідомих параметрів кількості початкових і граничних умов крайової задачі при реалізації методу моделювання фізичних процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів [3].

Це дозволяє спростити процес моделювання шляхом зменшення об'єму обчислень у порівнянні із відомим методом [3], який вимагає розв'язання некоректної задачі. Виконаємо порівняння запропонованого методу із методом моделювання на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів [3] на прикладі.

Розглянемо моделювання нестаціонарного процесу в однорідному стержні довжиною $l=1$, який описується рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\ 0<x<l=1,\ 0<t\le H, \tag{24}$$

при початкових

$$u(x,0)=\frac{chx}{sh1},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=-\frac{chx}{sh1}, \tag{25}$$

і граничних умовах

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l=1}=e^{-t}. \tag{26}$$

Цей приклад має точний аналітичний розв'язок крайової задачі (24) – (26):

$$u(x,t)=\frac{chx}{sh1}e^{-t}. \tag{27}$$

Переведемо диференціальне рівняння з частинними похідними (24) в область зображень диференціальними перетвореннями (5) і (6):

$$U(q+2,t)=\frac{h^2}{(q+1)(q+2)}\frac{d^2U(q,t)}{dt^2}, \tag{28}$$

$$\overline{U}(q+2,t)=\frac{h^2}{(q+1)(q+2)}\frac{d^2\overline{U}(q,t)}{dt^2}, \tag{29}$$

де $h=\frac{l}{2}=0{,}5$.

Початкові дискрети диференціальних спектрів $U(0,t)$ і $\overline{U}(0,t)$ при граничних умовах (26) невідомі. Тому задамо їх у символьному вигляді:

$$U(0,t)=\varphi(t),\ \overline{U}(0,t)=\psi(t). \tag{30}$$

Граничні умови (26) дають змогу знайти за виразами (9), (10) перші дискрети диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$ при $q=1$:

$$U(1,t)=0\,,\ \overline{U}(1,t)=he^{-t}\,. \tag{31}$$

Для порівняння запропонованого методу із відомим [3] обмежимося кількістю дискрет $n=3$. Надаючи цілочисельному аргументу значення $q=0{,}1$ з рекурентних виразів (28), (29) за початковими дискретами (30) і (31) знайдемо дискрети диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$ в аналітичному вигляді:

$$U(0,t)=\varphi(t),\ U(1,t)=0\,,\ U(2,t)=\frac{h^2}{2}\ddot{\varphi}(t),\ U(3,t)=0\,; \tag{32}$$

$$\overline{U}(0,t)=\psi(t),\ \overline{U}(1,t)=he^{-t}\,,\ \overline{U}(2,t)=\frac{h^2}{2}\ddot{\psi}(t),\ \overline{U}(3,t)=\frac{h^3}{6}e^{-t}\,. \tag{33}$$

де позначено $\ddot{\varphi}(t)=\dfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$; $\ddot{\psi}(t)=\dfrac{d^2\psi(t)}{dt^2}$.

Умови спряження (13), (14) при диференціальних спектрах (32), (33) і $n=3$ дають систему звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомої функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$:

$$\begin{cases}\varphi(t)+\dfrac{h^2}{2}\ddot{\varphi}(t)=\psi(t)+\dfrac{h^2}{2}\ddot{\psi}(t)-\left(h+\dfrac{h^3}{6}\right)e^{-t},\\ h\ddot{\varphi}(t)=-h\ddot{\psi}(t)+\left(1+\dfrac{h^2}{2}\right)e^{-t}.\end{cases} \tag{34}$$

Застосуємо диференціальні перетворення (15) по змінній t і переведемо систему звичайних диференціальних рівнянь (34) в область зображень:

$$\begin{gathered}\Phi(k)+\frac{h^2(k+1)(k+2)}{2H^2}\Phi(k+2)=\Psi(k)+\frac{h^2(k+1)(k+2)}{2H^2}\Psi(k+2)-\left(h+\frac{h^3}{6}\right)\frac{(-H)^k}{k!}\,;\\ \frac{h(k+1)(k+2)}{H^2}\Phi(k+2)=-\frac{h(k+1)(k+2)}{H^2}\Psi(k+2)+\left(1+\frac{h^2}{2}\right)\frac{(-H)^k}{k!}\,.\end{gathered} \tag{35}$$

Початкові умови (25) згідно виразів (18), (19) в області зображень при $q=0$ мають вигляд:

$$\begin{gathered}U(0,0)=u(x,0)\Big|_{x=0}=\frac{1}{sh1}=U(0,t)\Big|_{t=0}=\Phi(0)\,;\\ \overline{U}(0,0)=u(x,0)\Big|_{x=l=1}=\frac{ch1}{sh1}=\overline{U}(0,t)\Big|_{t=0}=\Psi(0)\,;\\ \Phi(1)=U(0,1)=HQ(0)=-H\frac{chx}{sh1}\bigg|_{x=0}=-\frac{H}{sh1}\,;\\ \Psi(1)=\overline{U}(0,1)=H\overline{Q}(0)=-H\frac{chx}{sh1}\bigg|_{x=l=1}=-H\frac{ch1}{sh1}\,.\end{gathered} \tag{36}$$

Використовуючи значення початкових дискрет з виразу (36) та послідовно надаючи значення цілочисельному аргументу $k=0{,}1$ з системи рівнянь (35) визначимо потрібні дискрети диференціальних спектрів $\Phi(k)$ та $\Psi(k)$:

$$\begin{gathered}\Psi(0)=\frac{ch1}{sh1},\ \Psi(1)=-H\frac{ch1}{sh1},\ \Psi(2)=\frac{H^2}{2h^2}\left[\frac{1-ch1}{sh1}+h+\frac{h^3}{6}+\frac{h}{2}\left(1+\frac{h^2}{2}\right)\right],\\ \Psi(3)=-\frac{H}{3}\Psi(2)\,;\end{gathered} \tag{37}$$

$$\Phi(0)=\frac{1}{sh1}\,,\ \Phi(1)=-\frac{H}{sh1}\,,\ \Phi(2)=-\Psi(2)+\frac{H^2}{2h}\left(1+\frac{h^2}{2}\right), \tag{38}$$

$$\Phi(3) = -\Psi(3) - \frac{H^3}{6h}\left(1 + \frac{h^2}{2}\right).$$

Диференціальні спектри (37) і (38) надають змогу знайти невідомі функції часу $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ за правим виразом (15) при $q = 0$:

$$\psi(t) = \overline{U}(0,t) = \sum_{k=0}^{k=3}\left(\frac{t}{H}\right)^k \Psi(k), \qquad (39)$$

$$\varphi(t) = U(0,t) = \sum_{k=0}^{k=3}\left(\frac{t}{H}\right)^k \Phi(k). \qquad (40)$$

Підстановка функцій часу $\psi(t)$ (39) і $\varphi(t)$ (40) у вирази (32), (33) визначають дискрети диференціальних спектрів $U(q,t)$ і $\overline{U}(q,t)$, на основі яких відновлюється процес в області оригіналів згідно виразів (22), (23).

Порівняємо похибки моделювання фізичного процесу (24) – (26) запропонованим методом з відомими методами, які застосовують одномірні диференціальні перетворення [3].

Дане рівняння при $t = 0{,}5$; $x = 1$ згідно точного розв'язку (27) дає значення $u_m = 0{,}796396$. В [3] наведені дані, згідно яких рішення крайової задачі (24) – (26) в точці $t = 0{,}5$; $x = l = 1$ на основі одного одномірного диференціального спектру дає абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0{,}02$, а на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів похибка має значення $\varepsilon_2 = 0{,}0033$. Рішення крайової задачі (24) – (26) в точці $t = 0{,}5$; $x = l = 1$ запропонованим методом знайдемо за виразами (37), (39) при $H = 0{,}5$; $h = 0{,}5$:

$$u(x,t)\Big|_{\substack{x=l=1\\ t=0,5}} = \psi(t)\Big|_{t=0,5} = \sum_{k=0}^{k=3}\Psi(k) = \frac{0,5ch1}{sh1} + \frac{5}{12}\left(\frac{1-ch1}{sh1} + \frac{77}{96}\right) = 0,79817.$$

Це рішення дає абсолютну похибку $\varepsilon_3 = 0{,}0018$, яка менша похибок моделювання фізичного процесу відомими методами [1-3].

Висновки

Запропоновано метод моделювання фізичних процесів системою трьох одномірних диференціальних перетворень (5), (6), (15). У порівнянні з методом моделювання фізичних процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів [3], запропонований метод виключає необхідність вирішення некоректної задачі. Це дозволяє спростити процес моделювання і зменшити похибку моделювання.

Список літератури

1. *Баранов В.Л.* Моделювання фізичних процесів методом одномірних диференціальних перетворень крайових задач / Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М. // Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. пр. – Вип. 3(14). – К.: НАУ, 2005. – С. 25 – 30.
2. *Баранов В.Л.* Метод моделювання фізичних процесів на основі диференціальних перетворень нелінійних крайових задач / Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М. // Вісник ЖДТУ. – 2007. – № 2 (41). – С. 59 – 65.
3. *Баранов В.Л.* Особливості моделювання фізичних полів і процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів із значною кількістю дискрет / Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецька К.В. // Вісник ДУІКТ. – 2009. – Т. 7, №4. – С. 312 – 322.
4. *Рвачев В.Л.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / Рвачев В.Л., Слесаренко А.П. – Киев: Наукова думка, 1976. – 288 с.
5. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений / Пухов Г.Е. – Киев: Наук. Думка, 1984. – 420 с.
6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Пухов Г.Е. – Киев: Наук. думка, 1986. – 158 с.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели / Пухов Г.Е. – Киев: Наук. Думка, 1990. – 184 с.
8. *Баранов В.Л.* Оцінка похибки моделювання фізичних полів і процесів системою прямих і зворотних диференціальних спектрів / Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецька К.В. // Вісник ЖДТУ. – 2009. – № 3 (50). - С. 71-77.

9. *Трухаев Р.И.* Методы инфлюентного анализа высоких порядков / Трухаев Р.И. – Ленинград: Наука, 1987. – 257с.

Рецензент: Кузнецов Г.В.
Надійшла 25.06.2010