

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В БАЗИСАХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ УОЛША И ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

*Анатолий Белецкий, Владимир Лужецкий*

*В статье рассматриваются вопросы сравнительного анализа эффективности двух классов алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) в базисах: классических систем функций Уолша и Уолша-подобных систем функций золотого сечения (ФЗС) двоично-степенного порядка. В качестве критерия эффективности алгоритмов выбран принцип линейной связанности частотных шкал процессоров БПФ. Совокупность номеров от 0 до входных и выходных каналов процессора, эквидистантно расставленных на осях частот, образуют соответственно входную и выходную частотные шкалы процессора. Такие шкалы считаются линейно связанными, если по номеру выходного канала с максимальным откликом можно однозначно определить частоту сигнала на входе процессора. Единственным базисом, доставляющим линейную связанность частным шкалам процессора БПФ, является базис классических систем функций Уолша-Кули, аналога которого не существует во множестве Уолша-подобных систем ФЗС. На этом основании формулируется заключение о нецелесообразности применения Уолша-подобных ФЗС-базисов для построения процессоров БПФ, осуществляющих спектральный анализ дискретных сигналов.*

**Ключевые слова:** системы функций Уолша, золотая пропорция, Уолша-подобные системы функций золотого сечения, быстрое преобразование Фурье.

**1. Введение и постановка задачи исследования.** Настоящая статья является продолжением совместной работы авторов [1], посвященной разработке симметричных Уолша-подобных систем функций золотого сечения (ФЗС) двоично-степенного порядка  $N = 2^n$ , где  $n$  – натуральное число. В основу синтеза ФЗС-систем Уолша-Адамара  $H_N^{(g)}$  положен метод кронекерова произведения

$$H_{2^n}^{(g)} = H_{2^{n-1}}^{(g)} \times H_2^{(g)}, \quad (1)$$

в котором  $\times$  – знак произведения Кронекера [2]; верхним индексом  $g$  (**g**old) в (1) подчеркивается тот факт, что рассматриваемый математический объект (в данном случае — матрицы Уолша-Адамара  $H$ ) относится к ФЗС-объектам.

К порождающей матрице  $H_2^{(g)}$  ФЗС-систем  $H_N^{(g)}$  в соотношении (1) приходим, заменив единичку отрицательного элемента  $-1$  матрицы Уолша-Адамара второго порядка

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

отношением золотой пропорции [3]

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1.618. \quad (3)$$

В результате предлагаемой замены в (2) получим

$$H_2^{(g)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В матрице (4), как и всюду далее по тексту, для компактности записи элемент  $-\alpha$  будем отображать в виде  $\bar{\alpha}$ .

Полагая в (1) степень  $n = 3$ , с учетом матрицы (4) приходим к ФЗС-системе Уолша-Адамара (именуемой также системой функций Уолша-Кронекера [4]) восьмого порядка

$$H_8^{(g)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 & \bar{\alpha}^3 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (5)$$

в которой  $k$  – номер (порядок), а  $t$  – аргумент (нормированное дискретное время) базисной функции  $h_8^{(g)}(k, t)$  системы  $H_8^{(g)}$ ;  $k, t = 0, N - 1$ .

Двоично-инверсной перестановкой номеров строк (порядков базисных функций) ФЗС-систем Уолша-Адамара, как и в классических системах Уолша, приходим к ФЗС-системе Уолша-Пэли

$$\mathbf{P}_8^{(g)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 & \bar{\alpha}^3 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot (6)$$

Матриці (5) і (6) отримані на основі: рекуррентної формули (1), образуючої матриці (4), рівності (3) і двоично-інверсної перестановки номерів рядків матриць  $\mathbf{H}_N^{(g)}$  і  $\mathbf{P}_N^{(g)}$ . Рекуррентними являються також співвідношення, за допомогою яких обчислюються відповідні класическі системи Уолша-Адамара  $\mathbf{H}_N$  і Уолша-Пелі  $\mathbf{P}_N$  [4]. Алгоритми прямого синтезу матриць Адамара і Пелі  $N$ -го порядку розроблені в монографії [5].

Обозначим через  $\mathbf{W}_N$  произвольную симметричную систему Уолша. Все системы  $\mathbf{W}_N$  состоят из одного и того набора базисных функций  $w(k, t)$ ,  $k, t = \overline{0, N}$ , и отличаются друг от друга лишь вариантом упорядочения (перестановки) функций  $w(k, t)$ , сохраняющих симметричность систем (матриц).

Отличительная особенность систем  $\mathbf{W}_N$  состоит в том, что в каждой из них базисная функция нулевого порядка  $w(0, t)$  не может занимать никакой другой строки, кроме верхней строки матрицы  $\mathbf{W}_N$ , поскольку в противном случае нарушается симметрия системы. По той же самой причине (нарушения симметрии) в матрицах  $\mathbf{W}_N^{(g)}$  Уолша-подобных ФЗС-систем базисные функции  $w^{(g)}(N-1, t)$  не могут быть переставлены ни на какое другое место, занимая в системах фиксированную нижнюю строку. Отмеченные ограничения, исключающие возможность перестановки базисных функций  $w^{(g)}(0, t)$  и  $w^{(g)}(N-1, t)$ , существенно сокращают число  $L_N^{(g)}$  симметричных ФЗС-систем  $\mathbf{W}_N^{(g)}$  по сравнению с числом  $L_N$  классических систем Уолша  $\mathbf{W}_N$ . Так, если для  $N = 8$  существует 28 систем

$\mathbf{W}_8$ , то есть  $L_8 = 28$ , то для ФЗС-систем  $L_8^{(g)} = 4$ . Ниже приведены оставшиеся две ФЗС-системы восьмого порядка

$$\mathbf{S}_{8,r}^{(g)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 & \bar{\alpha}^3 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot (7)$$

и

$$\mathbf{S}_{8,l}^{(g)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & \bar{\alpha} & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 \\ 1 & 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \bar{\alpha} & \alpha^2 & \alpha^2 & \bar{\alpha}^3 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot (8)$$

Поясним способ формирования матриц (7) и (8). Предварительно составим граф (рис. 1) последовательного обхода базисных функций систем Уолша восьмого порядка.

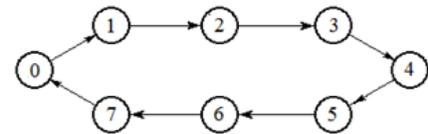


Рис. 1. Граф кругового обхода ФЗС-систем восьмого порядка

Будем считать, что цифры в кружочках графа совпадают с номерами  $k$  базисных функций  $p(k, t)$  системы  $\mathbf{P}_8^{(g)}$  в матрице (6). Обходя контур по часовой стрелке, начиная с узла  $k = 0$ , с прореживанием по 2, исключая при этом повторное вхождение в кружочек под номером 0, образуем последовательность

$$0 - 2 - 4 - 6 - 1 - 3 - 5 - 7. \quad (9)$$

Совокупность базисных функций системы (6), номера которых отвечают ряду (9), образует

систему функцій (7). Если же базисные функции последовательности (9) выбирать из матрицы (7), то приходим к ФЗС-системе (8).

Альтернативный вариант формирования матриц (7) и (8), основанный на поясняемых в п. 4 *индикаторных матрицах* (ИМ) ФЗС-систем, предложен в статье [1].

Главная цель настоящего исследования состоит в разработке методики построения деревьев  $N$  – точечных быстрых преобразований Фурье (БПФ),  $N = 2^n$ ,  $n \geq 2$ , в базисах Уолша-подобных функций золотого сечения  $W_N^{(g)}$  и проведении на их (деревьев) основе сравнительного анализа эффективности алгоритмов спектрального анализа дискретных сигналов в классических  $W_N$  и ФЗС-базисах  $W_N^{(g)}$  Уолша.

**2. Деревья БПФ в базисах ФЗС.** В основу построения деревьев графов БПФ в базисах ФЗС положен *модифицированный* двухточечный оператор типа «бабочка» (рис. 2) классической схемы Кули-Гьюки [6].

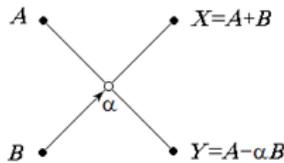


Рис. 2. Преобразования, реализуемые модифицированным оператором «бабочка»

Алгоритм четырехточечного БПФ в ФЗС-базисе Уолша-Адамара  $H_4^{(g)}$  показан на рис. 3.

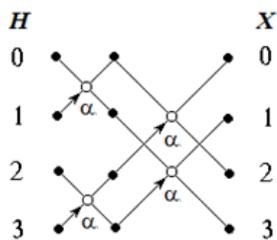


Рис. 3. Граф дерева четырехточечного БПФ в ФЗС-базисе Уолша-Адамара  $H_4^{(g)}$

И, наконец, на рис. 4 представлено дерево восьмиточечного БПФ для всех четырех ФЗС-базисов Уолша  $W_8^{(g)}$ . Для простоты на рис. 4 буквой **R** обозначена перестановка отсчетов  $t$  сигнала  $\dot{x}(t)$ , обеспечивающая формирование базиса  $S_{8,r}^{(g)}$ , а буквой **L** – базиса  $S_{8,l}^{(g)}$ . Нижние индексы **R** и **L** в обозначении систем  $S_N^{(g)}$  отвечают их

ИМ циклического сдвига на один разряд вправо (**Right**) и влево (**Left**) соответственно

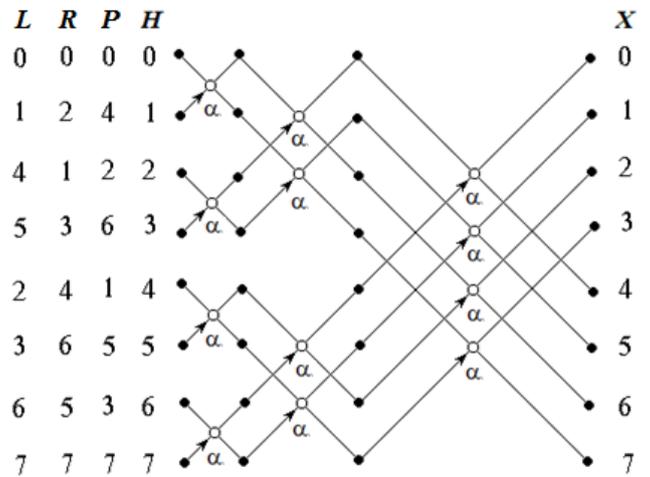


Рис. 4. Граф дерева восьмиточечного БПФ в ФЗС-базисах Уолша  $W_8^{(g)}$

Согласно рис. 4, перестановка номеров  $t$  отсчетов сигналов  $\dot{x}(t)$ ,  $t = \overline{0, N-1}$ , подаваемых на вход процессора БПФ, приводит к смене базиса, в котором вычисляется спектр  $\dot{X}(k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ , сигнала  $\dot{x}(t)$ . В частности, если номера отсчетов  $t$  составляют натуральную последовательность (числовой ряд столбца **H**), то процессор БПФ формирует спектр  $\dot{X}(k)$  в базисе  $H_8^{(g)}$ . Двоично-инверсная перестановка номеров  $t$  колонки **H**, образующая ряд в столбце **P**, порождает спектр в базисе  $P_8^{(g)}$ . Как следствие прореживания ряда **P** с коэффициентом 2 (столбец **R**), вычисляемый спектр  $\dot{X}(k)$  становится спектром в базисе  $S_{8,r}^{(g)}$ . Аналогичное прореживание номеров  $t$  отсчетов в колонке **R** (столбец **L**) приводит к образованию спектра сигнала  $\dot{x}(t)$  в базисе  $S_{8,l}^{(g)}$ .

Других ФЗС-базисов восьмиточечного БПФ, кроме рассмотренных четырех, не существует.

Убедимся, например, в том, что спектральные преобразования отсчетов  $\dot{x}(t)$  в базисе  $S_{8,l}^{(g)}$  эквивалентны преобразованиям, которые осуществляет над этими отсчетами восьмиточечный процессор БПФ, если на его входы подана последовательность отсчетов  $\dot{x}(t)$ , номера которых  $t$  приведены на рис. 4. Процесс трехступенчатого преобразования отсчетов  $t$  сигнала  $\dot{x}(t)$  деревом графа показан на рис. 5.

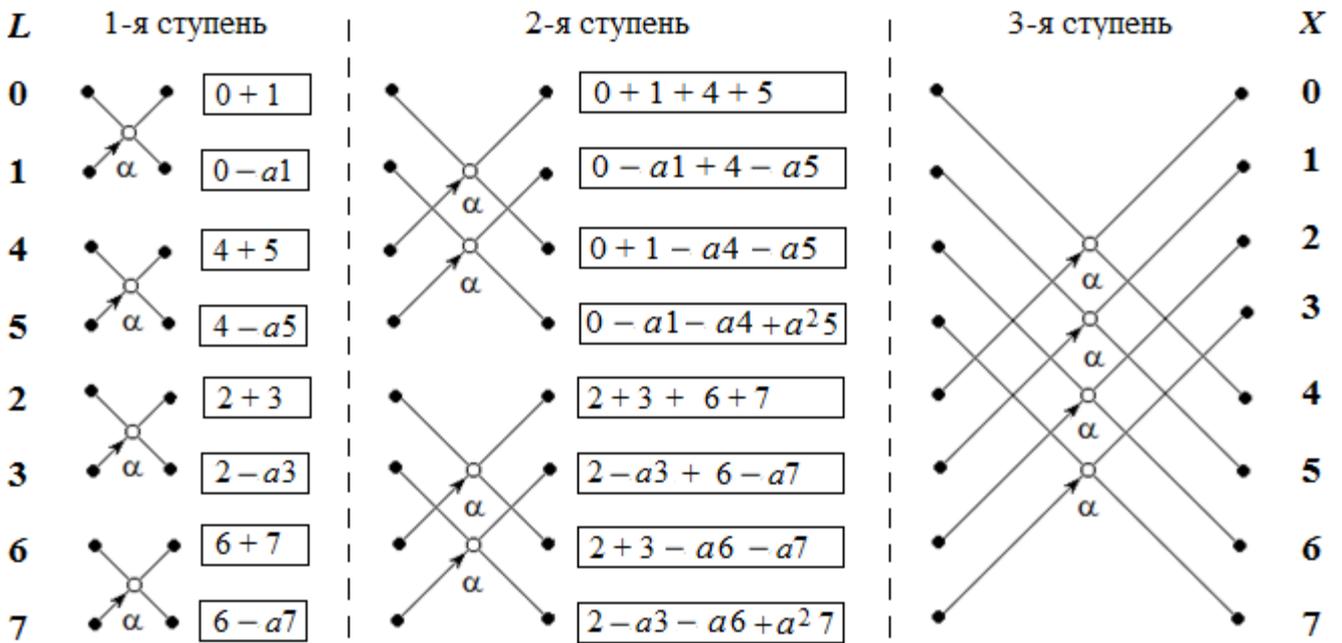


Рис. 5. К вычислению спектра  $\dot{X}(k)$  дискретного сигнала  $x(t)$  в базисе функций  $S_{8,l}^{(g)}$

Ранжируя номера отсчетов  $t$  сигнала  $\dot{x}(t)$ , которые входят в каждую  $k$ -ю гармонику спектра  $\dot{X}(k)$ , сведем в табл. 1 коэффициенты, расположенные перед этими номерами.

Таблица 1  
Весовые коэффициенты компонент спектра  $\dot{X}(k)$

$k \downarrow$	Номер $t$ отсчета входного сигнала $x(t)$							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	$\alpha$	1	$\alpha$	1	$\alpha$	1	$\alpha$
2	1	1	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$
3	1	$\bar{\alpha}$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\alpha^2$	$\bar{\alpha}$	$\alpha^2$
4	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$
5	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\alpha^2$	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\alpha^2$
6	1	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\alpha^2$	$\alpha^2$
7	1	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\alpha^2$	$\bar{\alpha}$	$\alpha^2$	$\alpha^2$	$\bar{\alpha}^3$

Из сопоставления элементов матрицы (8) и весовых коэффициентов в табл. 1 убеждаемся в том, что  $L$  – перестановка номеров отсчетов  $t$  сигнала  $\dot{x}(t)$  на входе процессора БПФ (рис. 4) обеспечивает формирование спектра  $\dot{X}(k)$  в базисе  $S_{8,l}^{(g)}$ .

### 3. Спектр дискретных сигналов в классических и ФЗС-базисах Уолша.

В качестве математической модели сигнала выберем модель дискретного комплексно-экспоненциального сигнала двоично-степенного порядка (объема выборки)  $N = 2^n$ , т. е. пусть

$$\dot{x}_m(t) = e^{j\frac{2\pi}{N}mt}, \quad m, t = \overline{0, N-1}, \quad (10)$$

где  $t$  – номер отсчета сигнала (дискретное время), а  $m$  – нормированная частота входного сигнала.

Спектр  $\dot{X}_m(k)$  сигнала  $\dot{x}_m(t)$  определяется соотношением

$$\dot{X}_m(k) = \sum_{t=0}^{N-1} \dot{x}_m(t) \varphi(k, t), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (11)$$

В левой части равенства (11) аргумент  $k$  означает номер гармоники дискретного спектра сигнала (10) в базисе функций  $\{\varphi(k, t)\}$ .

Здесь уместно сделать такую оговорку. Под гармоникой спектра дискретного сигнала обычно принято понимать  $k$ -ю спектральную компоненту (коэффициент ряда Фурье)  $\dot{X}_m(k)$  сигнала  $\dot{x}_m(t)$  в базисе гармонических функций. В конечно-мерном спектральном анализе этот базис представляет собой классическую систему дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ). Для простоты в дальнейшем термин «гармоника» мы будем использовать также в качестве эквивалента термина «спектральная компонента» дискретного сигнала безотносительно к типу базиса ортогонального разложения сигнала.

Предположим, что в качестве базиса БПФ принята классическая система функций Уолша-Пэли восьмого порядка

$$P_8 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & \vdots & + & + & + & + \\ + & + & + & + & \vdots & - & - & - & - \\ + & + & - & - & \vdots & + & + & - & - \\ + & + & - & - & \vdots & - & - & + & + \\ + & - & + & - & \vdots & + & - & + & - \\ + & - & + & - & \vdots & - & + & - & + \\ + & - & - & + & \vdots & + & - & - & + \\ + & - & - & + & \vdots & - & + & + & - \end{array} \right] \cdot \end{matrix} \quad (12)$$

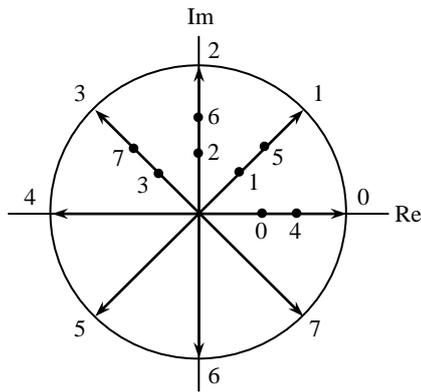


Рис. 6. К определению гармоники  $\dot{X}_1(1)$

Цифры в окрестностях стрелок векторов на рис. 6 и 7 соответствуют номерам  $t$  отсчетов сигнала  $\dot{x}_1(t)$ .

Обозначив комплексные величины

$$\dot{z} = a + jb = (a, b),$$

приходим к таким графоаналитическим оценкам гармоник четного (табл. 2) и нечетного (табл. 3) сигналов  $\dot{x}_m(t)$  в базисе функций Уолша-Пэли восьмого порядка.

Спектры комплексно-экспоненциальных сигналов с целочисленными частотами  $m$  в базисах систем функций Уолша обладают

В основу построения спектра (11) сигнала (10) положен графоаналитический метод [5], суть которого сводится к алгебраическому сложению векторов отсчетов сигнала  $\dot{x}_m(t)$  с весами, определяемыми значениями (плюс или минус единица)  $k$ -й базисной функции  $\varphi(k, t)$ . Под алгебраической суммой векторов понимают вектор, координаты которого равны сумме соответствующих координат складываемых векторов.

Рис. 6 и 7 иллюстрируют, для примера, технологию графоаналитического расчета гармоник  $\dot{X}_1(1)$  и  $\dot{X}_1(2)$  сигнала (10) в базисе функций Уолша-Пэли (12).

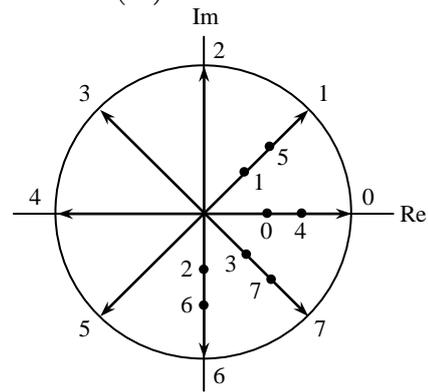


Рис. 7. К определению гармоники  $\dot{X}_1(2)$

такими интересными свойствами. Во-первых, если на вход процессора БПФ подведен четный сигнал, то есть если частота  $m$  является четной величиной, то «звонят» только четные выходные каналы процессора, и наоборот. И, во-вторых, множество гармоник сигнала  $\dot{x}_m(t)$  состоит лишь из одной вещественной гармоники  $X_m(k) = N$ , если  $m = k = 0$  или  $m = k = N / 2$ , как в табл. 2, или распадается на пары комплексных гармоник  $\dot{X}_m(k)$  с одинаковыми амплитудами, но противоположными фазами, как в табл. 3.

Таблица 2

Четные гармоники четных комплексно-экспоненциальных сигналов в базисе  $P_8$

$m$	$\dot{x}_m(0)$	$\dot{x}_m(2)$	$\dot{x}_m(4)$	$\dot{x}_m(6)$
0	8	0	0	0
2	0	4(1, 1)	0	4(1, -1)
4	0	0	8	0
6	0	4(1, -1)	0	4(1, 1)

Нечетные гармоники нечетных комплексно-экспоненциальных сигналов в базисе  $P_8$

$m$	$\dot{X}_m(1)$	$\dot{X}_m(3)$	$\dot{X}_m(5)$	$\dot{X}_m(7)$
1	$2(1, 1+\sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2}-1)$	$2(1, 1-\sqrt{2})$	$2(1, -(1+\sqrt{2}))$
3	$2(1+\sqrt{2}, -1)$	$2(1-\sqrt{2}, 1)$	$2(1-\sqrt{2}, -1)$	$2(1+\sqrt{2}, 1)$
5	$2(1, 1-\sqrt{2})$	$2(1, -(1+\sqrt{2}))$	$2(1, 1+\sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2}-1)$
7	$2(1-\sqrt{2}, -1)$	$2(1+\sqrt{2}, 1)$	$2(1-\sqrt{2}, -1)$	$2(1-\sqrt{2}, 1)$

В табл. 2 и 3 затенением выделены гармоники  $\dot{X}_m(k)$ , появляющиеся на выходе  $k$ -го канала процессора БПФ, которые для каждой модели (нормированной частоте)  $m$  входного сигнала  $\dot{x}_m(t)$  обладают максимальной амплитудой  $A_k$  и положительной фазой  $\varphi_k$ .

Отобразим соотношения между частотой  $m$  входного сигнала  $\dot{x}_m(t)$  и номером  $k$  выходного канала восьмичастотного процессора БПФ в базисе функций Уолша-Пэли (с максимальной амплитудой отклика  $A_k$  и положительной фазой  $\varphi_k$ ) в виде графика (рис. 8). Назовем оси координат графика *шкалами входной* ( $m$ ) и *выходной* ( $k$ ) *частот* процессора БПФ.

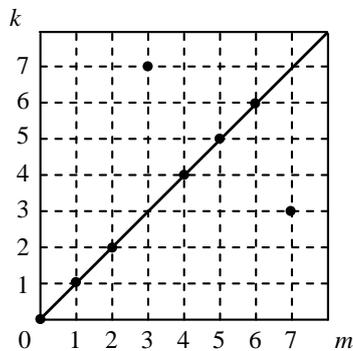


Рис. 8. Соотношение частотных шкал процессора БПФ в базисе  $P_8$

Как показали результаты анализа ни один из базисов систем функций Уолша, за исключением базиса Уолша-Кули [7], речь о котором пойдет ниже по тексту, не обеспечивает так называемой *линейной связанности частотных шкал процессора БПФ*.

Если на вход процессора в базисе функций  $\{\varphi(k, n)\}$  подан дискретный сигнал  $\dot{x}_m(t)$  нормированной частоты  $m$ , а номер  $k$  выходного канала процессора, в котором формируется отклик ( $k$ -я гармоника спектра  $\dot{X}_m(k)$  входного

сигнала) с максимальной амплитудой  $A_k$ , совпадает с  $m$ , то это означает, что базис  $\{\varphi(k, n)\}$  доставляет линейную связанность частотным шкалам процессора.

Таким образом, частотные шкалы процессора БПФ линейно связаны, если его отклики с максимальными амплитудами  $A_k$  и одинаковыми фазами  $\varphi_k$  располагаются на биссектрисе квадрата с осями координат  $m$  и  $k$ .

Идеальную линейную связанность частотным шкалам процессора БПФ обеспечивает классический базис ДЭФ. Из этого следует, что по номеру выходного канала процессора с максимальной амплитудой отклика можно вынести однозначное решение относительно частоты дискретного комплексно-экспоненциального сигнала, подаваемого на вход спектроанализатора (частотомера).

Разумеется, что частотные шкалы процессора БПФ в базисе  $P_N$  восьмого порядка легко можно линеаризовать механической коммутацией третьего и седьмого выходных каналов. Но проблема подобной линеаризации во всех базисах Уолша усугубляется тем, что с ростом  $N$  число откликов, выпадающих из биссектрисы, также резко возрастает примерно до значения, равного  $N/2$ , что обращает механическую коммутацию каналов в практически мало приемлемую процедуру.

Но не все, казалось бы, так бесперспективно. Одним из авторов данной статьи в 2000 году на основе алгоритма БПФ по схеме Кули-Тьюки разработана система функций Уолша, названная *системой Уолша-Кули*  $C_N = \{c(k, t)\}$ ,  $k, t = \overline{0, N-1}$ , и доложенная на МК NIKON-2000 (г. Вроцлав, Польша) [7]. Отличительная особенность систем  $C_N$ ,  $N = 2^n$ ,  $n > 1$ , состоит в том, что эта единственная система Уолша, базис которой доставляет линейную связанность частотным шкалам процессора БПФ.

Функції  $c(k, t)$  систем Уолша-Кули  $C_N$  произвольных двоично-степенных порядков  $N$  определяются начальными условиями:

$$c(0, t) = +, \quad t = \overline{0, N-1};$$

$$c(1, t) = \begin{cases} +, & t = \overline{0, N/4-1} \text{ и } t = \overline{3N/4, N-1}; \\ -, & t = \overline{N/4, 3N/4-1}. \end{cases}$$

Оставшиеся функции  $c(k, t)$ ,  $k \geq 2$ , вычисляются по рекуррентным формулам:

$$c(2k, t) = c(k, (2t)_N), \text{ где } (x)_N = x \pmod{N}$$

– для четных и

$$c(2k+1, t) = c(2k, t) \cdot c(1, t)$$

– для нечетных базисных функций.

Система функций Уолша-Кули восьмого порядка имеет вид

$$C_8 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & \vdots & + & + & + & + \\ + & + & - & - & \vdots & - & - & + & + \\ + & - & - & + & \vdots & + & - & - & + \\ + & - & + & - & \vdots & - & + & - & + \\ + & - & + & - & \vdots & + & - & + & - \\ + & - & - & + & \vdots & - & + & + & - \\ + & + & - & - & \vdots & + & + & - & - \\ + & + & + & + & \vdots & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot (13)$$

Из сопоставления матриц (12) и (13) следует, что как в системах функций Уолша-Пэли, так и Уолша-Кули правая половина четных базисных функций повторяет левую половину, а в нечетных – наоборот.

Как уже отмечалось выше, базис функций Уолша-Кули – это единственный базис систем Уолша, обладающий весьма привлекательным для спектрального анализа свойством, а именно: для входных комплексно-экспоненциальных сигналов  $\dot{x}_m(t)$  гармоники их спектра  $\dot{X}_m(k)$  с максимальными амплитудами и отрицательными фазами располагаются вдоль главной диагонали квадратной матрицы с осями координат  $(m, k)$ . А это означает, что по номеру канала  $k$  процессора БПФ с максимальным по модулю откликом и отрицательной фазой можно однозначно определить частоту  $m$  входного сигнала  $\dot{x}_m(t)$ , т. е. базису Уолша-Кули присуще свойство, столь необходимое для построения спектроанализаторов.

Результаты графоаналитического расчета гармоник спектра нечетного комплексно-экспоненциального сигнала  $\dot{x}_m(t)$  в базисе функций Уолша-Кули (13) сведены в табл. 4, в которой компоненты с максимальными амплитудами и отрицательными фазами выделены затенением. Четные гармоники спектра в базисе Уолша-Кули совпадают с гармониками в базисе Уолша-Пэли (табл. 2), но с инверсными по знаку мнимыми компонентами.

Таблица 4

Нечетные гармоники нечетных комплексно-экспоненциальных сигналов в базисе  $C_8$

$m$	$\dot{X}_m(1)$	$\dot{X}_m(3)$	$\dot{X}_m(5)$	$\dot{X}_m(7)$
1	$2(1+\sqrt{2}, -1)$	$2(1-\sqrt{2}, 1)$	$2(1-\sqrt{2}, -1)$	$2(1+\sqrt{2}, 1)$
3	$2(1, -(\sqrt{2}-1))$	$2(1, -(1+\sqrt{2}))$	$2(1, 1+\sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2}-1)$
5	$2(1-\sqrt{2}, -1)$	$2(1+\sqrt{2}, 1)$	$2(1+\sqrt{2}, -1)$	$2(1-\sqrt{2}, 1)$
7	$2(1, 1+\sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2}-1)$	$2(1, -(\sqrt{2}-1))$	$2(1, -(1+\sqrt{2}))$

А теперь обратимся к анализу свойств базисов функций золотого сечения. Спектр сигнала  $\dot{x}_m(t)$ , заданного соотношением (10), определяется формулой (11), в которой базис ФЗС-Пэли  $p^{(s)}(k, t)$  восьмиточечного процессора БПФ (выбранного в качестве примера) представлен матрицей (6).

Воспользовавшись графоаналитическим методом расчета гармоник спектра, приходим к результатам оценок, представленных в табл. 5 (для четных) и табл. 6 (для нечетных сигналов).

Обратим внимание на ту особенность ФЗС-базиса, что число гармоник спектра четных сигналов в этом базисе (табл. 5) возросло по сравнению с числом гармоник в базисе Уолша (табл. 2). Кроме того, примем к сведению, что для компактности записи гармоник из табл. 5 и 6 вынесен за скобки общий множитель  $\alpha^2$ .

С учетом множителя  $\alpha^2 = 2.618$  сведем в табл. 7 числовые значения амплитуд гармоник спектра дискретного комплексно-экспоненциального сигнала, формируемых восьмиточечным

процессором БПФ в ФЗС-базисе Уолша-Пэли, и для сравнения в табл. 8 – амплитуды гармоник сигнала в классическом базисе Уолша-Кули. Справа от амплитуд в скобках указаны знаки фаз ком-

плексных гармоник, а затенением выделены максимальные амплитуды гармоник с положительной фазой для ФЗС-базиса (табл. 7) и отрицательной фазой – для базиса Уолша-Кули (табл. 8).

Таблица 5

Гармоники четных комплексно-экспоненциальных сигналов в базисе  $P_8^{(g)}$

m\k	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2(1, 1)	(1- $\alpha$ )(1, 1)	0	0	2(1, - $\alpha$ )	(1- $\alpha$ , $\alpha(\alpha-1)$ )
4	0	0	0	4	2(1- $\alpha$ ), 0	0	(2- $\alpha$ , 0)
6	0	2(1, -1)	(1- $\alpha$ )(1, -1)	0	0	2(1, $\alpha$ )	(1- $\alpha$ , - $\alpha(\alpha-1)$ )

Таблица 6

Нечетные гармоники нечетных комплексно-экспоненциальных сигналов в базисе  $P_8^{(g)}$

m	$\dot{X}_m(1)$	$\dot{X}_m(3)$	$\dot{X}_m(5)$	$\dot{X}_m(7)$
1	1, $1+\sqrt{2}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^2, -(\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-1))$	1, $-(\sqrt{2}\alpha-1)$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^3, -\alpha(1-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-1))$
3	1, $\sqrt{2}-1$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^2, \alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-1)$	1, $-(1+\sqrt{2}\alpha)$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^3, \alpha(1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-1))$
5	1, $1-\sqrt{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^2, -(\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-1))$	1, $1+\sqrt{2}\alpha$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^3, -\alpha(1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-1))$
7	1, $-(1+\sqrt{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^2, \alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-1)$	1, $\sqrt{2}\alpha-1$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^3, \alpha(1-\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-1))$

Таблица 7

Амплитуды и фазы гармоник комплексно-экспоненциального сигнала в базисе  $P_8^{(g)}$

m	$\dot{X}_m(1)$	$\dot{X}_m(2)$	$\dot{X}_m(3)$	$\dot{X}_m(4)$	$\dot{X}_m(5)$	$\dot{X}_m(6)$	$\dot{X}_m(7)$
1	6.841 (+)	0	10.893 (-)	0	4.270 (-)	0	5.741 (-)
2	0	7.404 (+)	2.288 (+)	0	0	9.959 (-)	3.079 (+)
3	2.834 (+)	0	3.812 (+)	0	8.998 (-)	0	11.195 (+)
4	0	0	0	10.472 (+)	1.236 (+)	0	1.000 (+)
5	2.834 (-)	0	3.812 (-)	0	8.998 (+)	0	11.195 (-)
6	0	7.404 (-)	2.288 (-)	0	0	9.959 (+)	3.079 (-)
7	6.841 (-)	0	10.893 (+)	0	4.270 (+)	0	5.741 (+)

Таблица 8

Амплитуды и фазы гармоник комплексно-экспоненциального сигнала в базисе  $C_8$

m	$\dot{X}_m(1)$	$\dot{X}_m(2)$	$\dot{X}_m(3)$	$\dot{X}_m(4)$	$\dot{X}_m(5)$	$\dot{X}_m(6)$	$\dot{X}_m(7)$
1	5.226 (-)	0	2.165 (+)	0	2.165 (-)	0	5.226 (+)
2	0	5.657 (-)	0	0	0	5.657 (+)	0
3	2.165 (-)	0	5.226 (-)	0	5.226 (+)	0	2.165 (+)
4	0	0	0	8.000	0	0	0
5	2.165 (-)	0	5.226 (+)	0	5.226 (-)	0	2.165 (+)
6	0	5.657 (+)	0	0	0	5.657 (-)	0
7	5.226 (+)	0	2.165 (+)	0	2.165 (-)	0	5.226 (-)

**4. Обсуждение результатов анализа.** Как следует из сопоставления оценок комплексных спектров, представленных в табл. 2, 3 и 7, свойства систем функций золотого сечения в основном подобны свойствам соответствующих систем функций Уолша. Термин «соответствие» здесь следует понимать в смысле совпадения индикаторных матриц систем.

Индикаторными матрицами  $J_w$  систем функций Уолша  $W_N$  двоично-степенного порядка  $N = 2^n$  являются правосторонне симметрические (0,1)-матрицы  $n$ -го порядка, т.е. есть матрицы, симметричные относительно вспомогательной диагонали, невырожденные над полем  $F_2$  [8].

Индикаторные матрицы  $J_w^{(g)}$  ФЗС-систем  $W^{(g)}$  составляют подмножество таких ИМ  $J_w$  классических систем Уолша  $W$ , вес каждого столбца (как и строки) которых является нечетным числом [1].

Индикаторные матрицы  $J_w$  систем функций Уолша, как и ФЗС-систем  $J_w^{(g)}$ , дают возможность определить место (номер строки  $k_w$ ) в системе  $W$  или  $W^{(g)}$ , которое занимают  $k$ -е базисные функции  $p(k, t)$  или  $p^{(g)}(k, t)$  систем Уолша-Пэли. А именно

$$k_w = k_p \cdot J_w, \quad k_p = \overline{0, N-1}. \quad (14)$$

Выберем, для примера, ИМ третьего порядка некоторой Уолша-подобной ФЗС-системы

$$J_r^{(g)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

являющуюся оператором циклического сдвига на один разряд вправо.

По формуле (14) с учетом матрицы (15) приходим к перестановкам базисных функций систем  $P_8^{(g)}$ , которые приведены в табл. 9.

Таблица 9

Соответствие номеров базисных функций систем  $P_8^{(g)}$  и  $S_{8,r}^{(g)}$

$k_p$	0	1	2	3	4	5	6	7
$k_r$	0	4	1	5	2	6	3	7

Легко убедиться в том, что осуществляя перестановку номеров базисных функций  $p^{(g)}(k, t)$  ФЗС-системы  $P_8^{(g)}$  Уолша-Пэли (6) в соответствии с табл. 9, приходим с ФЗС-системе  $S_{8,r}^{(g)}$ , представленной матрицей (7).

А теперь обратимся к ИМ третьего порядка классической системы функций Уолша-Пэли

$$J_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Веса двух левых столбцов и двух нижних строк матрицы (16) являются четными, т.е. данная ИМ не подпадает под определение индикаторной матрицы Уолша-подобной ФЗС-системы, и по этой причине базис функций Уолша-Пэли не входит во множество ФЗС-базисов. Следовательно, ни один из базисов ФЗС-систем не обеспечивает линейной связанности частотным шкалам процессора БПФ, поскольку лишь базис функций Уолша-Пэли сохраняет такую связанность частотных шкал процессора.

**Выводы.** Единственным базисом систем функций Уолша произвольного двоично-степенного порядка, доставляющим линейную связанность частотным шкалам процессора БПФ, является базис систем функций Уолша-Кули, который не принадлежит множеству Уолша-подобных базисов систем функций золотого сечения. По этой причине применение ФЗС-базисов в процессорах БПФ для целей спектрального анализа дискретных сигналов вряд ли можно считать целесообразным.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1]. Белецкий А.Я. Синтез симметричных систем функций золотого сечения / А.Я. Белецкий, В.А. Лужецкий. // Захист інформації, Том 18, № 4 (2016). – С. 283–292.
- [2]. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1989. – 368 с.
- [3]. Васютинский Н.А. Золотая пропорция / Н.А. Васютинский. – М.: Молодая гвардия, 1990. – 238 с.
- [4]. Трахтман А.М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. / А.М. Трахтман, В.А. Трахтман. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
- [5]. Белецкий А.Я. Комбинаторика кодов Грея. / А.Я. Белецкий. – К.: Изд-во КВІЦ, 1986. – 506 с.

- [6]. Cooley J.W., Tukey J. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // *Math. Comput.* 1965. Vol. 19, No. 90. P. 297–301.
- [7]. Beletsky A. Ya. Synthesis and analysis of system of Walsh-Cooly basis functions. – XIII International Conference – NIKON-2000 – Wroclaw, 2000.
- [8]. Белецький, А.Я. Индикаторные матрицы систем функций Уолша. / А.Я. Белецкий. // *Вісник СумДУ. Серія Технічні науки*, № 4, 2009. – С. 85-93.

## REFERENCES

- [1]. Beletsky A.Ya. Synthesis of symmetrical functions of golden ratio. / Beletsky A.Ya., Luzhetsky V.A. // *Ukrainian Information Security Research Journal*, VOL. 18, № 1 (2016). – P. 283–292.
- [2]. Bellman R. Introduction to the theory of matrices. / R. Bellman. – M.: Nauka, 1989 - 368 p.
- [3]. Vasyutinskiy N.A. Golden Ratio / N.A. Vasyutinskiy. – M.: Young Guard, 1990. – 238 p.
- [4]. Trahtman A. M. Fundamentals of the theory of finite signals on finite intervals. / A.M. Trahtman. – M.: Sov. Radio, 1975. – 208 p.
- [5]. Beletsky A.Ya. Combinatorics Gray codes. / A.Ya. Beletsky. – K.: Publ. house KVITS, 1986. – 506 p.
- [6]. Cooley J.W., Tukey J. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // *Math. Comput.* 1965. Vol. 19, No.90. P. 297–301.
- [7]. Beletsky A. Ya. Synthesis and analysis of system of Walsh-Cooly basis functions. – XIII International Conference – NIKON-2000 – Wroclaw, 2000.
- [8]. Beletsky A.Ya. Indicator matrix systems of Walsh functions. / A.Ya. Beletsky. // *News SumDU. Series Engineering*, № 4, 2009. – P. 85-93.

## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМІВ ШВИДКОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є В БАЗИСІ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ УОЛША І ЗОЛОТОЇ ПРОПОРЦІЇ

У статті розглядаються питання порівняльного аналізу ефективності двох класів швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) в базисах класичних функцій Уолша і базисах Уолша-подібних функцій золотої пропорції (ФЗП) двійкове-степеневого порядку. Як критерій ефективності алгоритмів ШПФ обраний принцип лінійної зв'язності частотних шкал процесора ШПФ. Сукупність номерів вхідних каналів процесора, еквідистантно розставлених на осі частот, утворює вхідну частотну шкалу, а сукупність еквідистантно розставлених на осі частот номерів вихідних каналів становить вихідну частотну шкалу процесора ШПФ. Єдиним базисом, що привносить лінійну зв'язність частотним шкалам процесора ШПФ, є базис функцій Уолша-Кулі, аналога якого не існує в множенні ФЗП-базисів. На цій підставі формулюється висновок про недоцільність застосування Уолша-подібних ФЗП-базисів для виконання спектрального аналізу дискретних сигналів.

**Ключові слова:** системи функцій Уолша, золота пропорція, Уолша-подібні системи функцій золотої пропорції.

## COMPARATIVE ANALYSIS OF THE EFFICIENCY OF ALGORITHMS FAST FOURIER TRANSFORM IN THE BASIS SYSTEMS

The article deals with the comparative analysis of the effectiveness of two classes of fast Fourier transform algorithm (FFT) in the bases of classical systems of Walsh functions and bases Walsh-like systems of the golden section features binary-power order. As a criterion of the effectiveness of the FFT algorithm selected the principle of linear frequency scales connectivity FFT processor. The set of numbers from 0 to processor input channels are equidistantly arranged on a frequency axis constitutes an input frequency scale, and the set of equidistantly spaced on the frequency axis output channel numbers of the output frequency scale FFT processor. The only basis, delivering linear scales connectivity to private FFT processor is the basis of classical Walsh functions Coulee, whose analogue does not exist in the set-bases Terminals. On this basis, formulate an opinion on inappropriate use of Walsh-like-bases Terminals to perform the tasks of the spectral analysis of discrete complex exponential signals.

**Keywords:** the system of Walsh functions, the golden proportion, Walsh-like system of the golden ratio functions.

**Білецький Анатолій Якович**, доктор технічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, професор кафедри електроніки Національного авіаційного університету.

E-mail: abelnau@ukr.net

**Белецький Анатолий Яковлевич**, доктор технічних наук, професор, заслуженный деятель науки и техники Украины, лауреат Гос. премии Украины в области науки и техники, профессор кафедры электроники Национального авиационного университета.

**Beletsky Anatoly**, Doctor of Science, Professor, Honored Scientist of Ukraine, Laureate of the State Prize of Ukraine in Science and Technology, Professor of Department Electronics of National Aviation University.

**Лужецький Володимир Андрійович**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри захисту інформації Вінницького національного технічного університету.

E-mail: lva@mail.ru

**Лужецкий Владимир Андреевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой защиты информации Винницкого национального технического университета.

**Luzhetsky Volodymyr**, Doctor of Science, Professor, Head of Information Security Academic Department, Vinnytsia National Technical University.