

УДК 621.396.962.3/045

СТІЙКІСТЬ ОЦІНКИ ЧАСТОТИ ГАРМОНІЧНОГО СИГНАЛУ
ЗІ СТАЛОЮ СКЛАДОВОЮ ДО ІМПУЛЬСНИХ ЗАВАД

І. П. Омельчук, канд. техн. наук

Національний авіаційний університет

omelip@ukr.net

Досліджено вплив імпульсних завад на стійкість квазіоптимальної оцінки частоти гармонічного сигналу, який спостерігається в адитивній суміші зі сталою складовою та гаусівським шумом; означені критичні умови нестійкості. Методом статистичного моделювання отримані залежності показників точності оцінювання частоти від параметрів хаотичних імпульсних завад.

Ключові слова: частота, оцінка, стійкість, імпульсна завада.

The impulse interference impact on robustness of quasioptimal frequency estimation of harmonic signal with additive constant component and Gaussian noise are researched. The critical conditions for instability are defined. The dependencies of frequency estimation precision on parameters chaotic impulse interferences are obtained by statistic modeling.

Keywords: frequency, estimation, robustness, pulse interference.

Вступ

Практична цінність будь-якого алгоритму обробки реальних процесів залежить, у першу чергу, від його стійкості до дії завад [1].

Для радіотехнічних вимірювальних систем найбільш несприятливими є хаотичні імпульсні завади (ХІЗ), поява котрих може призвести до повного спотворення результатів розрахунків, що безпосередньо стосується й алгоритмів оцінювання частоти гармонічного сигналу (надалі «сигнал»).

Постановка проблеми

У даній статті досліджується вплив імпульсних завад (ІЗ) на показники ефективності синтезованої в праці [2] квазіоптимальної оцінки частоти (КОЧ) сигналу, який спостерігається на тлі сталої завади c та некорельованого гаусівського шуму η .

Вважається, що параметри адитивних складових цієї суміші довільні та апріорно невідомі, а її дискретна модель має вигляд

$$x_i = s_i + c + u v_i + \eta_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де $s_i = \rho \sin[\gamma(i-1) + \varphi_1]$ — відлік сигналу в пачці розміром N ; ρ , γ , φ_1 — його амплітуда, нормована частота (надалі спрощено «частота») та початкова фаза; u — амплітуда ХІЗ; v_i — випадкова бінарна величина, що набуває значення 1 з імовірністю $P_{\text{ХІЗ}}$.

Суттєвими для подальшого аналізу є дві крайні зони пачки, які об'єднують по три крайні відліки x_1, x_2, x_3 та x_{N-2}, x_{N-1}, x_N .

Аналіз досліджень і публікацій

Синтез алгоритму КОЧ у праці [2] здійснювався на підставі методу максимальної правдоподібності з використанням рекурентної еквідистантної моделі сигналу $s_i = \alpha s_{i-1} - s_{i-2}$, у якій параметр $\alpha = 2 \cos(\gamma)$ однозначно пов'язаний із нормованою частотою сигналу. Доведено, що оцінка частоти $\gamma^* = \arccos(\alpha^* / 2)$ ґрунтується на розв'язку квадратного рівняння

$$\alpha^2 + \frac{B(\bar{x})}{A(\bar{x})} \alpha + \frac{C(\bar{x})}{A(\bar{x})} = 0; \quad A(\bar{x}) \neq 0, \quad (2)$$

коефіцієнти якого розраховуються як статистики множини відліків сигналу $\bar{x} = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$

$$A(\bar{x}) = \sum_{i=4}^N (z_i^2 - z_i y_i); \quad B(\bar{x}) = \sum_{i=4}^N (2z_i^2 - y_i^2); \\ C(\bar{x}) = \sum_{i=4}^{M1} (2z_i y_i - y_i^2), \quad (3)$$

де використані позначення $z_i = x_{i-2} - x_{i-1}$ та $y_i = x_i - x_{i-1} + x_{i-2} - x_{i-3}$.

Подальші дослідження проводяться за методологією, що застосована у праці [3] для спорідненої задачі аналізу стійкості оцінки частоти до

XIЗ та гаусівського шуму без постійної складової. Зокрема, особливо важливою залишається визначена в ній достатня умова інваріантності дробу загального виду Ч/З до додаткових доданків у чисельнику $a_{\text{ч}}$ та знаменнику b_3 як

$$a_{\text{ч}}/b_3 \equiv \text{Ч}/3 \equiv (\text{Ч} + a_{\text{ч}})/(3 + b_3). \quad (4)$$

За відсутності шумів та ІЗ відношення коефіцієнтів (3) залежать тільки від частоти сигналу (відповідно замінено позначення аргументів)

$$\frac{B(s_1, \dots, s_N)}{A(s_1, \dots, s_N)} = \frac{-2 \cos 2\gamma \cdot \sin(\gamma/2)}{\sin(3\gamma/2)} = \frac{B(\gamma)}{A(\gamma)}; \quad (5)$$

$$\frac{C(s_1, \dots, s_N)}{A(s_1, \dots, s_N)} = \frac{-2 \sin 2\gamma \cdot \cos(\gamma/2)}{\sin(3\gamma/2)} = \frac{C(\gamma)}{A(\gamma)}, \quad (6)$$

що є базовим для доведення стійкості КОЧ до ІЗ.

Цілі та напрямки досліджень

Ця робота спрямована на дослідження стійкості КОЧ за різних заводових умов, а саме: кількості та розміщення ІЗ у пачці; сумісний вплив характеристик XIЗ та шуму на точність оцінки; визначення показників ефективності КОЧ методом статистичного моделювання. Оскільки статистично залежними є тільки коефіцієнти A , B та C (3), а всі інші процедури обробки детерміновані, то в аналізі основна увага зосереджується саме на властивостях відношень цих коефіцієнтів.

Стійкість КОЧ до детермінованих ІЗ

На практиці положення та кількість ІЗ апріорно невідомі, проте розуміння характеру стійкості КОЧ до різних детермінованих моделей ІЗ сприятиме правильному трактуванню результатів статистичного моделювання за умови дії XIЗ та шуму.

Розглянемо спочатку простіший варіант без шуму та з одним ІЗ, який знаходиться у довільному відліку r , але поза крайніми зонами пачки. Модель суміші (1) перетвориться до вигляду

$$\begin{cases} x_i = s_i, & i = \overline{1, r-1}, \overline{r+1, N} \\ x_r = s_r + s_r, \end{cases}$$

для якої після елементарних тотожних перетворень виразів (3) отримаємо перше відношення

$$\frac{B(s_1, \dots, s_r + u_r, \dots, s_N)}{A(s_1, \dots, s_r + u_r, \dots, s_N)} = \frac{B(s_1, \dots, s_N) + \dots}{A(s_1, \dots, s_N) + \dots} \quad (7)$$

$$\dots \frac{+2u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) - 4u_r(s_{r-2} + s_{r+2}) + 4u_r(s_{r-3} + s_{r+3})}{+2u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) - 2u_r(s_{r-2} + s_{r+2})}$$

Можна довести, згідно з виразами (5), (6), що у цьому варіанті має місце рівність відношення додаткових доданків дробу до його попереднього значення:

$$\frac{u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) - 2u_r(s_{r-2} + s_{r+2}) + u_r(s_{r-3} + s_{r+3})}{u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) - u_r(s_{r-2} + s_{r+2})} =$$

$$= \frac{B(s_1, \dots, s_N)}{A(s_1, \dots, s_N)} = \frac{B(s_1, \dots, s_r + u_r, \dots, s_N)}{A(s_1, \dots, s_r + u_r, \dots, s_N)} \equiv \frac{B(\gamma)}{A(\gamma)}, \quad (8)$$

що відповідає умові інваріантності (4).

Аналогічно до зазначеного вище легко показати виконання умови інваріантності (4) і для другого відношення коефіцієнтів рівняння (2) як

$$\frac{-u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) + u_r(s_{r-3} + s_{r+3})}{u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) - u_r(s_{r-2} + s_{r+2})} \equiv \frac{C(\gamma)}{A(\gamma)},$$

і це загалом означає нечутливість КОЧ до однієї ІЗ, яка знаходиться поза крайніми зонами пачки.

Коли ж ІЗ знаходиться у першому відліку пачки $r = 1$, то коефіцієнти рівняння (3) після перетворення набувають вигляду:

$$A(s_1 + u_1, \dots, s_N) = A(s_1, \dots, s_N) + 2u_1s_1 + u_1^2;$$

$$B(s_1 + u_1, \dots, s_N) = B(s_1, \dots, s_N) + 2u_1s_1 + u_1^2 + 2u_1s_4;$$

$$C(s_1 + u_1, \dots, s_N) = C(s_1, \dots, s_N) + 2u_1s_1 + u_1^2 + 2u_1s_4,$$

із чого виходить, що відношення додаткових доданків у чисельнику та знаменнику не задовольняє вимозі інваріантності дробу (4):

$$\frac{u_1 + 2(s_1 + s_4)}{u_1 + 2s_1} \neq \frac{B(\gamma)}{A(\gamma)}, \quad \frac{u_1 + 2(s_1 + s_4)}{u_1 + 2s_1} \neq \frac{C(\gamma)}{A(\gamma)}.$$

Подібним чином можна довести, що пошкодження заводою хоча б одного відліку крайніх зон пачки суттєво впливає на значення відношень коефіцієнтів рівняння (2), як наслідок — змінюється корінь, тобто КОЧ стає нестійкою.

Далі розглянемо варіант моделі пачки без шуму з двома ІЗ, які перебувають у довільних її відліках r та k , але поза крайніми зонами, а відстань між ними більша за критичну $|r - k| > 3$.

Після тотожних перетворень виразів коефіцієнтів (3), отримаємо, подібно до виразу (7), їх відношення, яке матиме у чисельнику та знаменнику вже по два додаткових доданка, а саме:

$$\frac{B(s_1, \dots, s_r + u_r, \dots, s_k + u_k, \dots, s_N)}{A(s_1, \dots, s_r + u_r, \dots, s_k + u_k, \dots, s_N)} = \frac{B(s_1, \dots, s_N) + \dots}{A(s_1, \dots, s_N) + \dots}$$

$$\dots \frac{2u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) - 4u_r(s_{r-2} + s_{r+2}) + 2u_r(s_{r-3} + s_{r+3}) + \dots}{2u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) - 2u_r(s_{r-2} + s_{r+2}) + \dots}$$

$$\dots \frac{2u_k(s_{k-1} + s_{k+1}) - 4u_k(s_{k-2} + s_{k+2}) + 2u_k(s_{k-3} + s_{k+3})}{+2u_k(s_{k-1} + s_{k+1}) - 2u_k(s_{k-2} + s_{k+2})}$$

Перша пара цих доданків, відповідно до виразу (8), задовольняє вимогу інваріантності (4). Вочевидь, це стосується й другої пари доданків, а також доданків іншого відношення коефіцієнтів

$$\frac{-u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) + u_r(s_{r-3} + s_{r+3}) - \dots}{u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) - u_r(s_{r-2} + s_{r+2}) + \dots} \dots \frac{u_k(s_{k-1} + s_{k+1}) + u_k(s_{k-3} + s_{k+3})}{u_k(s_{k-1} + s_{k+1}) - u_k(s_{k-3} + s_{k+3})} \equiv \frac{C(\gamma)}{A(\gamma)}. \quad (9)$$

Таким чином, у даній завадовій ситуації алгоритм КОЧ зберігає стійкість.

Якщо ж відстань між двома ІЗ не більша за критичну $|r-k| \leq 3$, то можна показати, що у дробі (9) у чисельнику або (та) в знаменнику з'являються додаткові мультиплікативні доданки ($u_k u_r$), що утворюються за значеннями амплітуд ІЗ та не залежать від частоти. Тому їхнє відношення завжди не задовольняє умову інваріантності, і це означає нестійкість алгоритму КОЧ.

Вплив шуму на стійкість КОЧ до ІЗ

Достатньо специфічним є вплив шуму на стійкість КОЧ. Повернемося до варіанта одного ІЗ, який знаходиться поза крайніми зонами пачки відліків. Згідно з моделлю суміші (1) та виразами (3) один з коефіцієнтів рівняння запишемо як:

$$\begin{aligned} A(s_1 + \eta_1, \dots, s_r + \eta_r + u_r, \dots, s_N + \eta_N) = \\ = A(s_1 + \eta_1, \dots, s_N + \eta_N) + 2u_r(s_{r-1} + s_{r+1}) - \\ - 2u_r(s_{r-2} + s_{r+2}) + 2u_r(\eta_{r-1} + \eta_{r+1}) - 2u_r(\eta_{r-2} + \eta_{r+2}). \end{aligned}$$

Аналогічно коефіцієнти B і C будуть мати у своєму складі додаткові доданки нового типу, які утворюються як мультиплікативні поміж значеннями сигналу та шуму, а також поміж амплітудою ІЗ та шумом. Випадковість таких доданків, вочевидь, означає невідповідність їх відношень умові інваріантності (4), що загалом свідчить про нестійкість алгоритму КОЧ.

Таким чином, вплив шуму на стійкість КОЧ полягає, окрім суто шумового чинника, ще й у тому, що він завжди «виявляє» ІЗ, незалежно від місця їх розташування в пачці.

Статистичний аналіз ефективності КОЧ

Ефективність КОЧ за умов одночасної наявності ХІЗ та шуму аналізувалась шляхом статистичного моделювання. Як приклад на рис. 1 показана емпірична щільність розподілу ймовірностей (ЩРІ) оцінок частот γ^* сигналу, яка отримана за таких параметрів моделювання: розмір пачки $N = 64$; кількість реалізацій пачок — 10000; амплітуда та частота сигналу — 1 В та

0,5 рад/с; амплітуда сталої складової — 5 В; амплітуда та ймовірність ХІЗ — 10 В та 0,05; середньоквадратичне відхилення (СКВ) шуму — 0,1 В.

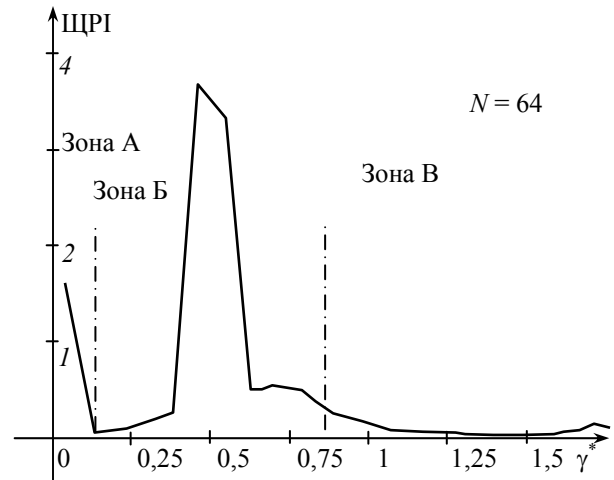


Рис. 1. Розподіл оцінок частот

Детальні статистичні дослідження розподілів оцінок для різних параметричних умов дали змогу виявити специфічну особливість КОЧ. Точність оцінки за значних $P_{ХІЗ}$ може погіршуватися зі збільшенням пачки N , що є проявом нестійкості до двох близько розміщених ІЗ; а ймовірність такої події монотонна за N . Але коли потужність шуму домінує над енергетикою ХІЗ, то збільшення N уже сприяє зменшенню похибки.

Принциповою властивістю наведеної та всіх інших ЩРІ, що досліджувалися, є відверто негаусівський вид. Тому визначення ефективності КОЧ тільки за звичайними ймовірнісними характеристиками — СКВ та зміщенням оцінок частоти — недостатньо, і доцільно це здійснювати комплексно за окремими складовими частинами ЩРІ.

Аналогічно праці [3] виділимо три характерні зони ЩРІ, як це показано на рис. 1: А — зона збоїв; Б — достовірна зона; В — зона викидів. Оскільки події типу збій з'являються в розрахунках КОЧ унаслідок некоректної операції визначення функції «арккосинус», коли абсолютне значення аргументу стає більшим за одиницю, то таким оцінкам частоти умовно призначаються нульові значення, які й утворюють зону збою.

Після відкидання цих нульових оцінок принциповим стає питання відшарування аномальних викидів (зона В), що обумовлені проявом завад та шуму в нелінійних операціях алгоритму КОЧ. Унаслідок апріорної невідомості істинного значення частоти, завчасно межу для викидів встановити неможливо, а вона повинна визначатися окремо для кожної емпіричної ЩРІ.

Для цього, подібно до праці [3], застосовувався алгоритм розшарування двох підвибірок, який

ґрунтується на обробці варіаційного ряду входних відліків за таким правилом:

$$j = \arg \min_{j=2, N-2} \left\{ k_p \left(\sigma_D^2 + \sigma_B^2 \right) \right\},$$

де k_p — нормуючий коефіцієнт; j — номер порядкової статистики, за якою здійснюється розшарування, $p_D, p_B, \sigma_D^2, \sigma_B^2$ — імовірності та дисперсії достовірної підвибірки та викидів.

Емпіричні ймовірності попадання відліків у зону А та зону В стають додатковими визначальними показниками ефективності КОЧ, оскільки вони доповнюють до одиниці показник достовірності оцінки, за який беремо ймовірність попадання оцінки частоти у зону Б. Після цього СКВ та зсув оцінок доцільно розраховувати за умовою попадання у достовірну зону.

Для прикладу на рис. 2 наведені сім'ї ймовірнісних показників КОЧ, що отримані в результаті статистичного моделювання за таких основних умов: кількість реалізацій пачок — 10000; діапазон імовірностей $P_{ХІЗ} = 0 - 0,1$; амплітуди ХІЗ $U = 5, 10, 20$; розмір пачки $N = 32$ відліки, амплітуда сигналу 3 В, амплітуда сталої 7 В; СКВ гаусівського шуму 0,2 В.

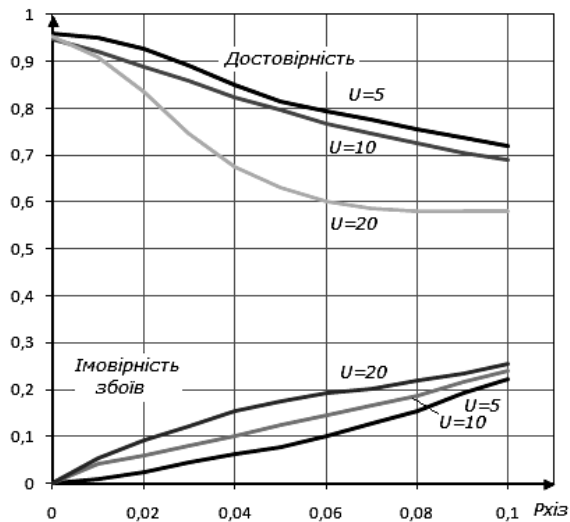


Рис. 2. Імовірнісні показники

Значення отриманих показників точності у достовірній зоні за зазначених вище умов статистичного моделювання наведені на рис. 3. Усі показані криві демонструють монотонні залежності показників ефективності КОЧ від параметрів суміші, але привертає увагу суттєве зменшення чутливості КОЧ до амплітуди ХІЗ, якщо вона перевищує 10 В, та мала залежність від неї зміщення оцінки.

Проведений комплекс подібних до описаних вище статистичних досліджень, що у статті не наводяться, дозволив виявити також деякі інші типові властивості КОЧ гармонічного сигналу.

Визначено, що всі показники ефективності мають тенденцію погіршуватися із зменшенням частоти сигналу, але практично не залежать від початкової його фази; збільшення потужності шуму, поряд з погіршенням точності оцінки у достовірній зоні ЦРІ, призводить також до суттєвого збільшення ймовірності збоїв, але вплив значення потужності на ймовірність викидів незначний; ймовірність аномальних викидів приблизно пропорційна ймовірності ХІЗ.

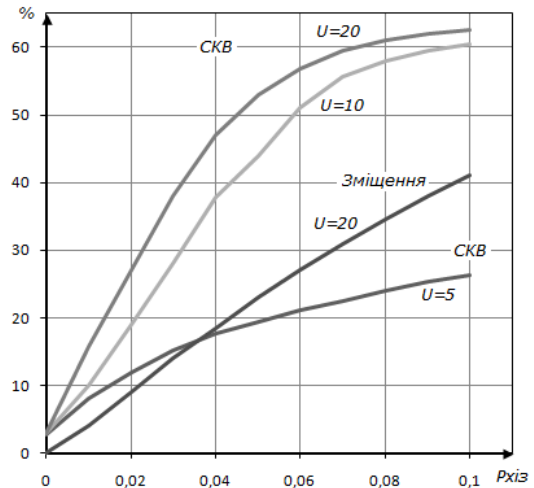


Рис. 3. Показники точності

Висновки

1. Стійкість КОЧ гармонічного сигналу до групи ХІЗ за відсутності шуму зберігається у випадках, коли всі ІЗ знаходяться поза крайніми зонами пачки, які об'єднують по три відліки, та відстань між всіма суміжними ІЗ більша за три інтервали дискретизації.

2. За наявності шуму КОЧ завжди є чутливою до дії будь-якої ІЗ, незалежно від місця її розташування в пачці.

3. Оцінювання реальної стійкості КОЧ доцільно здійснювати за комплексом показників: імовірностями збоїв і викидів та СКВ і зміщенням оцінок у достовірній зоні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Корнильєв Э. А. Устойчивые алгоритмы в автоматизированных системах обработки информации / Э. А. Корнильєв, И. Г. Прокопенко, В. М. Чуприн. — К. : Техніка, 1989. — 224 с.

2. Прокопенко І. Г. Синтез квазіоптимальної оцінки частоти гармонічного сигналу зі сталою складовою / І. Г. Прокопенко, І. П. Омельчук // Вісник ДУІКТ. — 2009. — №1. — С. 63–69.

3. Прокопенко І. Г. Стійкість квазіоптимальної оцінки частоти гармонічного сигналу до імпульсних завад / І. Г. Прокопенко, І. П. Омельчук, Г. Є. Соколов // Електроніка та системи управління. — 2009. — №2. — С. 69–74.

Стаття надійшла до редакції 26.11.2012.