УДК 519.6:532.511(045)

МАТЕМАТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ГІДРОДИНАМІКИ

О. М. Глазок, канд. техн. наук, доц.

Національний авіаційний університет

kozalg@ukr.net

Наведено математичний метод розв'язання систем нелінійних рівнянь, утворених чисельною моделлю гідродинамічної задачі. Запропонований метод містить параметр якості динамічного процесу пошуку розв'язку, що дозволяє керувати швидкістю збіжності. Визначено підходи до подальшого зменшення розмірності простору пошуку та організації розв'язання обчислювальної задачі на багатопроцесорній або розподіленій обчислювальній системі.

Ключові слова: гідродинамічна задача, чисельне моделювання, нелінійні рівняння, розмірність.

A mathematical method of solving of systems of nonlinear equations, produced by the numeral model of hydrodynamic problem, is offered. The offered method contains the parameter of quality of dynamic process of search of a solution, that allows to control the speed of convergence. Approaches to the subsequent diminishing of dimension of search space and organization of solution of computing problem on the multi-processor or distributed computer system are offered.

hydrodynamic problem, numerical simulation, nonlinear equations, dimensionality.

Вступ

У практиці проектних організацій широко використовуються пакети прикладних програм, що виконують гідродинамічний розрахунок тих або інших інженерних систем.

Програмне забезпечення цього класу нині активно розвивається. Оскільки інтереси розробників у багатьох випадках передбачають дослідження турбулентного руху рідин і газів, такі комплекси комплектуються наборами моделей турбулентності різних рівнів складності [1].

Сучасний підхід до математичного моделювання ламінарних і турбулентних течій ґрунтується на припущенні про прийнятність рівнянь Нав'є–Стокса для інтерпретації течій і прогнозу їх миттєвих характеристик. (Для турбулентних течій розглядаються статистичні властивості ансамблю течій при однакових з макроскопічного погляду зовнішніх умовах).

З-поміж методів моделювання турбулентних потоків зазвичай виділяють пряме чисельне моделювання (ПСМ), моделювання крупних вихорів (МКВ), розв'язання усереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є–Стокса (РНС).

Є також комбіновані підходи, що поєднують у собі ті або інші ознаки ПСМ, МКВ і РНС, наприклад, метод моделювання від'єднаних вихорів (ММВВ), і ряд інших, менш поширених методів.

Постановка проблеми

Пряме чисельне моделювання (ПЧМ) включає розв'язання повних рівнянь Нав'є–Стокса, що дає змогу отримати миттєві характеристики турбулентного потоку. Крім того, статистика, отримана за результатами ПЧМ, може бути використана для розробки та дослідження моделей процесів турбулентного перенесення, розвитку методів керування турбулентними потоками тощо [2; 3].

Зважаючи на обмежені можливості вимірювальної техніки, ПЧМ можна використати як додаткове джерело експериментальних даних (наприклад, при дослідженні таких характеристик течії, як пульсації, тиск, завихреність, швидкість дисипації турбулентної енергії, а також для візуалізації миттєвої картини течії). Перешкоди до широкого використання методів чисельного моделювання на практиці пов'язані з суперечностями між високими вимогами до розрахункових схем, різницевих схем та описів початкових і граничних умов, що використовуються в розрахунках, з одного боку, та обмеженими ресурсами обчислювальної техніки — з іншого. Типові інженерні задачі обчислювальної аеро- та гідродинаміки потребують місяців роботи комп'ютерних кластерів. Застосування таких методів, як РНС, МКВ та інших, дозволяє дещо скоротити обсяг обчислень, порівняно з ПЧМ, але принципового розв'язання проблеми не дає.

Таким чином, актуальною науковою проблемою є розробка таких методів та підходів до розв'язання вказаних задач, які б дозволили зменшити кількість необхідних розрахунків.

Мета статті — запропонувати математичний метод розв'язання задач обчислювальної гідродинаміки, застосування якого дозволить зменшити кількість необхідних розрахунків, порівняно з існуючими методами.

Аналіз досліджень і публікацій

У статті використовується математична модель гідродинамічного процесу у вигляді рівнянь Нав'є–Стокса.

Були виконані численні дослідження, які описані в джерелах [4–6], на думку їх авторів, підтверджують припущення про адекватність цієї моделі.

Для отримання адекватних результатів розрахункова область має бути достатньо протяжною, щоб вміщати найбільші масштаби турбулентного руху. З іншого боку, крок сітки має бути достатньо малим. Необхідну кількість вузлів однорідної розрахункової сітки за i-м просторовим виміром N_i та кількість кроків інтегрування в часі N_T можна оцінити за такими формулами [7]:

$$N_i = L_i/\Delta_i\,;\ N_T = T/\Delta_t,$$

де L_i — розмір розрахункової області за i-м виміром; T — загальна тривалість інтегрування (інтервал інтегрування в часі); Δ_i — просторовий крок сітки за i-м виміром; Δ_t — крок інтегрування за часом.

Необхідною умовою для отримання адекватних результатів розрахунку є використання такої різницевої сітки, яка дозволить врахувати в отриманій чисельній моделі найменші вихори турбулентного потоку, що мають розміри порядку колмогоровського масштабу довжини, а крок інтегрування в часі повинен мати порядок колмогоровського масштабу часу. Звідси випливають обмеження згори на величини Δ_i та Δ_t, а відтак і обмеження знизу на величини N_i та N_T.

У публікаціях [8; 9] було запропоновано метод розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь за другим методом Ляпунова, що забезпечує отримання динамічних процесів наближення до точного розв'язку із заданими показниками якості і припускає можливість керування швидкістю збіжності ітераційного процесу.

Ідею цього методу можна застосувати до задач, що розглядаються у даній статті.

Основна частина

Для прикладу розглянемо двовимірну гідродинамічну задачу, описану рівняннями Нав'є–Стокса такої форми:

$$\frac{\partial U_x}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}(U_X U_X) + \frac{\partial}{\partial y}(U_Y U_X) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U_X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_X}{\partial y^2}\right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_Y}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}(U_X U_Y) + \frac{\partial}{\partial y}(U_Y U_Y) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 U_Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_Y}{\partial y^2}\right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_X}{\partial x} + \frac{\partial U_Y}{\partial y} = 0\,, \quad (3)$$

де $U_X = U_X(x, y)$ та $U_Y = U_Y(x, y)$ — компоненти вектора швидкості за координатами x та y відповідно; $P = P(x, y)$ — тиск; ν — в'язкість (густина) рідини; ρ — щільність рідини.

Для компактності запису введемо позначення

$$U_X(x,y) = f(x,y);\ U_Y(x,y) = g(x,y)\,. \quad (4)$$

З урахуванням позначень (4) запишемо різницеву схему для системи (1)–(3) на прямокутній розрахунковій сітці:

$$2f_{i,j}\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta_x} + g_{i,j}\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta_y} + f_{i,j}\frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{\Delta_y} + \frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta_x} - \nu\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta_x^2} - \nu\frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta_y^2} = 0\,; \quad (5)$$

$$g_{i,j}\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta_x} + f_{i,j}\frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{\Delta_x} + 2g_{i,j}\frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{\Delta_y} + \frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta_x} - \nu\frac{g_{i+1,j} - 2g_{i,j} + g_{i-1,j}}{\Delta_x^2} - \nu\frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{\Delta_y^2} = 0\,; \quad (6)$$

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta_x} + \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{\Delta_y} = 0\,, \quad (7)$$

де $f_{i,j}$, $g_{i,j}$, $P_{i,j}$ — значення функцій $f(x,y)$, $g(x,y)$, $P(x,y)$ у точці розрахункової сітки з номером (i, j); Δ_x та Δ_y — кроки розрахункової сітки за координатами x та y відповідно. У рівняннях системи (5)–(7) використано порядок індексів, що відповідає алфавітному розташуванню змінних (перший індекс відповідає координаті x, другий – координаті y).

Пропонується використати ітераційний метод розв'язання системи рівнянь (5)–(7), оснований на побудові допоміжної (цільової) функції. Подамо систему (5)–(7) в узагальненій формі:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(H)=e_1;\\ &\lambda_2(H)=e_2;\\ &\quad\dots\\ &\lambda_k(H)=e_k, \end{aligned} \qquad (8)$$

де λ_* — узагальнені оператори, що відповідають функціям лівих частин різницевих рівнянь системи; $H=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ — множина узагальнених аргументів, елементами якої є невідомі значення функцій f_{**}, g_{**}, P_{**} у точках розрахункової сітки; e_* — праві частини рівнянь, що не залежать від узагальнених аргументів a_*; k — загальна кількість рівнянь системи; l — загальна кількість узагальнених аргументів.

Побудуємо допоміжну функцію, значення якої характеризує норму нев'язки системи (8) при проміжних значеннях узагальнених аргументів, знайдених на поточному кроці ітераційного процесу:

$$V=\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_1(\dots)-e_1\right)^2. \qquad (9)$$

Введемо допоміжне диференціальне рівняння, яке задає умову на швидкість збіжності ітераційного процесу:

$$\dot V + cV = 0, \qquad (10)$$

де c — постійна величина — параметр якості динамічного процесу пошуку розв'язку; $\dot V=\dfrac{\partial V}{\partial t}$; t — відносний (розрахунковий) час, пов'язаний з кількістю ітерацій розрахункового процесу.

Під час розрахунку узагальнені аргументи a_i змінюються, і у разі збіжності процесу наближаються до точних розв'язків системи рівнянь (5)–(7).

Тому функція V (9) залежить від часу t не напряму, а внаслідок наявності залежностей $a_i(t)$. Враховуючи це, можна записати:

$$\dot V = 2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\lambda_i(\dots)-e_i\right)\frac{\partial\lambda_i(\dots)}{\partial t}\right]= \\ =2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\lambda_i(\dots)-e_i\right)\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{\partial\lambda_i(\dots)}{\partial a_j}\dot a_j\right]\right]$$

і допоміжне рівняння (10) набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\lambda_i(\dots)-e_i\right)\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{\partial\lambda_i(\dots)}{\partial a_j}\dot a_j\right]\right]+ \\ +c\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_1(\dots)-e_1\right)^2=0.$$

Також можуть бути використані допоміжні умови у вигляді системи рівнянь

$$\dot P_i=-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial P_i},\ \varepsilon=cV,\ i=1..k.$$

Скорочення розмірності простору пошуку

При розв'язанні систем лінійних алгебричних рівнянь із тридіагональною матрицею системи широко використовується метод прогонки та його модифікації [10]. Ідея методу полягає у послідовному знаходженні виразів для наступних компонентів вектора невідомих величин через попередні. Застосуємо подібний прийом до системи (5–7). Для цього перетворимо її рівняння таким чином:

$$\begin{aligned} &\Delta_y^2\left(2\Delta_x f_{i,j}-\nu\right)f_{i+1,j}+\Delta_x^2\left(\Delta_y g_{i,j}-\nu\right)f_{i,j+1}+\\ &+\Delta_x^2\Delta_y f_{i,j}g_{i,j+1}+\frac{\Delta_x\Delta_y^2}{\rho}P_{i+1,j}=\\ &=2\Delta_x\Delta_y^2 f_{i,j}f_{i,j}+2\Delta_x^2\Delta_y f_{i,j}g_{i,j}+\\ &+\frac{\Delta_x\Delta_y^2}{\rho}P_{i,j}-2\nu\left(\Delta_x^2+\Delta_y{}^2\right)f_{i,j}+\\ &+\nu\Delta_y^2 f_{i-1,j}+\nu\Delta_x^2 f_{i,j-1}; \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} &\Delta_x\Delta_y^2 f_{i+1,j}\,g_{i,j}+\Delta_y^2\left(\Delta_x f_{i,j}-\nu\right)g_{i+1,j}+\\ &+\Delta_x^2\left(2\Delta_y\,g_{i,j}-\nu\right)g_{i,j+1}+\frac{1}{\rho}\Delta_x^2\Delta_y\,P_{i+1,j}=\\ &=2\Delta_x\Delta_y^2 f_{i,j}g_{i,j}+2\Delta_x^2\Delta_y g_{i,j}g_{i,j}+\\ &+\frac{1}{\rho}\Delta_x^2\Delta_y P_{i,j}-2\nu\left(\Delta_x^2+\Delta_y^2\right)g_{i,j}+\\ &+\nu\,\Delta_y^2 g_{i-1,j}+\nu\,\Delta_x^2 g_{i,j-1}; \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\Delta_y f_{i+1,j}+\Delta_x g_{i,j+1}=\Delta_y f_{i,j}\Delta_x g_{i,j}. \qquad (13)$$

Рівняння (11)–(13) складені таким чином, що в їх лівих частинах наявні величини з індексами (i + 1) та (j + 1), а в правих частинах — тільки величини з індексами (i), (j), (i – 1) та (j – 1). Тепер можна поставити (аналогічно до методу прогонки) задачу отримання для кожної точки з індексами (i, j) виразів наступних невідомих величин через попередні. Рівняння (11)–(13) дозволяють розв'язати цю задачу частково, оскільки у трьох рівняннях присутні шість величин, які треба виразити через попередні: $f_{i+1,j}$, $g_{i+1,j}$, $P_{i+1,j}$, $f_{i,j+1}$, $g_{i,j+1}$, $P_{i,j+1}$. Таким чином, можна отримати вирази для двох із цих величин — наприклад, $P_{i+1,j}$ і $P_{i,j+1}$, і таким чином скоротити на третину розмірність простору пошуку, оскільки замість трьох невідомих функцій залишається знайти лише дві — $f(x,y)$ та $g(x,y)$. Третю величину немає сенсу виражати при цьому підході, оскільки для подальшого скорочення простору пошуку необхідно б було виразити ще і четверту величину — наприклад, $g_{i+1,j}$ і $g_{i,j+1}$ — а для цього наявних рівнянь недостатньо.

Організація паралельних обчислень

У статті [9] було запропоновано блоковий підхід до розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь. Системи рівнянь (1)–(3) та (5)–(7) є нелінійними щодо невідомих величин. Однак до їх розв'язання можна застосувати аналогічний блоковий підхід. Так, систему (5)–(7) можна розбити на кілька груп рівнянь, відповідно до кількості процесорів багатопроцесорної або розподіленої обчислювальної системи.

У кожній із груп рівнянь виділити в ліві частини доданки, що містять величини, пошук яких буде проводитись у поточному раунді. Решту доданків перенести в праві частини, а значення змінних у них зафіксувати, після цього проводити розв'язання блокових підзадач за методом (8)–(10) або іншим. Обмін даними між окремими підзадачами можна організувати за рахунок наявності перекриття груп, або вносити нові значення змінних, отримані кожним із процесорів, в обчислювальні процеси інших процесорів, за релаксаційним принципом.

Висновки

Було запропоновано математичний метод розв'язання систем нелінійних рівнянь, утворених чисельною моделлю гідродинамічної задачі. Запропонований метод ґрунтується на використанні допоміжної функції і містить параметр якості динамічного процесу пошуку розв'язку, що дозволяє керувати швидкістю збіжності системи.

Запропоновано підходи до подальшого зменшення розмірності простору пошуку та організації розв'язання обчислювальної задачі на багатопроцесорній або розподіленій обчислювальній системі.

Можливими напрямами подальших досліджень є вивчення обчислювальної ефективності реалізації запропонованого методу у випадку двовимірних та тривимірних задач; оптимізація виразів, що застосовуються для скорочення розмірності простору пошуку, з погляду швидкості наближення до точного розв'язку; дослідження можливості скоротити простір пошуку за порядком за рахунок раціонального використання співвідношень (11)–(13); оптимізація інформаційних процесів обміну даними між блоками у багатопроцесорній (розподіленій) системі; вивчення можливості застосування запропонованого методу до задач на нерегулярних сітках.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Tu Jiyuan.* Computational Fluid Dynamics, Second Edition: A Practical Approach //Jiyuan Tu, Guan Heng Yeoh, Chaoqun Liu. — Butterworth-Heinemann, 2012. — 456 p.
2. *Moin P.* Direct numerical simulation. A tool in turbulence research / P. Moin, K. Mahesh // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1998, V. 30. — P. 539–578.
3. *Липанов А. М.* Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков / А. М. Липанов, Ю. Ф. Кисаров, И. Г. Ключников. — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — 160 с.
4. *Белов И. А.* Моделирование турбулентных течений / И. А. Белов, С. А. Исаев. — СПб. : Балт. гос. техн. ун-т «Военмех», 2001. — 108 с.
5. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М. : Наука, 1987. — 840 с.
6. *Липанов А. М.* Теоретическая гидродинамика ньютоновских сред /А. М. Липанов. — М. : Наука, 2011. — 551 с.
7. *Волков К .Н.* Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений /К. Н. Волков, В. Н. Емельянов. — М. : Физматлит, 2008. — 368 с.
8. *Глазок О. М.* Метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за другим методом Ляпунова / О. М. Глазок //Авіа-2009: IX міжнар. наук.-техн. конф., 21–23 вересня 2009 р.: тези доп. — К., 2009. — Т. 1. — С. 5.22–5.25.
9. *Glazok O. M.* Method of solving systems of linear algebraic equations in the distributed calculating environment /O. M. Glazok //Proceedings of the National Aviation University. — 2010. — № 3 (44). — P. 50–54.
10. *Mattor N.* Algorithm for solving tridiagonal matrix problems in parallel / N. Mattor, J. T. Williams, W. Dennis Hewett //Parallel Computing. — Volume 21, Issue 11, November 1995. — P. 1769–1782.

Стаття надійшла до редакції 21.05.2014.