

3. *Беляев Ю. К.* Надежность технических систем: Справочник / Ю. К. Беляев, В. А. Богатырев, В. В. Болотин, под ред. И. А. Ушакова. – М. : Радио и связь, 1985. – 608 с.
4. *Smith J David.* Reliability, maintainability and risk / David j Smith. – Linacre House, Jordan Hill, Oxford, 2001.
5. *Hecht Herbert.* Systems reliability and failure prevention / Herbert Hecht. – Art House, Boston, London, 2004. – 246 p.
6. *Мінін А. В.* Критерії і моделі оцінки живучості комп'ютерної системи / А. В. Мінін, М. Ф. Смирний // Журнал «Інформаційна безпека». – №2 (2). – 2009.
7. *Величко В. В.* Живучесть и качество обслуживания мобильных сетей передачи данных в условиях чрезвычайных ситуаций / В. В. Величко. – С. 1-6.
8. *Подлесный Н. И.* Специальные методы идентификации, проектирования и живучесть систем управления / Н. И. Подлесный, А. А. Рассоха, С. П. Левков. – К. : Выща шк., 1990. – 446 с.
9. *Громов Ю. Ю.* Анализ живучести информационных сетей / Ю. Ю. Громов, Д. Е. Винокуров, Т. Г. Самхарадзе, И. И. Пасечников / Информационные процессы и управление. – 2006. – №1. – С. 138-155.
10. *Annlee A. Hines.* Planning for survivable networks / Hines A. Annlee. – Wiley Publishing, 2002. – 220 p.
11. *Liu Yu.* Spare capacity allocation: model, analysis and algorithm / Yu Liu. – University of Pittsburg, 2001. – 132 p.
12. *Хорошко В. А.* Методы и средства защиты информации / В. А. Хорошко, А. А. Чекатков. – К. : Издательство Юниор, 2003. – 503 с.
13. *Домарев В. В.* Безопасность информационных технологий. Методология создания систем защиты / В. В. Домарев. – К. : ООО «ДС», 2001. – 688 с.

Надійшла 16.02.2010

УДК 004.056.5:518

Кобозева А.А.

## РАЗНОСТНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ ВИЗУАЛЬНОГО ИСКАЖЕНИЯ ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ НОРМЕ

В настоящий момент во всем мире назрел вопрос разработки новых и совершенствования существующих методов защиты информации, представленной в цифровом виде, среди которых важное место занимают методы цифровой стеганографии [1]. Общей чертой этих методов является сокрытие секретной, или дополнительной, информации путем встраивания ее в не привлекающий внимание объект – контейнер, или основное сообщение. Полученный объект открыто транспортируется адресату по каналу связи или хранится в таком виде.

Основной задачей любого стеганографического алгоритма является обеспечение сохранения в секрете наличия тайного канала передачи информации, другими словами, сгенерированная стеганографическим методом информационная система — стеганосообщение — необходимо должна обладать свойством, называемым *надежностью восприятия*: искажение контейнера за счет погружения в него секретной информации не должно быть заметно [2].

Не ограничивая общности рассуждений, для простоты изложения далее в качестве основного сообщения рассматривается цифровое изображение в градациях серого, матрица которого обозначается  $F$ .

Преобразование контейнера за счет погружения в него дополнительной информации – стеганопреобразование, независимо от способа и области этого погружения, можно представить [2] как возмущение  $\Delta F$  матрицы  $F$ . Результатом стеганопреобразования является стеганосообщение с матрицей  $\bar{F} = F + \Delta F$ . В [2] нашла практическое подтверждение следующая гипотеза: чем меньше норма матрицы возмущения  $\|\Delta F\|$ , тем больше вероятность обеспечения надежности восприятия для изображения-

стеганосообщения с матрицей  $F + \Delta F$  при заданном изображении  $F$ . Таким образом, формализация выявлений искажений при стеганопреобразовании приводит к вопросам идентификации малых возмущающих воздействий.

До настоящего времени при анализе уровня визуальных искажений, которые вносятся в контейнер при стеганопреобразовании, широко применяются разностные показатели, основывающиеся на различных модификациях отношения «сигнал-шум» [3], одним из которых является показатель – *качество изображения* (Image Fidelity):

$$IF = 1 - \frac{\|\Delta F\|_F^2}{\|F\|_F^2}, \quad (1)$$

где  $\|\bullet\|_F$  - матричная норма Фробениуса [4], хотя слабые места таких показателей давно известны, например, отсутствие корреляции этих показателей со зрением человека. Это объясняется тем, что все существующие модели зрительного восприятия являются лишь частичным и ограниченным отражением зрительной системы человека в силу ее сложности, а показатели искажения, основанные на таких моделях, информация о которых доступна из открытой печати, все еще остаются несовершенными и достаточно сложными в реализации, не обещая качественных изменений в ближайшее время. В таких условиях возможно улучшение используемых разностных показателей, что является *целью* настоящей работы. Для достижения поставленной цели необходимо решить *задачу* выбора матричной нормы, которая будет наиболее эффективно работать при определении искажений в условиях малых возмущающих воздействий, поскольку используемая до настоящего времени норма Фробениуса не обладает никакими обоснованными преимуществами по сравнению с любой другой матричной нормой.

Поскольку, как показано в [5], любое стеганопреобразование, рассматриваемое как возмущающее воздействие для основного сообщения, представимо и анализируется в виде возмущения спектра и (или) собственных векторов матрицы контейнера, определяемых нормальным спектральным разложением, с вычислительной точки зрения для оценивания визуальных искажений удобно использовать спектральную матричную норму (СМН), не требующую проведения дополнительных вычислений. Действительно, матрицу контейнера (блока контейнера), матрицу стеганосообщения (блока стеганосообщения) можно рассматривать как симметричную матрицу  $F$  [6]. С учетом того, что все элементы  $F$  неотрицательные, из теоремы Фробениуса [7] вытекает, что ее максимальное по модулю собственное значение неотрицательное (если она разложима) или положительное (если она неразложима). Тогда

$$\|F\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(F^*F)} = \max_i |\lambda_i(F)| = \lambda_{\max}, \quad (2)$$

где  $\|\bullet\|_2$  - СМН,  $\lambda_i(F)$  - собственные значения  $F$ ,  $\lambda_{\max}$  - наибольшее собственное значение  $F$ .

Проверим, как ведет себя СМН по сравнению с другими матричными нормами с точки зрения чувствительности к произошедшим малым возмущающим воздействиям.

**Лемма 1.** Пусть  $F$  -  $n \times n$ -матрица. Матричные нормы Фробениуса и СМН эквивалентны с константами эквивалентности 1 и  $n^{1/2}$ , т.е. имеет место неравенство:

$$\|F\|_2 \leq \|F\|_F \leq n^{1/2} \|F\|_2. \quad (3)$$

**Доказательство.** Векторная 2-норма ( $\|\bullet\|_2$ ) и матричная норма Фробениуса связаны соотношением [4]:

$$\|Fz\|_2 \leq \|F\|_F \|z\|_2,$$

где  $z$  — вектор длины  $n$ . Поскольку СМН индуцирована векторной 2-нормой, то

$$\|F\|_2 = \max_{z \neq 0} \frac{\|Fz\|_2}{\|z\|_2} \leq \max_{z \neq 0} \frac{\|F\|_F \|z\|_2}{\|z\|_2} = \|F\|_F,$$

что доказывает левую часть (3).

Пусть вектор  $z^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T$ , тогда

$$\frac{\|Fz^{(1)}\|_2^2}{\|z^{(1)}\|_2^2} = f_{11}^2 + \dots + f_{n1}^2 \leq \max_{z \neq 0} \frac{\|Fz\|_2^2}{\|z\|_2^2}.$$

Аналогично для любого вектора  $z$  вида  $z^{(k)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  имеем:

$$\frac{\|Fz^{(k)}\|_2^2}{\|z^{(k)}\|_2^2} = f_{1k}^2 + f_{2k}^2 + \dots + f_{nk}^2 \leq \max_{z \neq 0} \frac{\|Fz\|_2^2}{\|z\|_2^2}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Просуммировав неравенства (4) для всех  $k = \overline{1, n}$ , получим:

$$\sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 \leq n \max_{z \neq 0} \frac{\|Fz\|_2^2}{\|z\|_2^2},$$

откуда следует правая часть неравенства (3).

Из леммы 1 непосредственно вытекает, что при малых  $n$  значения СМН и нормы Фробениуса сравнимы между собой.

Разобьем матрицу  $F$  основного сообщения стандартным образом на блоки малой размерности, например,  $8 \times 8$ . Пусть  $F_{bl}$ ,  $\Delta F_{bl}$  — матрицы произвольного полученного при разбиении блока и его возмущения соответственно. Поскольку  $n = 8$  мало, из леммы 1 получаем, что

$$\|\Delta F_{bl}\|_2 \approx \|\Delta F_{bl}\|_F. \quad (5)$$

Из соотношения (5) вытекает истинность следующего утверждения.

**Утверждение 1.** Пусть оценка визуального искажения после предварительного стандартного разбиения основного сообщения на блоки производится для каждого блока в отдельности. Если в качестве такой оценки использовалась  $\|\Delta F_{bl}\|_2$ , то она будет сравнима с оценкой, полученной с использованием  $L^2$ -нормы ( $L^2$ -norm) [3]. Кроме того, оценки (1), полученные с использованием СМН и нормы Фробениуса, будут сравнимы — переход к другой матричной норме можно трактовать, как переход к другой шкале измерений в известных разностных показателях [8].

По аналогии с показателем  $IF$  (1), построим показатель:

$$SS = 1 - \frac{\|\Delta F\|_2}{\|F\|_2},$$

который назовем *спектральным качеством изображения* ( $SS$ ).

**Утверждение 2.** При очень малых возмущающих воздействиях показатель  $SS$  является более чувствительным к этим возмущениям, чем  $IF$ .

**Доказательство.** Если шум отсутствует, то  $IF = SS = 1$ . Будем считать, что для матрицы (блока матрицы)  $F$  размерности  $n$  возмущающее воздействие  $\Delta F$  настолько мало, что имеет место соотношение:

$$\|\Delta F\|_F < \frac{\|F\|_F}{\sqrt{n}}, \quad (6)$$

Рассмотрим  $\|\Delta F\|_2 \|F\|_F^2$ . Из (3) с учетом (6)

$$\|\Delta F\|_2 \|F\|_F^2 \geq \frac{\|\Delta F\|_F}{\sqrt{n}} \|F\|_F^2 > \|\Delta F\|_F^2 \|F\|_F \geq \|\Delta F\|_F^2 \|F\|_2. \quad (7)$$

Из (7) вытекает:

$$\frac{\|\Delta F\|_2}{\|F\|_2} > \frac{\|\Delta F\|_F^2}{\|F\|_F^2},$$

что эквивалентно тому, что значение показателя

$$SS < IF \leq 1$$

при малых возмущающих воздействиях, а значит  $SS$  более чувствительный к ним.

Пусть матрица контейнера  $F$  с элементами  $f_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, n}$ , - симметрична, тогда, в соответствии с (2),  $\|F\|_2 = \lambda_{\max}$ .

Поскольку для рассматриваемой  $F$  имеет место соотношение [7]

$$\min_i \sum_{j=1}^n f_{ij} \leq \lambda_{\max} \leq \max_i \sum_{j=1}^n f_{ij}, \quad (8)$$

то с учетом определения нормы  $\|F\|_\infty$  [4]:

$$\max_i \sum_{j=1}^n f_{ij} = \max_i \sum_{j=1}^n |f_{ij}| = \|F\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

Тогда из правой части (8)

$$\|F\|_2 \leq \|F\|_\infty \quad (9)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского [4], получаем:

$$\sum_{j=1}^n f_{ij} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n f_{ij}^2}.$$

Тогда

$$\|F\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n f_{ij} = \sqrt{n} \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^n f_{ij}^2} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2} = \sqrt{n} \|F\|_F. \quad (10)$$

Учитывая правую часть (3), из (10) вытекает, что

$$\|F\|_\infty \leq \sqrt{n} \|F\|_F \leq n \|F\|_2,$$

откуда, с учетом (9) получаем

$$\|F\|_2 \leq \|F\|_\infty \leq n\|F\|_2. \quad (11)$$

Таким образом доказана следующая лемма.

**Лемма 2.** Пусть  $F$  -  $n \times n$ -матрица. Матричные нормы  $\|\bullet\|_2, \|\bullet\|_\infty$  эквивалентны с константами эквивалентности 1 и  $n$ , т.е. имеет место неравенство (11).

По аналогии с показателями  $IF, SS$  построим показатели:

$$IF_\infty = 1 - \frac{\|\Delta F\|_\infty^2}{\|F\|_\infty^2},$$

$$IF_1 = 1 - \frac{\|\Delta F\|_1^2}{\|F\|_1^2},$$

где  $\|F\|_1 = \max_j \sum_i |f_{ij}|$  [4], которые назовем соответственно *максимальным строчным* и *максимальным столбцовым качеством изображения*.

**Утверждение 3.** При очень малых возмущающих воздействиях показатель  $SS$  является более чувствительным к этим возмущениям, чем  $IF_\infty, IF_1$ .

**Доказательство.** Пусть возмущающее воздействие  $\Delta F$  настолько мало, что имеет место соотношение:

$$\|\Delta F\|_\infty < \frac{\|F\|_\infty}{n}, \quad (12)$$

где  $n$  - размерность матрицы или блока контейнера. Тогда с учетом (11) и (12) получим:

$$\|\Delta F\|_2 \|F\|_\infty^2 \geq \frac{\|\Delta F\|_\infty}{n} \|F\|_\infty^2 > \|\Delta F\|_\infty^2 \|F\|_\infty \geq \|\Delta F\|_\infty^2 \|F\|_2. \quad (13)$$

Из (13) :

$$\frac{\|\Delta F\|_2}{\|F\|_2} > \frac{\|\Delta F\|_\infty^2}{\|F\|_\infty^2} \Rightarrow 1 - \frac{\|\Delta F\|_2}{\|F\|_2} < 1 - \frac{\|\Delta F\|_\infty^2}{\|F\|_\infty^2},$$

что эквивалентно тому, что показатель  $SS$  при малых возмущающих воздействиях более чувствительный к ним, чем  $IF_\infty$ .

Для нормы  $\|\bullet\|_1$  имеет место равенство:

$$\|F\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_1}{\|x\|_1} = \|F^T\|_\infty = \max_j \sum_{i=1}^n |f_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^n f_{ij}. \quad (14)$$

В силу того, что  $F = F^T$ , из (14):

$$\|F\|_1 = \|F\|_\infty,$$

а это значит, что  $SS$  при малых возмущающих воздействиях более чувствительный к ним и по отношению к  $IF_1$ .

Таким образом доказана теорема.

**Теорема.** Для наиболее часто встречающихся на практике матричных норм  $\|\bullet\|_1, \|\bullet\|_2, \|\bullet\|_\infty, \|\bullet\|_F$  показатель визуального искажения  $SS$ , основой которого является СМН, будет наиболее чувствительным к малым возмущающим воздействиям по сравнению с показателями  $IF, IF_1, IF_\infty$ , основой которых являются соответственно нормы  $\|\bullet\|_F, \|\bullet\|_1, \|\bullet\|_\infty$ .

Рис.1 является наглядной иллюстрацией возмущающих воздействий, рассматриваемых теоремой.



Рис.1. Исходное изображение (а); зашумленное изображение (б)

На исходное изображение (рис.1(а)) накладывался незначительный аддитивный гауссовский шум (математическое ожидание равно 0, а дисперсия 0.00001). Зашумленное изображение (рис.1(б)) разбивалось на блоки. Показатели  $IF, IF_1, IF_\infty$  и  $SS$  рассчитывались для каждого блока. Матрицы, элементы которых отвечают блокам, а значения определяют соответствующие показатели  $IF, IF_1, IF_\infty$  и  $SS$  для блоков, имеют размеры  $30 \times 38$ , поэтому не приводятся. Реально полученная картина явно говорит в пользу показателя  $SS$ . Так показатели  $IF, IF_1, IF_\infty$  в силу погрешностей округлений, практически не сигнализируют о наличии шума: их значения находятся в пределах  $[0.9997, 1.0000]$  для различных блоков, при этом значения  $SS$  принадлежат сегменту  $[0.9925, 0.9962]$ .

Таким образом, при малых возмущающих воздействиях, которые нас интересуют с позиций анализа результата стеганопреобразования, в качестве разностного показателя визуального искажения целесообразно как с вычислительной точки зрения, так и с точки зрения чувствительности, использовать показатель  $SS$ , основой которого является спектральная матричная норма.

#### Список литературы

1. Ленков С.В. Методы и средства защиты информации: в 2 т. / С.В.Ленков, Д.А.Перегудов, В.А.Хорошко. — К.: Арий, 2008. —Т.2: Информационная безопасность. — 2008. — 344 с.
2. Кобозева А.А. Учет свойств нормального спектрального разложения матрицы контейнера при обеспечении надежности восприятия стегосообщения / А.А.Кобозева, Е.А.Трифорова // Вестник НТУ «ХПИ». — 2007. — №18. — С.81—93.
3. Конахович Г.Ф. Компьютерная стеганография. Теория и практика / Г.Ф.Конахович, А.Ю.Пузыренко. — К.: МК — Пресс, 2006. — 288 с.
4. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра / Дж.Деммель; пер.с англ. Х.Д.Икрамова. — М.: Мир, 2001. — 430 с.

5. Кобозева А.А. Загальний підхід до оцінки властивостей стеганографічного алгоритму, заснований на теорії збурень / А.А. Кобозева // Информационные технологии и компьютерная инженерия. – 2008. - №1(11). - С.164-171.
6. Кобозева А.А. Применение сингулярного и спектрального разложения матриц в стеганографических алгоритмах / А.А.Кобозева // Вісник Східноукр-го м. -го ун-ту ім.. В.Даля. — 2006. — №9(103), ч.1. — С.74—82.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
8. Сато Ю. Обработка сигналов. Первое знакомство / Ю.Сато; пер. с яп. Под ред. Ёсифуми Амэмия. — М.: Додэка-XXI, 2002. — 175с.

*Поступила 1.03.2010*