

УДК 519.246.8:627.152.15:504.064.2 (045)

## ФРАКТАЛЬНО-СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ КОЛИВАННЯ РІВНІВ ВОДИ РІЧКИ ТРУБІЖ

Є. Г. Борисенко, В. А. Гроза, канд. фіз.-мат. наук, доц.  
О. Л. Лещинський, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Національний авіаційний університет

elyzaveta\_brs@mail.ru

*Проведено R/S та квазіциклічний аналіз показників рівнів води річки Трубіж. Показано можливість застосування методів фрактальної статистики до дослідження та прогнозування інших екологічних процесів.*

**Ключові слова:** часовий ряд; показник Херста; квазіцикл; персистентність; рівень води; фазовий портрет.

*The R/S and quasi-cyclical analysis of water level indicators for the Trubizh river has been carried out. A possibility of fractal statistics methods application to studying and forecasting of other ecological processes has been grounded.*

**Keywords:** time series; Hurst indicator; quasi-cyclic; persistence; water level; phase portrait.

### Вступ

На сьогодні природні екологічні явища все більш стають непередбачуваними. А це, у свою чергу, робить їх наслідки більш вражаючими. До таких явищ можна віднести кліматичні, гідрологічні, геологічні та інші, які досить часто пов'язані між собою. За останні п'ять років катастрофічних ситуацій траплялося більше ніж у минулому. Проте слід зазначити, що такі ситуації відбувалися десятки років тому. Це свідчить про те, що природні еволюційні процеси можуть володіти властивістю циклічності, або квазіциклічності з певним періодом повторення.

Зокрема рівні води річок, які перш за все, безпосередньо залежать від кліматичних факторів є динамічним та на перший погляд хаотичним процесом, який впливає на екологічний стан басейну річки та його зміну. Від коливань рівнів води залежить екологічна безпека та стабільність прилеглих територій, зокрема населених пунктів, сільськогосподарських угідь тощо.

### Постановка проблеми

Природні процеси та явища надзвичайно складні, тому вони передбачають далеко не просте вивчення та дослідження. З-поміж таких процесів доцільно виділити окремий клас небезпечних екологічних подій, які володіють властивістю непередбачуваності та складно-прогнозованості. Одним із способів дослідження таких подій є моделювання з метою виділення характерних причинних факторів, взаємозв'язків між ними та характеристик впливу на кінцевий резуль-

тат. Однією з сучасних методик вивчення хаотичних характеристик складних еволюційних процесів є методика фрактальної статистики, яка дозволяє відчувати явища та динамічні процеси у вигляді самоподібних форм та описувати формалізованою мовою відповідні співвідношення. Це дозволяє максимально наблизитись до адекватного розуміння природної динаміки та її наслідків.

Важливим питанням сьогодення у сфері охорони навколишнього середовища та раціонального використання природних ресурсів України є екологічна ситуація у басейнах середніх та малих річок. Сучасне екстенсивне використання водних ресурсів у екосистемах призвело до порушення екологічної рівноваги й виникнення проблем: інженерної перебудови русел та заплав унаслідок меліоративних робіт. Існуючий антропогенний вплив на басейни малих та середніх річок вносить значний внесок у зменшення їх водності, що у свою чергу може призвести до ряду глобальних екологічних проблем [4].

У роботі гідрологічним об'єктом дослідження вибрано річку Трубіж, яка є притокою Дніпра. Використання фрактальних методів під час вивчення хаотичних процесів може дати науково обґрунтовану відповідь щодо її майбутнього.

Дослідження такого гідрологічного процесу, як рівень води річки є трудомістким, оскільки для нього характерна значна кількість чинників формування, високий рівень невизначеності, складність, циклічність, хаотичність структури зв'язків. Підвищення (загальнорічне та разове) рівня води може спричинити затоплення прилег-

лих територій, загальноорічне зниження рівня води — зникнення водного об'єкта.

### Аналіз досліджень і публікацій

Сучасний розділ математичної статистики, а саме фрактальної, знаходить все ширше застосування в різних галузях діяльності людини.

За допомогою фракталів описують як фізичні, так і природні явища. Першим це питання розглянув Бенуа Мандельброт, який ввів поняття «фрактал» у 1975 р. для позначення нерегулярних само подібних множин. У 1977 р. Бенуа Мандельброт опублікував книгу «Форма, случай и размерность», а потім — ще більш відому книгу-маніфест «Фрактальная геометрия природы» (1983) [4]. Першим ученим, який намагався визначити довжину берегової лінії, а саме Великої Британії, був Бенуа Мандельброт. Виявилось, що коректну відповідь отримати так і не вдалось. А в 1988 р. норвезький учений Енс Федер вирішив дослідити довжину берегової лінії своєї країни.

Як відомо, традиційні геометричні об'єкти мають цілочислову розмірність: лінія одновимірна, плоска поверхня двовимірна, поверхня сфери тривимірна. Фрактальні об'єкти характеризуються фрактальною, дробовою розмірністю. Така розмірність була введена Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff, 1919).

Дослідження фракталів були пов'язані з практичним завданням вимірювання берегової лінії на основі розмірності. Один із способів визначення фрактальної розмірності є структурування об'єкта за квадратами, зменшуючи їх розмір [2].

Фрактальними виявилися, крім берегової лінії, багато інших природних структур і процесів: річки з їх притоками, блискавки, поверхня гір, хмар, розподіл галактик, сонячна активність тощо (Mandelbrot, 1977, 1983; Юргенс та ін., 1990; Федер, 1991; Пайтген, Ріхтер, 1993) [2]. Також класичними фракталами вважають дерево, лист папороті, трахеї, бронхи та сніжинку Коха.

Яскравим прикладом формування фрактальних фігур у природі є реагування на зміну середовища колонії бактерій і амеб. Подібно сніжинкам вони розростаються у живильному середовищі та можуть створювати зразки несподіваної складності — утворюючи фрактальні структури. Створені форми відображають стратегії організмів для виживання в умовах, що змінюються.

Вирізняють чіткі та нечіткі фрактальні моделі. Вони можуть використовуватись для вивчення поширення явищ в екологічних середовищах, елементи яких характеризуються малою мобільністю або статичні, а самі явища на початковому етапі мають невеликий радіус дії. Такі моделі відтворюють у деякій системі поширення лісо-

вих пожеж, забруднення озер, початковий етап розповсюдження епідемій тощо.

Подібні моделі або підходи до них вивчалися Мальтусом, Ферхюльстом, Ідемом, Грассбергером [1].

Схеми таких моделей містять фрактальні кластери, поверхні яких відтворюють нетривіальні закони подібності. Їх можна вивчати також з погляду нечіткої фрактальної теорії, описуючи чітко значні та нечітко значні фрактальні характеристики вказаних моделей [6; 8].

Фрактали знаходять місце і в техніці. Так, наприклад, конфігурація утворених у металі тріщин має фрактальний характер.

В Україні першу докторську дисертацію з фрактального аналізу було захищено в 1999 р. М. В. Працьовитим.

Вивчення пористих структур, зокрема сорбентів, також зручно здійснювати засобами теорії фракталів. Актуальність такого вивчення в тому, що властивості шумопоглинальних матеріалів у пористих поверхнях більш якісні. А їх кількісні характеристики можна визначати засобами фрактального аналізу.

Сучасні дослідження динамічних процесів за допомогою фрактальних методів, які спочатку почали активно залучати в економічну науку, де були отримані достовірні прогнози, а також знайшли місце в природничих та технічних галузях, дають привід вважати доцільним використання таких методів у моделюванні екологічних процесів.

**Мета** статті — проаналізувати можливість і коректність використання фрагментів фрактальної статистики для вивчення та прогнозування локальних гідрологічних процесів.

### Метод фрактально-статистичного аналізу часових рядів

Сьогодні в науці фракталами цікавляться з двох основних причин. З однієї — фрактали є предметом дослідження, з іншої — вони є досить чутливим засобом опису поведінки нерегулярних явищ та процесів [7].

Одним з окремих напрямів загальної теорії фракталів є фрактальна статистика.

Основними завданнями фрактальної статистики є дослідження трендостійкості, чисельна оцінка глибини пам'яті (дослідження на персистентність та антиперсистентність), обчислення розмірності статистичної сукупності та характеристик циклічності. Базовим інструментом для фрактально-статистичного аналізу часових рядів є запропонований Херстом *R/S*-аналіз (або метод нормованого розмаху).

Гідрогеолог Херст займався проблемою контролю рівня води у водосховищі в районі старої нільської греблі на початку минулого століття.

Зміст  $R/S$ -аналізу полягає в такому. Якщо розмах ряду  $R(N)$ , який залежить від періоду  $N$ , поділити на стандартне відхилення  $S(N)$  за той самий період  $N$ , то можна отримати безрозмірну величину  $R/S$ , яку називають *нормованим розмахом*.

Емпіричний закон Херста можна подати такою формулою:  $R/S = (\alpha N)^H$ , де,  $H$  — показник Херста;  $\alpha$  — деяка константа (для випадкових процесів з некорельованими значеннями та скінченною дисперсією  $H = 1/2$ ,  $\alpha = \pi/2$ ).

При  $0,5 < H < 1$  спостерігається трендостійкість і вважають, що досліджуваний ряд має «пам'ять». Показник Херста реагує на довгострокову або довгу пам'ять, коли вагомий вплив

на поточний стан мають достатньо віддалені події. Такі ряди називають стійкими або персистентними, тобто в них закладена тенденція, яка зберігається і в майбутньому.

Чим ближче до одиниці показник Херста, тим виразніша персистентність. Ряди з показником  $H$  у межах від 0 до 0,5 називають *антиперсистентними*. Вони демонструють дуже швидке повернення до середнього, тобто якщо на даний момент існує в ряді деяка тенденція, то існує ймовірність її зміни на протилежну тенденцію. При цьому ймовірність тим більша, чим менший показник  $H$  [9].

Залежно від показника Херста виділяють «кольори шумів» у природних еволюційних процесах, які визначають поведінку часового ряду (рис. 1).

↑ Показник Херста – $H$		
1	Чорний шум	Персистентна поведінка часового ряду: трендостійкість, наявність ефекту тривалої пам'яті, наявність періодичних циклів і квазіциклів
0,6		
0,5	Білий шум	Немає властивого масштабу: відповідає хаотичній поведінці часового ряду
0,4	Рожевий шум	Антиперсистентна поведінка часового ряду: дуже часте повернення до середнього
0,1		
0	Коричневий шум	Немає жодної інформації

Рис. 1. «Кольори шумів» у природних еволюційних процесах

Пам'ять про значно віддалені події може зберігатися в рядах тривалий час, іноді назавжди.

Система, для якої показник Херста  $H$  більше 0,5, може мати довгий ряд взаємопов'язаних подій.

У таких рядах події не симетричні відносно поточного моменту, тобто час має фіксований напрям (наявна «стріла часу»). Це, зокрема, означає, що такі стохастичні ряди певною мірою прогнозовані.

Вплив сьогодення на майбутнє може бути вираженим кореляційним співвідношенням  $C = 2^{2H-1} - 1$ , де  $C$  — міра кореляції.

Для випадкового процесу (процесу без пам'яті)  $H = 1/2$ , права частина перетворюється в нуль, отже сьогодення не впливає на майбутнє [9].

#### Алгоритм обчислення показника Херста

Для визначення показника Херста можна використовувати «Калькулятор Херста», автором якого є В. В. Левченко. Алгоритм обчислення показника Херста такий:

*Крок 1.* Розбиття ряду на відрізки довжиною  $n_1$ . Кількість відрізків  $r_1$ .

– Обчислення середнього значення за кожним відрізком —  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, r_1$ .

– Обчислення середньоквадратичного відхилення за кожним відрізком  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, r_1$ .

– Обчислення середнього значення відношень  $R/S - RS_1$ .

*Крок 2.* Розбиття ряду на відрізки довжиною  $n_2 = n_1 + \Delta$ . Кількість відрізків  $r_2$ .

– Обчислення середнього значення за кожним відрізком —  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, r_2$ .

– Обчислення середньоквадратичного відхилення за кожним відрізком  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, r_2$ .

– Обчислення середнього значення відношень  $R/S - RS_2$ .

*Крок k.* Розбиття ряду на відрізки довжиною  $n_k = n_{k-1} + \Delta$ . Кількість відрізків  $r_k$ .

– Обчислення середнього значення за кожним відрізком —  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, r_k$ .

– Обчислення середньоквадратичного відхилення за кожним відрізком  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, r_k$ .

– Обчислення середнього значення відношень  $R/S - RS_k$ .

Останній крок. Розбиття ряду на два відрізки довжиною  $n_p = N/2$ . Кількість відрізків –  $r_p$ .

– Обчислення середнього значення за кожним відрізком —  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, r_p$ .

– Обчислення середньоквадратичного відхилення за кожним відрізком  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, r_p$ .

– Обчислення середнього значення відношень  $R/S - RS_p$ .

Одержаний ряд  $R/S$  і час відображається на точковій двовимірній діаграмі (по осі абсцис — час, по осі ординат — значення  $R/S$ ). Отримана крива апроксимується степеневою функцією (лінія тренда). Значення степеня в рівнянні апроксимації є шуканим показником Херста.

Метод  $R/S$ -аналізу дасть змогу оцінити ступінь «випадковості» часового ряду. Величина, отримана в результаті аналізу, показує тривалість збереження тенденції часового ряду. Ця величина називається *показником персистентності* (лат. *persiste* — упиратися) або антиперсистентності, залежно від значення. Для простоти розуміння її називають показником стабільності (нестабільності).

### Виділення квазіциклів

У разі отримання позитивної відповіді про наявність персистентності в часовому ряді наступним етапом дослідження часового ряду може стати квазіциклічний аналіз. Він починається з побудови фазового портрета. Дані наносяться на координатну площину. Якщо змінних дві, то одну з них беремо за  $x$ , іншу за  $y$  та зображаємо залежність у декартових координатах. Отриману множину точок називають фазовим портретом (ФП) системи у фазовому просторі. Розмірність фазового простору залежить від кількості змінних у системі.

Дослідження поведінки динамічної системи зводиться до вивчення поведінки траєкторій у фазовому просторі. З геометричного погляду під структурою розбиття ФП на траєкторії розуміється взаємне розташування фазових траєкторій у просторі. Слід зауважити, що повний опис ФП для довільної динамічної системи є дуже складною і на сьогодні невирішеною проблемою.

Головна мета використання фазового простору полягає в тому, щоб побудувати залежність величини від значень цієї ж величини в інші моменти часу  $z_{i-k} = y(t_{i-k})$ .

Завдання полягає в знаходженні або визначенні такої функції:  $\Phi = \Phi(z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+m-1})$ , яка б

дозволяла прогнозувати значення  $z_{j+m}$ . Для часового ряду  $z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  при розмірності  $\rho = 2$  та  $m = 0$ , ця функція набуває вигляду  $z_{i+1} = y(z_i)$ .

Розкладання фазової траєкторії на квазіцикли ґрунтується на аналізі графічного зображення фрагментів даної фазової траєкторії. Квазіцикл відрізняється від класичного циклу тим, що початкова і кінцева точки квазіциклу не обов'язково повинні збігатися [5].

### Квазіциклічний аналіз рівнів води річки Трубіж

Спостереження за рівнем води дають змогу встановити тривалість затоплення окремих ділянок річкової долини, визначити швидкість руху паводкової хвилі вздовж русла, охарактеризувати водний режим ріки протягом року та в багатолітній перспективі тощо.

Показники гідрологічного стану річки Трубіж можна розглядати як деяку динамічну систему. На повноводдя річки впливають як кліматичні фактори, які є причинами утворення різних гідрологічних явищ, так і антропогенний вплив, здебільшого сільського господарства.

Річка Трубіж має два діючих гідрологічні пункти. Перший знаходиться у с.м.т. Баришівка, другий у Переяслав-Хмельницькому. Заміри рівнів води проводились щоденно. Дані для аналізу були отримані з архіву Центральної геофізичної обсерваторії за період з 1982 по 2012 рр., та були визначені максимальні, мінімальні та усереднені показники за місяць.

На першому етапі досліджень визначались основні показники класичної статистики, будувались лінійні та поліноміальні тренди. Отримані коефіцієнти детермінації знаходились у межах 0,002–0,04 (для лінійного тренду), 0,14–0,04 (для поліноміального тренду), що вказувало на безперспективність прогнозування традиційними статистичними методами.

Наступним етапом було проведення визначення показника Херста. Обчислені показники попадають у так званий «чорний шум» (значення більше 0,5), що характеризує поведінку часового ряду слабо та достатньо персистентною. Винятком є часовий ряд максимальних значень у місті Переяслав-Хмельницький, де показник Херста наближений до «білого шуму», тобто до 0,5, що вказує на хаотичний характер поведінки відповідного часового ряду (табл. 1).

Розраховані коефіцієнти кореляційної міри коливались від 0,2 до 0,5, що свідчить про вплив попередніх подій на наступні. Тобто можна припустити, що система має пам'ять, а отже, значення рівнів води (РВ) не є випадковими і можуть бути прогнозованими.

Таблиця 1

## Узагальнення отриманих результатів

Значення та місце виміру	Показник Херста, $H$	Кореляційна міра впливу минулого на майбутнє, $C$
Середні значення с.м.т. Баришівки	0,728	0,4
Максимальні значення с.м.т. Баришівки	0,659	0,3
Мінімальні значення с.м.т. Баришівки	0,789	0,5
Середні значення м. Переяслав-Хмельницького	0,617	0,2
Максимальні значення м. Переяслав-Хмельницького	0,525	0,04
Мінімальні значення м. Переяслав-Хмельницького	0,656	0,2

Виятком є максимальні значення рівнів води в пункті Переяславі-Хмельницькому.

Для по-дальшого дослідження було взято дані з пункту Баришівка. Було враховане таке: для даного району характерним є сільськогосподарська діяльність, яка завдає найбільшого впливу на зміну рівня води в літній та частково весняний періоди; з іншого боку непередбачувані та не-

контрольовані розливи річки можуть згубно вплинути на врожай, тому основна увага приділялась середнім, максимальним та мінімальним значенням рівнів води за травень, червень, липень та серпень за період з 1982 по 2012 рр.

Результати квазіциклічного аналізу для середньомісячних даних зведені в табл. 2.

Таблиця 2

## Розмірність квазіциклів середніх значень РВ

Місяць	5	Квазіцикл	C1	C2	C3	C4	C5	C6
		Розмірність	7	4	4	4	3	4
6	Квазіцикл	C7	C8	C9	C10	C11	–	
	Розмірність	7	4	4	5	4	–	
7	Квазіцикл	C12	C13	C14	C15	C16	C17	
	Розмірність	3	3	4	6	5	5	
8	Квазіцикл	C18	C19	C20	C21	C22	C23	
	Розмірність	3	3	7	5	5	3	

Для побудови квазіциклів було використано таке правило: кінцева точка квазіциклу визначалась або першим самоперетином її ланки з якою-небудь з попередніх ланок, або достатньо близькою відстанню до початкової точки цього квазіциклу. Отриману таблицю можна вважати моделлю квазіциклів середніх значень рівнів води в річці Трубіж.

Для наочності на рис. 2 подана гістограма, яка відображає частоту появи квазіциклів у спостережуваному часовому ряді, де  $N(L)$  — кількість квазіциклів у розглянутих фазових портретах.

Аналогічно було виділено квазіцикли та визначено частоти появи розмірностей на часових рядах максимальних та мінімальних значень. Фазова траєкторія середніх значень РВ складається з 23 циклів, максимальних — з 21 циклу, мінімальних — з 20 циклів, розмірності яких коливаються від 3 до 11. Для середніх та максимальних значень РВ найбільша частота появи квазі-

циклів з розмірністю 4, а для мінімальних значень — з розмірністю 5. Це означає, можна очікувати, що через кожні 4 та 5 років рівень води в річці Трубіж сягатиме приблизно однакових значень на травень та літні місяці. Це безпосередньо вказує на те, що ряд має пам'ять.

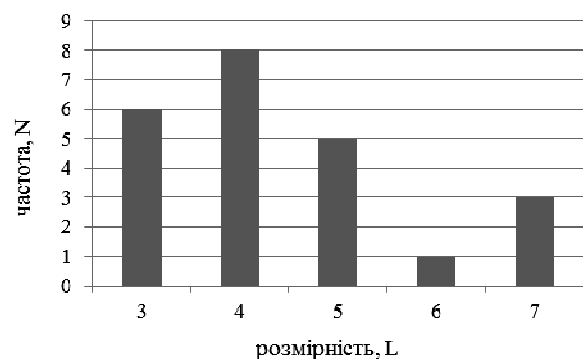


Рис. 2. Частота появи  $N(L)$  квазіциклів розмірності  $L$  середніх значень РВ

## Висновки

Таким чином, засобами фрактальної статистики може визначатись структура хаотичних характеристик природних еволюційних процесів. Фрактальні методи аналізу є дієвим інструментом для дослідження хаотичної динаміки показників таких процесів.

У результаті проведеного дослідження виявлено, що показники динаміки рівнів води утворюють персистентний часовий ряд. При порівнянні двох постів спостереження з'ясовано, що у с.м.т. Баришівка персистентна поведінка показників більш виражена, ніж у місті Переяслав-Хмельницькому. Це можна пояснити, зокрема, меншим впливом урбанізації у с.м.т. Баришівці.

Побудовані фазові простори показників РВ та їх аналіз підтверджують наявність періодичних квазіциклів. З'ясовано, що найвищу частоту мають квазіцикли тривалістю 4 роки для середніх та максимальних значень РВ, та 5 років для мінімальних значень РВ за травень, червень, липень та серпень. Це вказує на те, що можна очікувати повторюваності гідрологічного стану річки через вказані інтервали часу.

Таким чином, запропонований квазіциклічний аналіз екологічних процесів засобами фрактальної статистики дає задовільні якісні та кількісні характеристики. Можна очікувати, що застосування для інших екологічних процесів, які не підлягають обробці засобами класичної статистики, також дасть позитивні результати.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Грассбергер П.* Распространение эпидемических заболеваний, приводящее к фрактальным структурам / П. Грассбергер // Труды VI международного симпозиума «Фракталы в физике» (Триест, Италия, 1985). — М. : Мир, 1988. — С. 672.
2. *Исаева В. В.* Фракталы и хаос в биологическом морфогенезе / В. В. Исаева, Ю. А. Каретин, А. В. Чернышев. — Владивосток : Дальнаука, 2004. — 162 с.
3. *Клименко М. О.* Шляхи покращення екологічного стану водних екосистем / М. О. Клименко, О. А. Ліхо, Н. М. Вознюк // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. — Рівне, 2007. — Вип. 3 (39). Ч. 1. — С. 64–70.
4. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. — М. : Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
5. *Олешко Т. И.* Квазіциклічний передпрогнозний аналіз світових цін на нафту / Т. И. Олешко, О. В. Марусич, О. Л. Лещинський // Науковий вісник Інституту міжнародних відносин НАУ. Серія: економіка, право, політологія, туризм (фахове видання), 2011 — Том 2, №4. — С. 33.
6. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
7. *Тарасенко В. В.* Фрактальная геометрия природы: социокультурное измерение / В. В. Тарасенко // Синергетическая парадигма. Многообразие поисков и подходов. — М. : Прогресс-Традиция, 2000. — С. 191–214.
8. *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — К. : Наук. думка, 1992. — 208 с.
9. *Чумак О. В.* Энтропии и фракталы в анализе данных / О. В. Чумак. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. — 164 с.

Стаття надійшла до редакції 03.02.2014