УДК 621.376(045)

МП-ОЦІНКА ЧАСТОТИ КОМПЛЕКСНОЇ ГАРМОНІКИ

***І. П. Омельчук**, канд. техн. наук; ****К. М.** **Сігнаєвський**

* Національний авіаційний університет

e-mail: omelip@ukr.net

** Науково-виробничий центр «Інфозахист»

e-mail: infozahist@ukr.net

За методом максимальної правдоподібності здійснено синтез оцінки частоти та початкової фази комплексного гармонічного монохромного сигналу на тлі гауссівського некорельованого шуму за умов великого співвідношення потужності сигналу до шуму. Розрахунковий алгоритм отриманий у явному аналітичному вигляді. Доведено, що оцінка частоти, запропонована Треттером на підставі лінійної регресії повної фази вхідного процесу, є частковим випадком синтезованої МП-оцінки.

Ключові слова: максимальна правдоподібність; комплексний гармонічний сигнал; оцінка частоти; лінійна регресія.

The estimate of frequency and initial phase of a complex single-tone signal in mixture with white Gaussian noise at high signal to noise ratio is synthesized by maximum likelihood method. The calculation algorithm is obtained in explicit analytical form. It is proved that frequency Tretter estimate by linear regression of full phase is a particular case of ML-estimate.

Keywords: maximum likelihood, complex harmonic signal, frequency estimation, linear regression.

Вступ

Проблема оцінювання частоти гармонічного монохромного сигналу на тлі шуму є актуальною [1, 2] та типовою у багатьох ситуаціях обробки фізичних процесів [3], наприклад, виявлення та пеленгація небезпечних передавачів при радіомоніторингу, визначення швидкості незнайомої рухомої цілі радіо- або акустичним локатором, вимірювання механічних вібрацій, дослідження геофізичних сигналів тощо.

Оскільки у деяких випадках сигнал має тільки одну домінуючу гармоніку, то визначення загального спектру є надлишковим, і проблема звужується до вирішення локальної задачі — оцінювання однієї частоти. Причому, сучасні радіотехнічні пристрої оперують з квадратурними процесами, що математично зводиться до обробки комплексних сигналів у спеціалізованих мікроконтролерах.

За останні десятиліття розроблено декілька підходів оцінювання частоти монохромного комплексного сигналу [4, 5], основою яких є метод максимальної правдоподібності (МП). Проте у класичному застосуванні, внаслідок суттєвої нелінійності, вони орієнтовані на пошукові ітераційні процедури, що мають деякі вади для практичного використання, зокрема, значні часові витрати.

Мета роботи — синтез квазіоптимальної МП-оцінки частоти в явному аналітичному вигляді на підставі припущення про значну потужність сигналу відносно шуму та визначення зв’язку цієї оцінки з відомою оцінкою лінійної регресії Треттера [6].

Постановка завдання

Фізичним матеріалом, що підлягає обробці, вважаються дві одночасно виміряні та дискретизовані квадратури вхідного процесу — дійсна та уявна відповідно:

$$\mathbf{X} \equiv \{x_n\}, \mathbf{Y} \equiv \{y_n\}, \tag{1}$$

де n — номер відліку.

Спостерігаються вони впродовж деякого обмеженого відрізку часу T_z. Тоді у випадку рівномірної (еквідистантної) дискретизації з інтервалом τ розмір вибірки становить

$$N = T_z / \tau .$$

Математична модель вибірки вхідних квадратур (1) може бути подана у вигляді послідовності комплексних чисел

$$\mathbf{Z} \equiv \{\dot{z}_n = x_n + j \cdot y_n\}, \quad n = \overline{1, N},$$

яку надалі також будемо називати вхідним дискретизованим процесом.

Вважається, що вхідний процес

$$\mathbf{Z} \equiv \mathbf{X} + j \cdot \mathbf{Y} \equiv \mathbf{S} + \mathbf{\Xi} \tag{2}$$

утворюється як адитивна суміш корисного сигналу $\mathbf{S} \equiv \{s_n\}$ та завади $\mathbf{\Xi} \equiv \{\xi_n\}$ з комплексними значеннями

$$s_n = s_{x,n} + js_{y,n},$$

$$\xi_n = \xi_{x,n} + j\xi_{y,n}.$$

За постановкою задачі, корисний сигнал — це монохромна комплексна гармоніка (надалі спрощено «сигнал»), тобто у розгорнутому вигляді для кожного відліку запишемо:

$$s_{x,n} = A\cos[\omega\tau(n-1)+\varphi_1],$$
$$s_{y,n} = A\sin[\omega\tau(n-1)+\varphi_1], \qquad (3)$$

де (ω, A, φ_1) — частота, амплітуда та початкова фаза сигналу відповідно. За умовами досліджень, вони вважаються незмінними впродовж часу спостереження, але апріорно невідомими.

Зазвичай значення інтервалу дискретизації τ досліднику відоме. І це дозволяє замість абсолютної частоти ω ввести до розгляду інший параметр сигналу — «нормовану частоту»

$$\gamma = \omega\tau, \quad 0 < \gamma < 2\pi,$$

що є типовим у цифровій обробці сигналів [3], оскільки зменшує параметричний розмір математичної моделі (3).

Фізично величина γ — це різниця фаз між суміжними відліками сигналу, але надалі вона буде називатися саме частотою сигналу (відкидаючи прикметник нормована), оскільки оцінка частоти $\hat{\omega}$ замінюється на пропорційну оцінку величини $\hat{\gamma}$.

Для деякого спрощення запису математичних формул будемо використовувати змінений індекс нумерації відліків у виразах (3)

$$m = n-1, \quad m = \overline{0, N-1}.$$

Таким чином, розгорнуту математичну модель вхідного процесу можна остаточно записати у наступному вигляді:

$$z_m \equiv (s_{x,m} + \xi_{x,m}) + j\cdot(s_{y,m}+\xi_{y,m}) \equiv$$
$$\equiv [\mathrm{A}\cos(\gamma m+\varphi_1)+\xi_{x,m}] +$$
$$+ j\cdot[\mathrm{A}\sin(\gamma m+\varphi_1)+\xi_{y,m}], \quad m=\overline{0,N-1}.$$

Особливо треба зазначити, що оцінювання частоти здійснюється у режимі фіксованого вікна одночасно та однократно за всіма відліками $\{z_m\}$ вхідної реалізації.

Синтез максимально-правдоподібної оцінки частоти сигналу

Одним з найбільш поширених та розвинутих методів статистичного синтезу оцінок параметрів сигналів на тлі завад [4] є метод максимуму функції правдоподібності (ФП). Узагальнено для задачі оцінювання частоти запишемо як

$$\hat{\gamma} = \arg\max_{\gamma,\varphi_1}\left(f_{LH}(\mathbf{Z}\mid A,\gamma,\varphi_1,\sigma)\right),$$

де $f_{LH}(\cdot)$ — функція правдоподібності, σ^2 — дисперсія шуму.

Припустивши, що шум $\{\xi_n\}$ є некорельованим гауссівським з незалежними складовими $\{\xi_{x,n}\}$ та $\{\xi_{y,n}\}$, які мають однакову дисперсію σ^2, ФП для сигнально-завадової моделі (2) можна записати у такому вигляді:

$$f_{LH}(\mathbf{Z}\mid A,\gamma,\varphi_1,\sigma) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^N \times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{m=0}^{N-1}\left[(x_m - s_{x,m})^2 + (y_m - s_{y,m})^2\right]\right\}. \quad (4)$$

Оскільки логарифм є монотонною функцією, доцільно для пошуку максимуму ФП (4) використовувати саме його:

$$\ln[f_{LH}(\cdot)] = -N\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{m=0}^{N-1}(x_m^2+y_m^2) -$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{m=0}^{N-1}(s_{x,m}^2+s_{y,m}^2) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{m=0}^{N-1}(x_m s_{x,m} + y_m s_{y,m})$$

У більш компактному вигляді, розділивши цей вираз на дві складові за їхньою залежністю від параметрів сигналу, отримаємо

$$\ln[f_{LH}(\cdot)] = Q(\mathbf{Z}\mid\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\cdot\Lambda(\mathbf{Z}\mid A,\gamma,\varphi_1), \quad (5)$$

де використано позначення функціоналу, незалежного від параметрів сигналу

$$Q(\mathbf{Z}\mid\sigma) = -N\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{m=0}^{N-1}(x_m^2+y_m^2),$$

та залежного

$$\Lambda(\mathbf{Z}\mid A,\gamma,\varphi_1) = \sum_{m=0}^{N-1}(x_m s_{x,m} + y_m s_{y,m}) - \frac{N}{2}A^2. \quad (6)$$

При цьому, в другому функціоналі була врахована енергетична тотожність за умови постійної амплітуди сигналу:

$$(s_{x,m}^2 + s_{y,m}^2) \equiv A^2.$$

Незалежність функціоналу $Q(\mathbf{Z}\mid\sigma)$ від параметрів сигналу надає можливість вирішувати задачу пошуку максимуму логарифму ФП (5) тільки з урахуванням першого функціоналу $\Lambda(\mathbf{Z}\mid A,\gamma,\varphi_1)$. У загальному випадку це потребує розв'язку системи трьох рівнянь правдоподібності

$$\partial\Lambda/\partial A = 0, \quad \partial\Lambda/\partial\gamma = 0, \quad \partial\Lambda/\partial\varphi_1 = 0$$

Ці рівняння, відповідно до виразу (6), після диференціювання та елементарних алгебричних перетворень приводяться до наступного розгорнутого вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1}\left[x_m\cos(\gamma m+\varphi_1) + y_m\sin(\gamma m+\varphi_1)\right] - N\cdot A = 0 \\ A\sum_{m=0}^{N-1} m\left[y_m\cos(\gamma m+\varphi_1) - x_m\sin(\gamma m+\varphi_1)\right] = 0 \\ A\sum_{m=0}^{N-1}\left[y_m\cos(\gamma m+\varphi_1) - x_m\sin(\gamma m+\varphi_1)\right] = 0 \end{cases}$$

(7)

Вочевидь, тригонометрична сутність отриманих рівнянь правдоподібності (7) зумовлює суттєву нелінійність оптимізаційної задачі, яка у класичній постановці вирішується за допомогою пошукових ітераційних алгоритмів. Цілком докладно така методологія була досліджена у статті [5].

Але ітераційні алгоритми мають деякі вади, що значно обмежують можливість їхнього застосування на практиці. Це: значні часові витрати, що є критичним для систем обробки високочастотних сигналів у реальному часі; поява нестійкості при зміні характеру завад відносно прийнятого апріорно; залежність від початкового наближення, тобто питання визначення оцінки в явному вигляді залишається й в цьому випадку.

Подальша частина роботи саме присвячена аналітичному синтезу та аналізу квазіоптимальної оцінки частоти за допомогою використання деяких корисних для цього припущень, основним з яких є великий рівень співвідношення потужностей сигналу до шуму (скорочено позначимо SNR):

$$SNR \equiv A^2 / \left(2\sigma^2\right) >> 1 . \qquad (8)$$

При цьому щільність розподілу ймовірностей модуля кожного комплексного відліку

$$\left|\dot{z}_m\right| = \sqrt{x_m^2 + y_m^2}\ , \ m = \overline{0, N-1} \qquad (9)$$

модифікується з райсівського виду до гаусівсського. За таких обставин оцінка амплітуди сигналу може бути попередньо розрахована як усереднене значення цих модулів

$$\hat{A} \approx \frac{\left|\dot{z}_m\right|}{N} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sqrt{x_m^2 + y_m^2}\ .$$

Якщо амплітуда відома, то необхідність у першому рівнянні правдоподібності $\partial\Lambda/\partial A = 0$ відпадає, а у системі (7) суттєвими є лише два останніх рівняння. Невідомими залишаються амплітуда та початкова фаза, за якими необхідно знайти максимум функції правдоподібності.

Поділимо друге та третє рівняння системи (7) на оцінку амплітуди, що є коректним, оскільки за фізичною суттю завжди $\hat{A} > 0$, та отримаємо наступну систему двох рівнянь з двома невідомими γ та φ_1:

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{N-1} m\left[\dfrac{y_m}{\hat{A}}\cos(\gamma m + \varphi_1) - \dfrac{x_m}{\hat{A}}\sin(\gamma m + \varphi_1)\right] = 0 \\ \sum\limits_{m=0}^{N-1} \left[\dfrac{y_m}{\hat{A}}\cos(\gamma m + \varphi_1) - \dfrac{x_m}{\hat{A}}\sin(\gamma m + \varphi_1)\right] = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Окремо розглянемо принципове питання відношення миттєвої та повної фаз деякого квадратурного відліку у спрощеному випадку без впливу шуму. Миттєва фаза розраховується як аргумент одного виміряного відліку:

$$\varphi_m = \arg\left(x_m, y_m\right).$$

Повна фаза за визначенням залежить від поточного номеру відліку

$$\phi_m = \gamma m + \varphi_1 ,$$

але вона є недоступною для безпосереднього фізичного вимірювання. Обидві фази пов’язані за модулем 2π як:

$$\varphi_m = \left|\phi_m\right|_{\mathrm{mod}\, 2\pi} , \qquad (11)$$

тобто значення будь-якої тригонометричної функції від аргументів φ_m та ϕ_m будуть однаковими.

Асимптотичне припущення (8) обумовлює також мале значення коефіцієнта варіації модулів комплексних відліків (9)

$$\mathrm{cv}_{|z|} = \sqrt{\mathrm{var}_{|z|}} \Big/ m_{|z|} << 1 ,$$

де $\mathrm{var}_{|z|}, m_{|z|}$ — дисперсія та математичне очікування модулів. Це дає можливість вважати модулі приблизно однаковими та рівними розрахованій оцінці амплітуди сигналу:

$$\left|\dot{z}_m\right| \approx \hat{A} , \qquad m = \overline{0, N-1} .$$

Таким чином, враховуючи вираз (11) та звичайні тригонометричні тотожності для комплексних величин, можемо прийняти таке:

$$\begin{aligned} \cos\hat{\phi}_m &\equiv \cos\hat{\varphi}_m = \frac{x_m}{\left|\dot{z}_m\right|} \approx \frac{x_m}{\hat{A}} \\ \sin\hat{\phi}_m &\equiv \sin\hat{\varphi}_m = \frac{y_m}{\left|\dot{z}_m\right|} \approx \frac{y_m}{\hat{A}} \end{aligned} . \qquad (12)$$

На підставі формул (12) перетворимо вираз у квадратних дужках обох рівнянь системи (10) наступним чином:

$$\begin{aligned} &\frac{y_m}{\hat{A}}\cos(\gamma m + \varphi_1) - \frac{x_m}{\hat{A}}\sin(\gamma m + \varphi_1) = \\ &= \sin\hat{\phi}_m \cos(\gamma m + \varphi_1) - \cos\hat{\phi}_m \sin(\gamma m + \varphi_1) \equiv \\ &\equiv \sin(\hat{\phi}_m - \gamma m - \varphi_1) . \end{aligned} \qquad (13)$$

Спираючись ще раз на припущення (8), можна впевнено стверджувати, що реальні похибки алгоритмів оцінювання повних фаз відліків також не будуть значними:

$$\left|\Delta\hat{\phi}_m\right| = \left|\hat{\phi}_m - \gamma m - \varphi_1\right| << 1 , \quad m = \overline{0, N-1} .$$

Звідси є слушною апроксимація

$$\sin(\hat{\phi}_m - \gamma m - \varphi_1) \approx \hat{\phi}_m - \gamma m - \varphi_1 . \qquad (14)$$

Питання відновлення повних фаз із множини виміряних поточних фаз $\{\hat{\varphi}_m\}$, подібно до підходу Треттера [6], вважаємо вирішеним [7] та залишаємо його поза увагою.

Здійснивши у рівняннях системи (10) заміну згідно з тотожністю (13), та з урахуванням апроксимації (14) отримаємо модифіковану систему лінійних рівнянь відносно невідомих параметрів сигналу γ, φ_1 у такому вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} m\left(\hat{\phi}_m - \gamma m - \varphi_1\right) = 0; \\ \sum_{m=0}^{N-1} \left(\hat{\phi}_m - \gamma m - \varphi_1\right) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Після тотожних алгебричних перетворень систему (15) можна подати у канонічній формі як систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \gamma \sum_{m=0}^{N-1} m^2 + \varphi_1 \sum_{m=0}^{N-1} m = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{\varphi}_m m; \\ \gamma \sum_{m=0}^{N-1} m + \varphi_1 N = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{\varphi}_m. \end{cases}$$

Розв'язок такої системи рівнянь елементарно здійснюється методом Крамера.

$$\begin{cases} \hat{\gamma} = \Delta_\gamma / \Delta; \\ \hat{\varphi}_1 = \Delta_\varphi / \Delta, \end{cases}$$

де визначники $\Delta, \Delta_\gamma, \Delta_\gamma$ розраховуються за звичайними математичними правилами.

Необхідно звернути увагу, що запропонований у даній роботі метод дозволяє одночасно оцінювати не тільки частоту, а й початкову фазу сигналу.

Оцінка частоти за лінійною регресією повної фази вхідного процесу

Поглянемо на проблему оцінювання частоти з іншого боку як на задачу визначення параметрів моделі лінійної регресії повних фаз комплексного сигналу

$$\phi_m = \gamma m + \varphi_1 + \nu_m .$$

Вирішується вона за допомогою методу найменших квадратів (МНК):

$$\hat{\gamma} = \arg\min_{\gamma,\varphi_1} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\phi_m - \gamma m - \varphi_1\right)^2, \tag{16}$$

який для гауссівського фазового шуму ν_m забезпечує ефективну оцінку параметрів.

Саме такий підхід був змістовно запропонований та детально досліджений у статті [6].

Вочевидь, отримана в процесі синтезу МП-оцінки частоти система рівнянь (15) буде однаковою за розв'язком оптимізаційного функціоналу (16). Таким чином, здійснений синтез доводить, що евристична оцінка частоти Треттера (16) є частковим випадком запропонованої МП-оцінки. Безумовно, проблема поновлення повних фаз , як й у методі Треттера, залишається, і повинна вирішуватися попередньо за відомих алгоритмів [7].

Висновки

1. Припущення про значну потужність корисного сигналу у порівнянні з гауссівським некорельованим шумом дає можливість синтезувати оцінки частоти та початкової фази сигналу в явному аналітичному вигляді.

2. Оцінка частоти, що запропонована Треттером на підставі лінійної регресії повної фази вхідного процесу, є частковим випадком синтезованої МП-оцінки.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Fu H.* Sample-Autocorrelation-Function-Based Frequency Estimation of a Single Sinusoid in AWGN / H. Fu, P. Kam // IEEE: Conf. VTC. — 2012. — P. 75.
2. *Awoseyila A. B.* Improved single frequency estimation with wide acquisition range / A. B. Awoseyila, C. Kasparis, B. G. Evans // IET Electronic Letter — 2008, Jan. — № 3 (v. 44). — P. 245–247.
3. *Oppenheim A. V.* Applications of Digital Signal Processing / A. V. Oppenheim, ed. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. — 1978. — 451 p.
4. *Fu H.* MAP/ML estimation of the frequency and phase of a single sinusoid in noise / H. Fu, P. Kam // IEEE: Transactions on signal processing. — 2007. — № 3 (v. 55). — P. 834–845.
5. *Rife D. C.* Single-tone parameter estimation from discrete-time observations / D. C. Rife, R. R. Boorstyn // IEEE: Transactions on information theory. — 1974. — № 5 (v. IT-20). — P. 591–598.
6. *Tretter S. A.* Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression / S. A. Tretter // IEEE: Transactions on information theory. — 1985. — № 6 (v. IT-31). — P. 832–835.
7. *Steiglitz K.* Phase unwrapping by factorization / K. Steiglitz, B. Dickinson // IEEE: Truns. acoust. speech, and SQML processrng. — 1982. — № 6, (v. ASSP-30). — P. 984–991.

Стаття надійшла до редакції 28.05.2015