

УДК 539.3:534.1

**ТРАНСФОРМАЦІЯ ЕНЕРГІЇ ЗГИНАЛЬНОЇ ХВИЛІ НА СХОДИНЦІ
ПРИ РІЗНИХ МЕХАНІЧНИХ ПАРАМЕТРАХ КОНТАКТУЮЧИХ СЕРЕДОВИЩ**

Н. С. Городецька, д-р фіз.-мат. наук, проф.; *О. О. Неділько*

Інститут гідромеханіки НАН України
nsgihm@gmail.com

Проведено розрахунок дифракції згинальної хвилі Релея–Лемба на вертикальній межі хвилеводу, утвореного жорстким контактом двох півшарів різної ширини і з різними механічними характеристиками. Показано, що існує два частотних діапазони з локальними максимумами енергій відбитого поля. Перший максимум, зумовлений появою другої поширюваної хвилі, спостерігається в околі критичної частоти для другої поширюваної хвилі. Другий максимум існує в більш високочастотній області та зумовлений значним збудженням неоднорідних хвиль.

Ключові слова: пружні хвилі, неоднорідний хвилевід, трансформація енергії, метод суперпозиції.

The diffraction of the Rayleigh-Lamb wave on a vertical boundary of the waveguide formed by a strong contact of two halfstrips is calculated for case of their different widths and different mechanical properties. It was shown, that there are two frequency range, which is observed increasing energy of the reflected field. The first maximum of the energy of the reflected field observed near the locking frequency for the second propagating wave. It is caused by the existing of the second propagation wave. Second peak exists in the higher frequency region and caused considerable excitement evanescent waves.

Keywords: elastic waves, inhomogeneous waveguide, energy transformation, the method of superposition.

Вступ

Розв'язання багатьох прикладних задач геофізики, сейсмології, неруйнівного контролю засноване на аналізі дифракції хвиль на неоднорідностях. Під неоднорідністю розуміємо різку зміну фізичних або геометричних параметрів елементів конструкцій.

Для пружних тіл найчастіше використовуються хвилі Лемба. Ці хвилі дуже чутливі до наявності неоднорідності у хвилеводі, тому знаходженням залежностей між видом неоднорідності та її розташуванням і характеристикам хвиль Лемба присвячено величезну кількість робіт. Розсіювання хвилі Лемба, що поширюється, на неоднорідності є складним процесом — збуджуються відбите і пройдене поля, які містять як поширювані хвилі, так і неоднорідні хвилі, при цьому амплітудні і фазові характеристики цих хвиль частотно залежні. Хвильові характеристики розсіяних хвиль містять інформацію про неоднорідність [1; 2].

Для розшифрування цієї інформації необхідно, з одного боку, отримати достатній обсяг да-

них про характер зміни розсіяного поля, а з іншого — розуміння фізичних причин, які зумовлюють ці зміни.

Перш за все аналізуються розсіяні поля на конкретних видах неоднорідностей. В даній роботі як неоднорідний хвилевід розглядався складений хвилевід, утворений жорстким контактом двох півшарів різної ширини та з різними механічними характеристиками.

Варто зазначити, що при дифракції нормальних хвиль на неоднорідності в пружних хвилеводах на певних частотах спостерігаються резонансні явища, які проявляються в різкій зміні відбиваючих властивостей границі [3; 4; 5]. При цьому частота, на якій спостерігаються такі резонанси, залежить від багатьох факторів. Зокрема, від типу неоднорідності, симетрії коливальних, геометричних характеристик неоднорідності, зміни механічних характеристик контактуючих середовищ. Дана робота спрямована на встановлення визначальних факторів, які зумовлюють виникнення резонансних явищ у пружних неоднорідних хвилеводах.

На сьогодні розроблено різні чисельні і чисельно-аналітичні методи оцінювання кількісних даних, розсіяних на різних видах неоднорідностей хвильових полів [3–6].

Математично відповідна гранична задача досить складна, оскільки в точці зміни типу граничних умов існує локальна особливість за напруженнями. Існування цієї особливості проявляється в необмеженому зростанні напружень при наближенні до особливих точок. У зв'язку з цим докладне вивчення ближнього поля повинно ґрунтуватися на використанні методу, здатного адекватно описати наявність локальних особливостей.

У даній роботі для розв'язку відповідної граничної задачі використовувався метод суперпозиції, який дає змогу врахувати особливість за напруженнями через асимптотичні властивості невідомих.

У роботі використовувалась ще одна важлива перевага методу суперпозиції — можливість представлення отриманого розв'язку граничної задачі через нормальні хвилі. Це дозволяє дати фізичне трактування знайдених явищ. Значну увагу приділено не тільки математичному обґрунтуванню використовуваного методу розв'язання, але й систематизації та узагальненню знайдених закономірностей формування хвильових полів для окремих найбільш характерних випадків.

Мета роботи — вивчення хвильових характеристик поля при згінних коливаннях пружного неоднорідного хвилеводу; розробка чисельно-аналітичних методів розв'язку відповідних граничних задач; виявлення нових механічних ефектів та їх трактування на основі аналізу структури хвильового поля; розв'язання методом суперпозиції граничної задачі про антисиметричні коливання ступінчатого хвилеводу, утвореного жорстким контактом двох півшарів різної ширини та з різними механічними характеристиками; аналіз енергетичних особливостей розподілу енергії, що вноситься в неоднорідний хвилевід, між різними хвилями, що поширюється; дослідження закономірностей збудження неоднорідних хвиль при згінних коливаннях неоднорідного хвилеводу в області високих частот.

Постановка задачі

Розглядається стаціонарне хвильове поле в пружному хвилеводі ($-\infty < Z < \infty$), утвореному жорстким з'єднанням двох пружних півшарів різної товщини $2h$ і $2H$ і з різними механічними характеристиками.

Властивості середовища характеризуються модулями зсуву $\tilde{\mu}, \mu$, коефіцієнтами Пуассона

$\tilde{\nu}, \nu$ і густинами $\tilde{\rho}, \rho$. Більш широкий хвилевід не має індексу, а величини у вузькому позначаються тильдою. Падаючій хвилі відповідає індекс 0. Поверхні $Y = \pm h, Z \leq 0, Y = \pm H, Z \geq 0$ вільні від напружень.

Для переходу до безрозмірних величин нормуємо на H ($y = Y/H, z = Z/H$ — координати).

Хвильове поле збуджується першою нормальною згинальною хвилею, яка поширюється в більш вузькому хвилеводі, надходить з $(-\infty)$. У зоні контакту виконуються умови спряження за напруженнями і переміщеннями, які записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= \begin{cases} \sigma(y, 0), & |y| \leq \alpha; \\ 0, & \alpha < |y| \leq 1, \end{cases} \\ \tilde{\tau}_{zz}(y, 0) + \tau_{zz}^{(0)}(y, 0) &= \begin{cases} \tau_{zz}(y, 0), & |y| \leq \alpha; \\ 0, & \alpha < |y| \leq 1, \end{cases} \quad (1) \\ u_z(y, 0) &= \tilde{u}_z(y, 0) + u_z^{(0)}(y, 0), \quad |y| \leq \alpha, \\ u_y(y, 0) &= \tilde{u}_y(y, 0) + u_y^{(0)}(y, 0), \quad |y| \leq \alpha, \end{aligned}$$

де $\alpha = h/H$.

Необхідно знайти вектори переміщень у відбитому і пройденому полях, які задовольняють задані граничні умови, умови спряження та векторне рівняння Ламе

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Для розв'язання поставленої граничної задачі застосовувався метод суперпозиції [6], який дозволяє врахувати особливості за напруженнями в кутових точках. У рамках цього методу побудуємо розв'язок граничної задачі для антисиметричних коливань ступінчатого хвилеводу. Слідуючи загальній схемі методу суперпозиції [7], компоненти вектора переміщень у пройденому полі ($z > 0$) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} u_z &= - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z}) \sin \beta_k y - \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_z(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau; \\ u_y &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z}) \cos \beta_k y + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_y(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau; \quad (3) \\ U_z(\tau, y) &= \tau \left(-p_2 \frac{sh p_2 y}{ch p_2} + \frac{\tau^2 + p_2^2}{2 p_1} \frac{sh p_1 y}{ch p_1} \right); \\ U_y(\tau, y) &= \tau^2 \frac{ch p_2 y}{ch p_2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{2} \frac{ch p_1 y}{ch p_1}, \end{aligned}$$

$$p_j(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| \leq \Omega_j, \end{cases} \quad j=1,2,$$

$$\beta_k = \frac{2k-1}{2}\pi, \quad q_j = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & \beta_k \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & \beta_k < \Omega_j. \end{cases}$$

$\Omega_j = \frac{\omega h}{c_j}, j=1,2$ — нормована частота; c_1 — швидкість повздовжніх хвиль; c_2 — швидкість поперечних хвиль.

Розв'язок для відбитого поля ($z < 0$) отримуємо з формули (3) при заміні невідомих A_k, B_k на C_k, D_k , зміні знака для u_z та заміні y на y/α , а z на z/α .

Виконання граничних умов на поверхнях $y = \pm\alpha$, $y = \pm 1$ і умов спряження (1) приводить до системи інтегро-алгебричних рівнянь. Аналіз асимптотичних властивостей невідомих у цих рівняннях проведений відповідно до характеру локальної особливості напружень у кутовій точці [8]. Алгоритм розв'язання системи виконаний аналогічно праці [5], і тут на ньому зупинятися не будемо, а перейдемо до аналізу чисельних результатів. Вивчення розсіяного на межі розподілу хвильового поля в ступінчатому хвилеводі почнемо з енергетичних оцінок відбитого і пройденого полів. Середній за період потік потужності через поперечний переріз пов'язаний тільки з модами, що поширюються, і дорівнює сумі потужностей, які переносять окремо поширювані моди. Для відбитого поля потік потужності (W_z) вздовж осі хвилеводу знаходиться за співвідношенням:

$$W_z = \sum_{k=1}^K W_z^{(k)}; \quad W_z^{(k)} = \frac{i\omega}{2} |C_k|^2; \quad (4)$$

$$\int_{-h}^h [\sigma_{zz}(\xi_k, y) u_z(\xi_k, y) - \tau_{zy}(\xi_k, y) u_y(\xi_k, y)] dy.$$

$$W_z^{(k)} = \omega \mu \frac{\Omega_2^2}{2} \Delta'(\xi); \quad C_k = \text{Res}_{\tau=\xi_k} x(\tau);$$

$$\Delta(\tau) = \tau^2 p_2 t h p_2 - (2\tau^2 - \Omega_2^2)^2 \frac{t h p_1}{4 p_1} = 0,$$

де $W_z^{(k)}$ — потужність; C_k — амплітуда k -ї поширюваної моди; $\Delta(\tau) = 0$ — дисперсійне рівняння; ξ_k — дійсний корінь дисперсійного рівняння. Потік потужності у пройденому полі знаходиться аналогічно.

Аналіз попередніх результатів показує, що з погляду існування й ефективності прояву резонансу є визначальними два фактора.

Перший — це те, з якого середовища падає хвиля — з більш жорсткого, чи з м'якшого, а другий — де раніше у відбитому чи в пройденому полі з'являється поширювана хвиля вищого порядку. Для неоднорідного хвилеводу, що розглядається, при одночасній зміні механічних і геометричних (товщин півшарів (h, H)) параметрів можлива ситуація, коли у відбитому і пройденому полях моди вищих порядків з'являються одночасно. На рис. 1 показано частотну залежність нормованого потоку потужності у відбитому полі для різних співвідношень товщин контактуючих півшарів.

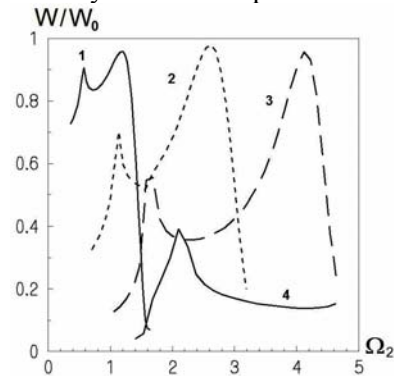


Рис. 1. Частотна залежність нормованого потоку потужності у відбитому полі для різних α

Хвилі, що падає з більш вузького хвилеводу, відповідають параметри — більш вузький півшар:

$$\mu_1 = 1,05 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \quad \rho_1 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$v_1 = 0,3$ більш широкий півшар:

$$\mu_2 = 3,14 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \quad \rho_1 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad v_2 = 0,17.$$

Кривій 1 відповідає величина $\alpha = 0,2$; 2 — $\alpha = 0,4$; 3 — $\alpha = 0,6$. При зазначеному співвідношенні параметрів для $\alpha = 0,2$, $\alpha = 0,4$ в пройденому полі з'являється друга поширювана хвиля раніше, ніж у відбитому. При $\alpha = 0,6$ у відбитому і пройденому полях другі поширювані хвилі з'являються практично одночасно. При $\alpha = 0,8$ у відбитому полі з'являється друга поширювана хвиля раніше, ніж у пройденому. Оцінимо відношення згінних жорсткостей контактуючих півшарів $D_1/D_2 = \alpha^3 \mu_1/\mu_2 = 0,33\alpha^3$. Для всіх розглянутих величин α хвиля падає з більш м'якого середовища в більш жорстке. Для кривих 1, 2 і 3 на двох частотах спостерігається максимум енергії відбитого поля. Для кривих $\alpha = 0,2$, $\alpha = 0,4$ перший максимум спостерігається на частоті, на якій у пройденому полі з'являється друга поширювана хвиля. Для кривої $\alpha = 0,6$ максимум енергії відбитого поля спостерігається на частоті, на якій у відбитому полі

з'являється друга поширювана хвиля. Крива $\alpha = 0,8$ має тільки один максимум відбитого поля, який спостерігається на частоті вище критичної частоти для другої відбитої поширюваної хвилі.

Зазначимо також, що зі зростанням α на частоті першого максимуму величина відбитої енергії зменшується. Зменшення енергії у відбитому полі з ростом α спостерігалось при розсіянні першої нормальної хвилі на границі ступінчатого хвилеводу за умови однакових механічних характеристик в обох півшарах [9].

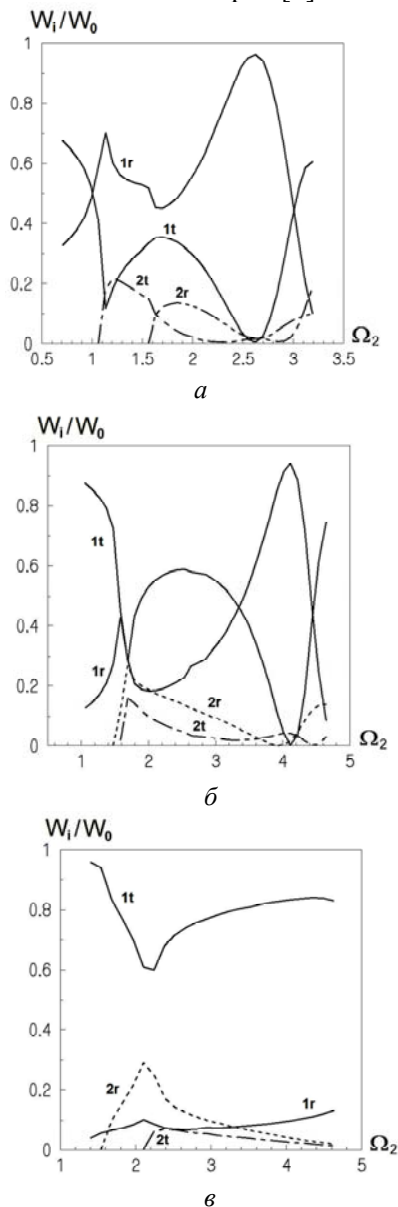


Рис. 2. Частотна залежність нормованого потоку потужності для різних поширюваних хвиль

На рис. 2, а, б, в показано частотні залежності нормованої енергії різних хвиль, що поширюються. По осі Ω_x відкладена нормована частота, відповідна падаючій хвилі (вужчий хвилевід). Номер кривої відповідає номеру хвилі, що поширюється.

Індекс r відповідає відбитим хвилям, t — пройденим. Індекс a відповідає $\alpha = 0,2$; б — $\alpha = 0,2$; в — $\alpha = 0,8$.

Для випадків ($\alpha = 0,2, \alpha = 0,4$), коли друга поширювана хвиля у пройденому полі з'являється раніше, ніж у відбитому, потік потужності, який переносить перша поширювана хвиля, що пройшла в другий півшар, різко спадає в околі критичної частоти. Максимум енергії у відбитому полі зумовлений саме різким зменшенням енергії, що переносить перша пройдена хвиля. Для $\alpha = 0,2$ хвилі вищих порядків з'являються практично одночасно як у відбитому, так і в пройденому полях.

Як видно з рис. 2, б у разі появи у відбитому полі другої поширюваної хвилі, вона вносить суттєвий вклад в енергію відбитого поля. На частоті першого локального максимуму енергії відбитого поля перша і друга поширювані хвилі переносять практично однакову енергію. Для $\alpha = 0,8$ у відбитому полі друга поширювана хвиля з'являється раніше, ніж у пройденому і її вплив на трансформацію енергії падаючої хвилі зростає.

Таким чином, перший локальний максимум енергії відбитого поля у ступінчатому хвилеводі зумовлений появою другої поширюваної хвилі. Якщо друга поширювана хвиля з'являється раніше у пройденому полі, то цей максимум спостерігається на критичній частоті для даної хвилі. Якщо друга поширювана хвиля з'являється раніше у відбитому полі, то максимум енергії відбитого поля знаходиться вище критичної частоти для даної хвилі.

Другий максимум енергії відбитого поля спостерігається на більш високих частотах і зумовлений значним збудженням неоднорідних хвиль.

Висновки

Таким чином, при трансформації енергії падаючої хвилі на межі в ступінчатому хвилеводі існує два діапазони частот, на яких спостерігається максимум енергії відбитого поля. Перший максимум має місце в околі критичної частоти для другої поширюваної хвилі і обумовлений її появою. Величина енергії зменшується зі збільшенням α . Другий пік енергії відбитого поля спостерігається в області більш високих частот і обумовлений значним збудженням неоднорідних хвиль.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cho Y. An elastodynamic hybrid boundary element study for elastic wave interactions with a surface breaking defect / Cho Y., Rose JL. // Int. J. Sol. Struct. — 2000. — P. 4103–4124.

2. *Benmmeddour F.* Study of the fundamental Lamb modes interaction with symmetrical notches / F. Benmmeddour, S. Grondel, J. Assaad, E. Moulin // *NDT & E International*. — 2008. — P. 1–9.
3. *Glushkov E. V.* Blocking property of energy vortices in elastic waveguides / E. V. Glushkov, N. V. Glushkova // *J. Acoust. Soc. Amer.* — 1997, № 3. — P. 1356–1360.
4. *Гетман И. П.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И. П. Гетман, Ю. А. Устинов. — Ростов на Дону : Изд-во Ростов. ун-та, 1993. — 142 с.
5. *Городецкая Н. С.* Энергетические особенности дифракции изгибных волн на вертикальной границе в составном волноводе / Н. С. Городецкая, Е. А. Неділько // *Акустичний вісник*. — 2012, № 2. — С. 17–27.
6. *Вовк Л. П.* Анализ локальных особенностей волнового поля в сингулярных точках составной области / Л. П. Вовк // *Вісник Сумського держ. університету*. — Секція: Фізика, математика, механіка, 2003, № 56. — С. 144–156.
7. *Гринченко В. Т.* Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. — К. : Наук. думка, 1981. — 284 с.
8. *Боджи Д.* Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной грани упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы / Д. Боджи // *Прикладная механика. Тр. Амер. общ. инж.-мех.* — 1971, № 2. — С. 87–96.
9. *Городецка Н. С.* Трансформація згинних хвиль на вертикальній границі у ступінчастому хвилеводі / Н. С. Городецка, О. О. Неділько // *Доповіді НАН України, Математика, природознавство, технічні науки*, 2014, № 9. — С. 55–60.

Стаття надійшла до редакції 25.02.2015